Helmut HEUGL

Wachstumsprozesse einmal anders – mit rekursiven Modellen

Rekursive Modelle sind erst durch die Nutzung von digitalen Mathematikwerkzeugen für die Schule zugänglich geworden. Damit wird die Behandlung einer Vielzahl von interessanten Anwendungsproblemen möglich. Das Modellbilden erfolgt durch die Schülerinnen und Schüler. Sie übersetzen die verbalen Informationen oder die Eigenschaften von Datenmengen in die Sprache der Mathematik. Das Simulieren übernimmt das Werkzeug. Es liefert entweder Tabellen oder Graphen. Die nächste Aktivität der Lernenden ist das Interpretieren der Ergebnisse und das Bewerten bezüglich des Anwendungsproblems.

Umso überraschender ist es für mich, dass diese Chancen in den Lehrplänen der meisten Bundesländer nicht genutzt werden.

Technologie im Mathematikunterricht ist heute viel mehr als nur ein Rechenwerkzeug. Digitale modulare Mathematiksysteme (MMS genannt) ermöglichen die vernetzte Nutzung verschiedener Werkzeuge unter einer gemeinsamen Benutzeroberfläche, wie Computeralgebra Systeme, Graphen, Tabellen, geometrische Werkzeuge usw.

Kapitel 1: Rekursive Modelle in der Sekundarstufe I

Schon in der **Sekundarstufe I** können mit Hilfe der Tabellenkalkulation oder entsprechenden Werkzeugen rekursive Modelle genutzt werden. Ein konkretes Beispiel:

Aufgabe 1: Bausparkredit für einen Hauskauf

[Heugl, 2014]

Herr Mathemat benötigt ein Bauspardarlehen in der Höhe von € 140.000 mit einer Laufzeit von 30 Jahren. Derzeit beträgt der Zinssatz 3.5%. Der Zinssatz kann gemäß dem Index Euribor auf bis zu 6% steigen. Der Kredit soll in 30 Jahren zurückgezahlt sein.

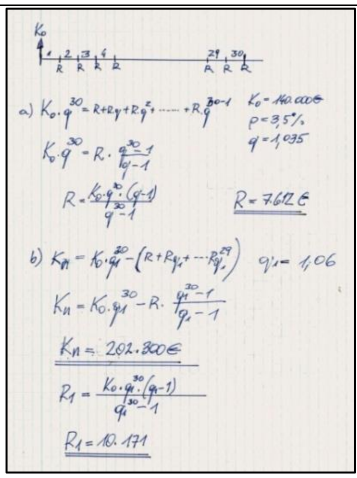
a) Definiere zwei Schieberegler für die Jahresrate r und den Wachstumsfaktor q = (1+p/100). Suche ein mathematisches Modell für die Entwicklung des Kredits und zwar zuerst für p = 3.5%. Wie hoch ist die Jahresrate, wenn der Kredit nach 30 Jahren zurück gezahlt sein soll?

b) Wie ändert sich die Situation, wenn der Zinssatz auf 6% steigt? Wie hoch müsste dann die Jahresrate sein, wenn der Zinssatz schon von Anfang an 6% wäre?

Im traditionellen Unterricht könnte diese Aufgabe frühestens in der Klassenstufe 10 gelöst werden.

Nötig sind Kompetenzen in den Bereichen Geometrische Reihen und Logarithmen.

Mit MMS ist die Lösung solcher Probleme schon in der Sekundarstufe I möglich. Benötigt werden Kompetenzen im Bereich Prozentrechnung.



Mathematische Voraussetzungen beim Lösen mit Technologie:

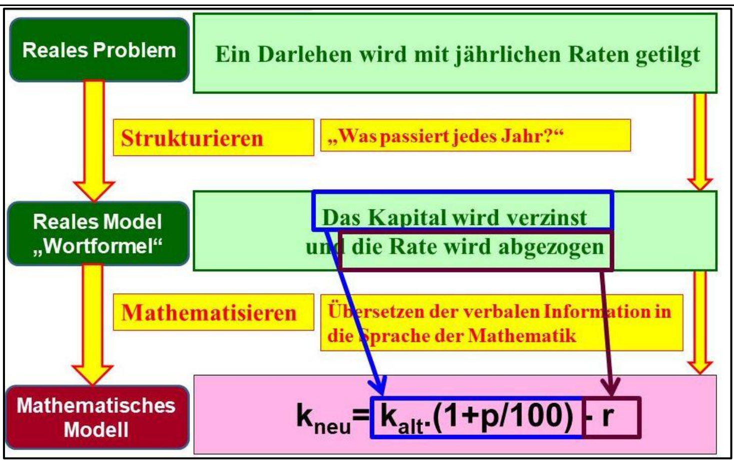
Die zentrale Aktivität beim Modellbilden ist das Übersetzen verbaler Informationen und Entscheidungen in die Sprache der Mathematik. Wie beim Fremdsprachenlernen kann das Anlegen eines Vokabelheftes für den Lernprozess sinnvoll sein. So kommt man etwa zu folgenden Übersetzungsregeln:

Deutsch	Mathematik
P% von etwas	$\cdot\, p/100$
vermehre um p%	$\cdot\, (1 + p/100)$

Damit kann man die erste Grundregel des exponentiellen Wachstums nutzen:

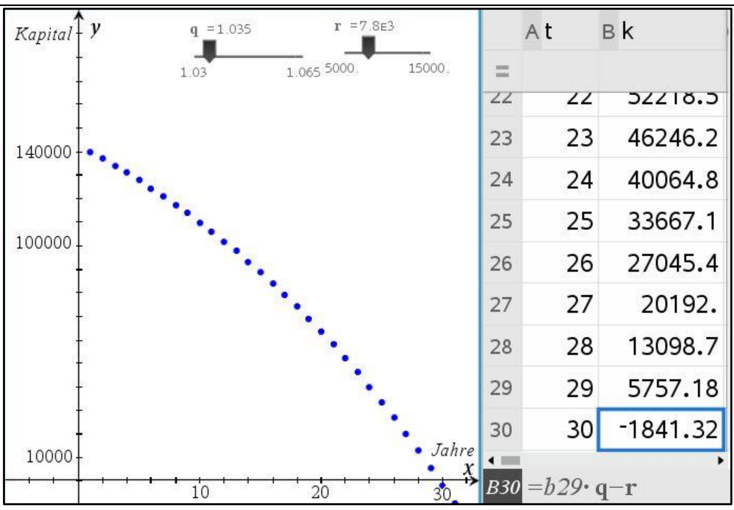
„Zu gleichen Zeiten gehört der gleiche Faktor“ ⇔ $K_{neu} = q \cdot K_{alt}$

Schritt 1: Modellieren



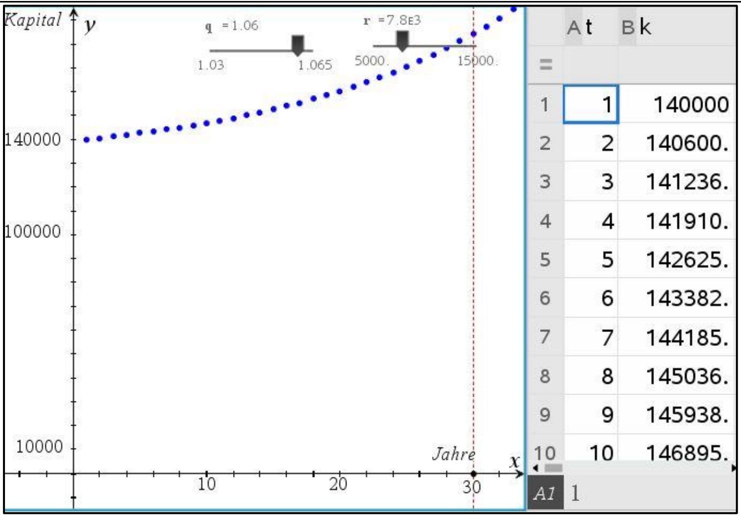
Mathematik ist eine Sprache. Dementsprechend ist eine der wichtigsten kognitiven Aktivitäten das Übersetzen von Anweisungen in der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik.

Schritt 2:Lösen mit Hilfe von MMS.



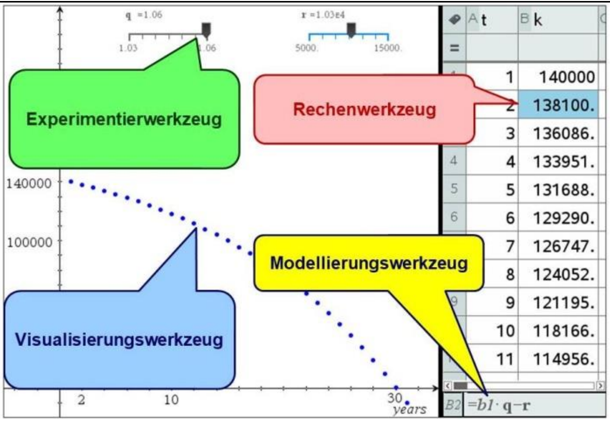
Eine besondere Möglichkeit der experimentellen Lösung bietet der Einsatz von Schiebereglern, mit denen man die Veränderung verschiedener Parameter simulieren kann.

Bei 30-jähriger Laufzeit ergibt sich eine Jahresrate von 7.800 €.



Steigert man den Zinssatz von Beginn an auf den von der Bank als möglich angegebenen Wert von 6%, stellt man in der nachstehenden Grafik bzw. in der Tabelle erschrocken fest, dass nach 30 Jahren der Schuldenstand trotz jährlicher Zahlung von € 7.800 deutlich höher ist als zu Beginn. Soll das Ziel, nach 30 Jahren schuldenfrei zu sein, wieder erreicht werden, muss der „Ratenschieberegler“ entsprechend erhöht werden. Das bedeutet aber, dass man jährlich etwa um € 2.500 mehr bezahlen muss.

Die verschiedenen Funktionen der digitalen Werkzeuge:

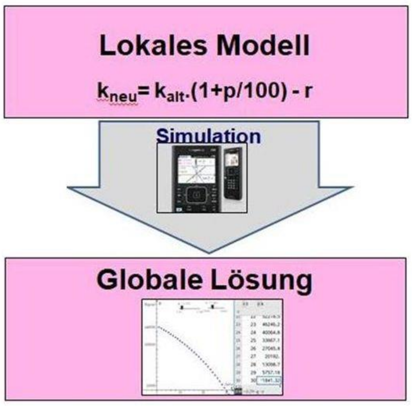


Modellierungswerkzeug: Verbal formulierte Modelle werden direkt in die Sprache der Mathematik übersetzt.

Rechenwerkzeug: MS bieten die Chance, von übertriebener Kalkülkompetenz zu mehr **Strategiekompetenz** zu kommen.

Visualisierungswerkzeug: Graphen sind leichter verfügbar und können einfacher mit anderen Darstellungen vernetzt werden.

Experimentierwerkzeug: MMS unterstützen experimentelles, eigenständiges Lernen.



Das Besondere bei der Nutzung rekursiver Modelle ist der Umstand, dass es genügt, „von einem Schritt zum nächsten zu denken“.

Diese lokale Beschreibung (des Iterationsprozesses) enthält dann implizit die globale Sicht (das gesamte „Szenario“). Die lokale Betrachtungsweise impliziert also die globale, die Sicht auf das Ganze [Lechner, 1995]

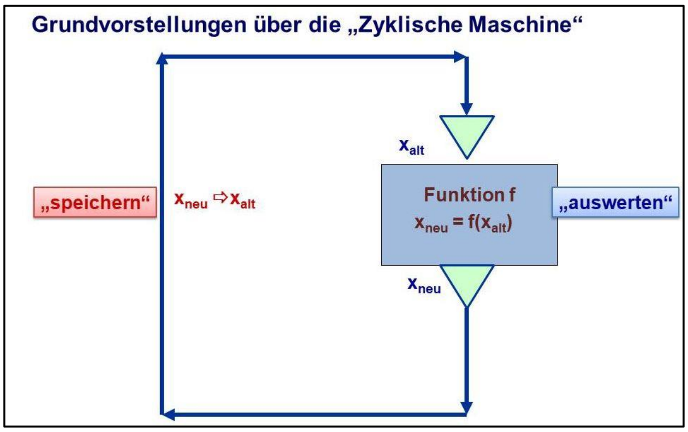
Durch Simulation erhält man die globale Lösung

In einem Vortrag mit Schwerpunkt Informatik müsste man genauer auf den Unterschied von Rekursion und Iteration eingehen. Während Iteration die Wiederholung durch Aneinanderreihung ist, ist Rekursion Wiederholung durch Schachtelung.

Für die im Mathematikunterricht behandelten Probleme ist charakteristisch, dass die Berechnung des rekursiven Modells iterativ erfolgt. Die Iteration ist dadurch gekennzeichnet, dass - ausgehend von einem Anfangszustand - durch Anwendung stets derselben Handlung (Aktion) neue Zustände entstehen und ein System dadurch eine zeitliche Entwicklung durchläuft.

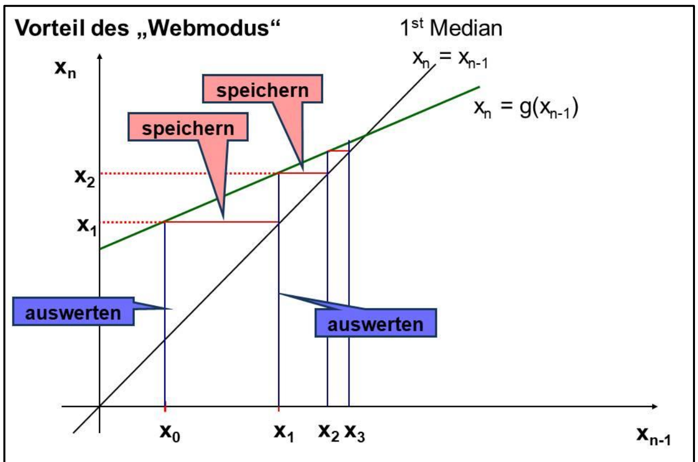
Strategiekompetenz erwerben bedeutet, dass dieser Iterationsprozess, der zur globalen Lösung führt, von den Lernenden nicht nur als Black Box erlebt wird. Der Prozess selbst sollte daher auch explizit Gegenstand des Lernprozesses werden.

Bei der Bearbeitung eines Problems mit Hilfe der Tabellenkalkulation können die zwei Phasen des iterativen Denkprozesses („auswerten“ und „speichern“) bewusst gemacht werden:



Gegeben ist ein rekursives Modell $x_{neu} = f(x_{alt}$

Setzt man den Wert x_{alt} in die Formel ein, so wird der Wert x_{neu} berechnet (Phase 1: „auswerten“). Der neue Wert ersetzt nun in diesem Zyklus den alten Wert Phase 2: („speichern“) und wird dann wieder in die Formel eingesetzt, usw.



g sei eine lineare Differenzengleichung 1. Ordnung:
y(n) = k·y(n-1) + d

Die von MMS angebotene graphische Darstellung im „Web Modus“ ($x_n = g(x_{n-1})$) bietet die Chance, diesen Ablauf zu visualisieren.

Diesen Denkprozess explizit zum Gegenstand des Lernprozesses zu machen, bedeutet **„Strategiekompetenz“** zu fördern.

Kapitel 2: Rekursive Modelle in der Sekundarstufe II

Ein großer Bereich von Wachstums- und Zerfallsproblemen wird im Schulunterricht erschlossen, wie zum Beispiel

- Beschränktes Wachstum
- Wachstum mit Störung
- Logistisches Wachstum
- Verknüpfung von Grundtypen des Wachstums
- Interagierende Systeme

Wichtige Grundlagen für das Modellieren mit Differenzengleichungen in der Sekundarstufe II sind die **„Übersetzungsregeln“ aus der Sekundarstufe I** wie zum Beispiel**:**

• „wachsen um das r-fache“ • „vermehren um 30%“ • „abnehmen um 15%“	• „direkt proportional zu“ • „relativer Anteil von“ • „absolute Änderung – relative Änderung“

Für die Untersuchung der Konvergenz der mit Hilfe digitaler Medien erhaltenen Lösungsfolgen sind auch Kompetenzen aus anderen Inhaltsbereichen wie etwa der Analysis gefragt.

2.1 Ausbreitung und Bekämpfung von Viren.

Gerade in der Corona Pandemie wurde die Frage des exponentiellen Wachstums bei der Ausbreitung der Viren vielfach diskutiert, ja sogar Politiker versuchten zu erklären, wie gefährlich exponentielle Wachstumsprozesse sind. Artikel über die Verdopplungszeit oder die Gefahr von Mutationen findet man ständig in den Medien.

Im Zuge der Corona Diskussion habe ich mich an eine Aufgabe zur Gefährlichkeit des HI-Virus erinnert. Es war für mich ein Schlüsselbeispiel, weil ich die Gefährlichkeit des Virus erst verstanden habe, als ich das mathematische Modell von Rainer Novak genutzt habe.

Das Beispiel befasst sich mit einem mathematischen Modell der Vermehrung der HI-Viren im menschlichen Körper. Es zeigt, dass der Computer es den Schülern ermöglicht, über das sehr komplexe Problem der Ausbreitung eines aggressiven Virus und der Interaktion mit resistenten Zellen nachzudenken.

Aufgabe 2: HIV und das Immunsystem - ein mathematisches Modell
[Lechner,1999]

Das mathematische Modell über den Kampf des menschlichen Immunsystems gegen das HI-Virus stammt von dem österreichischen Mathematiker und Biologen Martin A. Nowak [Nowak, 1992]. Er ist derzeit Professor an der Havard University.

Das Besondere daran ist, dass dieses mathematische Modell die Erkenntnis ausgelöst hat und erst danach durch konkrete medizinisch-molekularbiologische Untersuchungen bestätigt wurde [Lippa, 1997]

Sobald ein Virus in den Körper eindringt, und Zellen befällt, startet die körperliche Abwehr einen gezielten Angriff von mehreren Seiten. Während das Modell von Nowak die verschiedenen Abwehrmechanismen berücksichtigt, wird in dem von mir genutzten Modell als Einheit behandelt, ohne zwischen den Aktionen der verschiedenen Zelltypen zu unterscheiden.

Das Schlimme ist, dass HI-Viren deshalb so "erfolgreich" sind, weil ihre Vermehrung fehleranfällig ist. Die genetische Ausstattung der Mutationen wandelt sich unaufhörlich. Für jedes mutierte Virus muss das Immunsystem neue spezifische resistente Abwehrzellen schaffen, die nur diese spezielle Art des Virus bekämpfen können. **Die resistenten Abwehrzellen fungieren als Spezialisten**. Im Gegensatz dazu können alle mutierenden Viren alle Arten von resistenten Zellen gegen HIV zerstören oder zumindest deren Funktion beeinträchtigen. **Viren arbeiten als Generalisten**.

Wird eine bestimmte Anzahl von Viren überschritten, verliert das Immunsystem schließlich die Kontrolle über sie und AIDS bricht aus. Auf diese Weise nimmt die Zahl der Viruszellen stark zu, während die Zahl der Immunzellen drastisch abnimmt.

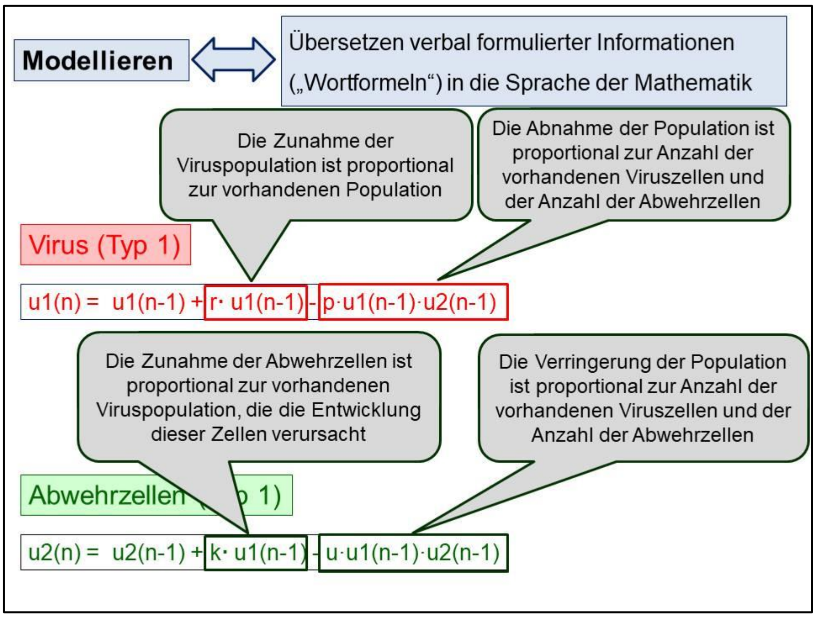
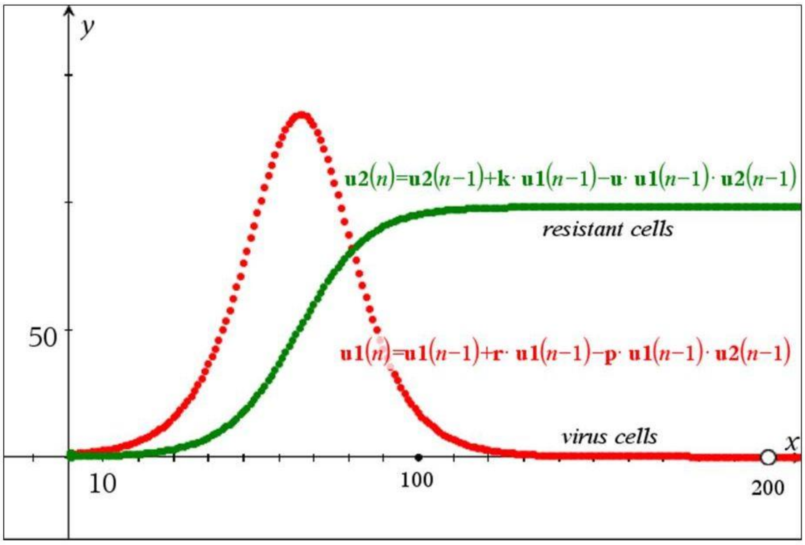
Die Simulation mit Hilfe von Technologie ermöglicht eine Reflexion und Diskussion der realen Situation.

Realisierung der HIV-Simulation mit TI-Nspire CX CAS

Nach den Untersuchungen von R. Novak [Novak, 1992] sind die folgenden Parameter realistisch:

Die Vermehrungsrate des Virus	r = 0.1
Die Effizienz der Abwehrzellen bei ihrem Kampf gegen die Viren	p = 0.002
Der Proportionalitätsfaktor, der die Vermehrung der Abwehrzellen beschreibt. Sie entstehen als Reaktion des Körpers auf eine Mutation des Virus.	k = 0.02
Der Faktor, der die Aggressivität der Viren bei ihrem Kampf gegen Abwehrzellen charakterisiert	u = 0.00004
Ein Zeitschritt entspricht 0,005 Jahren (d. h. 200 Schritte beschreiben ein Jahr).	

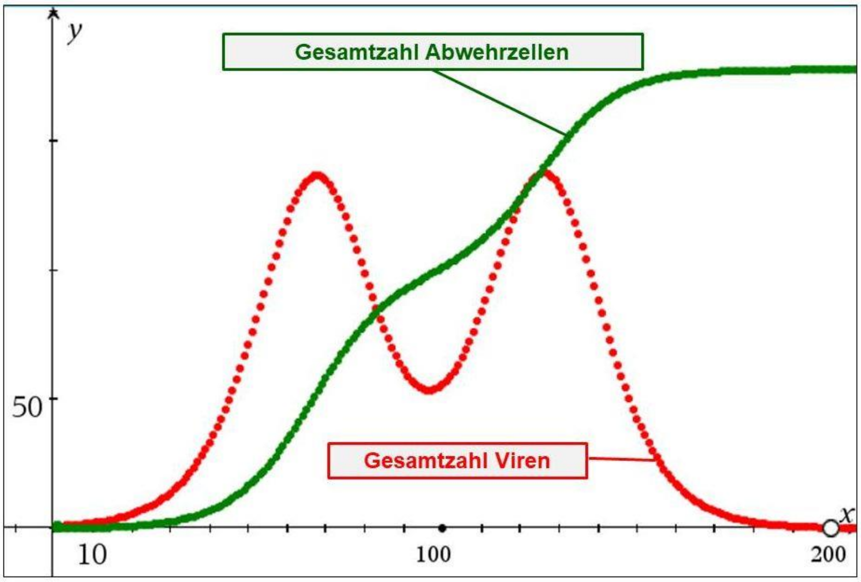
Schritt 1: 1 Mutant ist aktiv

	
	Tritt nur ein Mutant auf, sind die Abwehrzellen erfolgreich.

Schritt 2: Auch die Modellierung mit 2 Mutanten des Virus ist im Unterricht noch möglich.

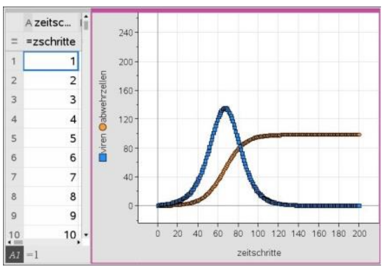
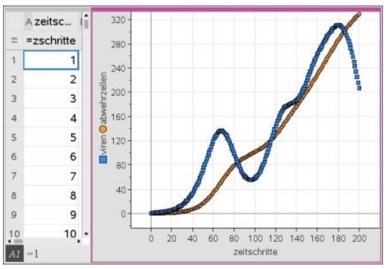
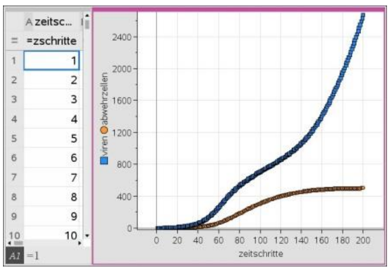
Virus (Typ 1)	u1(n) = u1(n-1) + r·u1(n-1) - p·u1(n-1)·u2(n-1) Starting value ui1 = 1
Abwehrzellen (Typ 1)	u2(n) = u2(n-1) + k·u1(n-1) - u·u5(n-1)·u2(n-1) Staring value ui2 = 0
Virus (Typ 2) (Start 60 Z.E. später)	u3(n) = when(n=60,1, u3(n) = u3(n-1) + r·u3(n-1) - p·u3(n-1) ·u4(n-1) Starting value ui3 = 0
Abwehrzellen (Typ 2)	u4(n) = u4(n-1) + k·u3(n-1) - u·u5(n-1) ·u4(n-1) Starting value ui4 = 0
Virus Gesamtzahl	u5(n) = u1(n-1) + u3(n-1) Starting value ui5 = 1
Abwehrzellen Gesamtzahl	u6(n) = u2(n-1) + u4(n-1) Starting value ui6 = 0

Während die Abnahme der Viruszellen des Typs 1 nur proportional zur Anzahl jener Abwehrzellen ist, die durch diesen Mutanten erzeugt wurden (u2(n-1)), ist die Abnahme der Abwehrzellen proportional zur Gesamtzahl aller existierenden Viren (u5(n-1)).



Der Kampf ist hart, aber noch gewinnen die Abwehrzellen.

Schritt 3: Für mehrere Mutanten hat Josef Lechner ein Programm für den TI Nspire CAS geschrieben:

1 Mutant: Die Abwehrzellen gewinnen. 	5 Mutanten: Ein harter Kampf aber die Abehrzellen gewinnen. 	12 Mutanten: Die Abwehrzellen haben keine Chance. AIDS bricht aus 

2.2 Rekursive Verfahren zur Approximation reeller Zahlen

Die Zahlenbereiche $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ finden sich natürlich in allen Lehrplänen. Aber es genügt nicht, in diesen Zahlenmengen zu operieren. Wichtig wäre, die Erweiterung der Zahlenbereiche bewusst zu machen, also zu erleben, warum und wie eine neue Zahlenmenge entsteht.

Eine Testfrage an meine Lehrerstudenten war immer: Was ist $\sqrt{2}$? War die Antwort: „Das ist jene Zahl, die quadriert 2 ergibt“, war meine Antwort: „Sie haben jetzt ein Geständnis abgelegt, dass sie die Gleichung $x^2 = 2$ nicht lösen können.“

Eine gute Deutung der irrationalen Zahlen, die auch die Idee der Erweiterung von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ mit einbezieht, ist folgende:

> *Der Schritt zur irrationalen Zahl besteht darin, dass man die Möglichkeit, sich dieser Zahl beliebig zu nähern, zur Zahl erklärt.* (Roland Fischer)

Technologie bietet für die Schülerinnen und Schüler durch Nutzen rekursiver Verfahren interessante Möglichkeiten, die Idee dieser Definition auch zu erleben.

Aufgabe 3: Zwei rekursive Modelle zur Approximation von $\sqrt[k]{a}$

Es sollen zwei rekursive Verfahren zur Approximation von $\sqrt[k]{a}$ bezüglich ihrer Konvergenz untersucht werden. Die Quelle ist ein „Mathe Brief (Nr. 33)“ der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (OEMG), der Autor ist Prof. Fritz Schweiger. In diesem Artikel wird die Konvergenz der folgenden Verfahren „klassisch“ untersucht (Monotonie, Beschränktheit) [Schweiger, 2013]:

Verfahren 1: $x_n = \frac{1}{2} \cdot \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{\;k-1}} \right)$ **Verfahren 2**: $x_n = \frac{1}{k} \cdot \left((k-1) \cdot x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{\;k-1}} \right)$

Wir wollen die Konvergenz mit Hilfe der Technologie in zwei Schritten untersuchen.

Schritt 1: Experimentieren im Graphikfenster, finden einer Vermutung.

Schritt 2: Nutzen des Fixpunktsatzes, Beweis mit Hilfe von CAS.

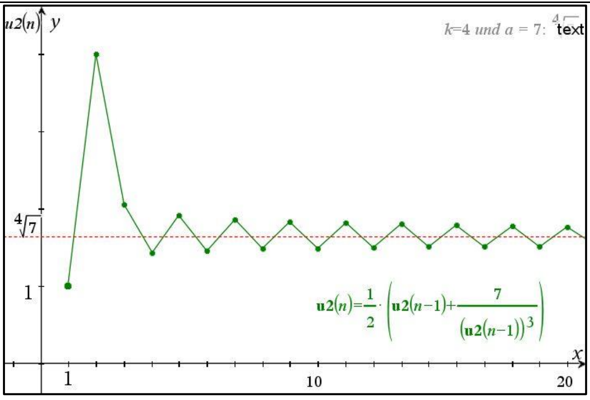
Schritt 1: Experimentieren im Graphikfenster, finden einer Vermutung

Technologie bietet in der Regel zwei Darstellungsmöglichkeiten an:

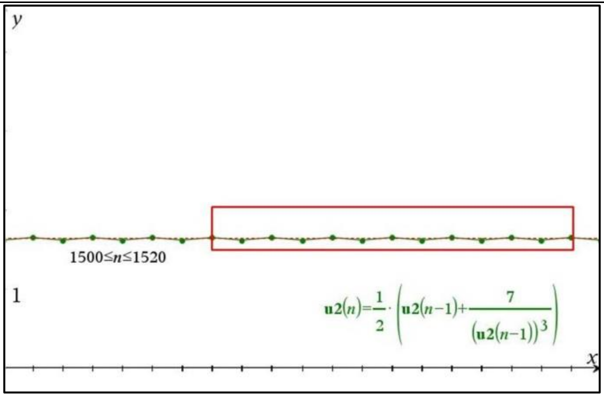
„Time–Modus“: $x_n = f(n)$ und „Web-Modus“: $x_n = g(x_{n-1})$

Wählen wir als Beispiel für k = 4 und a = 7 und untersuchen also die Konvergenz der Folge des Modells 1 für $\sqrt[4]{7}$

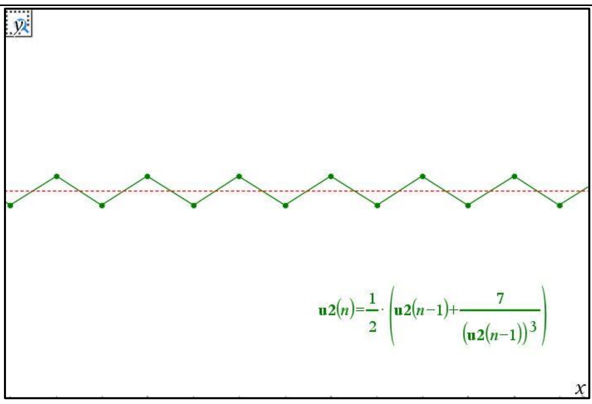
Untersuchung im „Time Modus“: u(n) = f(n)



Das sieht doch „konvergent“ aus. Aber das sind ja nur die ersten 20 Elemente. Untersuchen wir das Intervall [1500, 1520]:



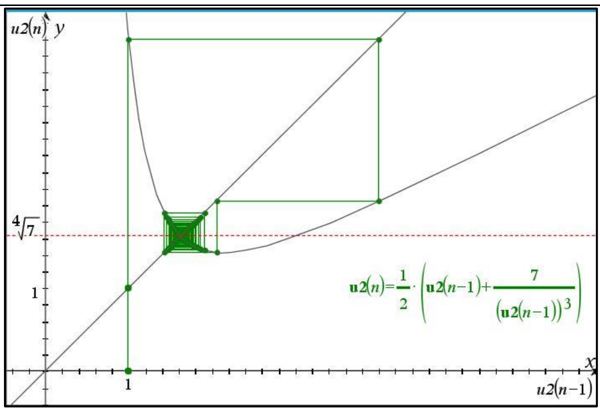
Schaut gut aus, aber man ist ja misstrauisch. Wir nutzen die „Zoom“-Funktion des Werkzeugs und vergrößern den roten Bildausschnitt:



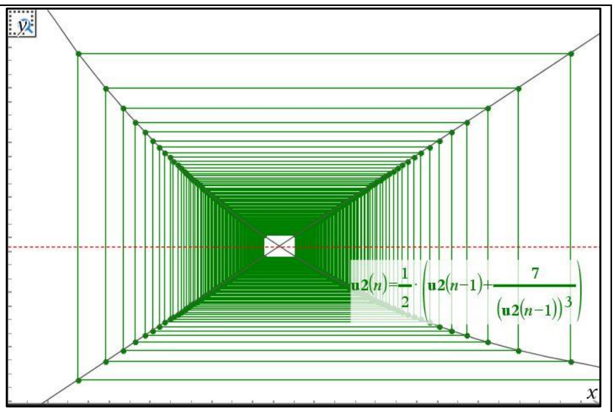
Das Bild zeigt, dass eine Sicherheit bezüglich der Konveregenz dieser rekursiven Folge nicht gegeben ist.

Aber vielleicht bringt die Graphik im „Web Modus“ mehr Sicherheit

Untersuchung im „Web Modus“: u(n) = g(u(n-1))



Sieht „konvergent“ aus, aber wir nutzen doch wieder die „Zoom“ Funktion.

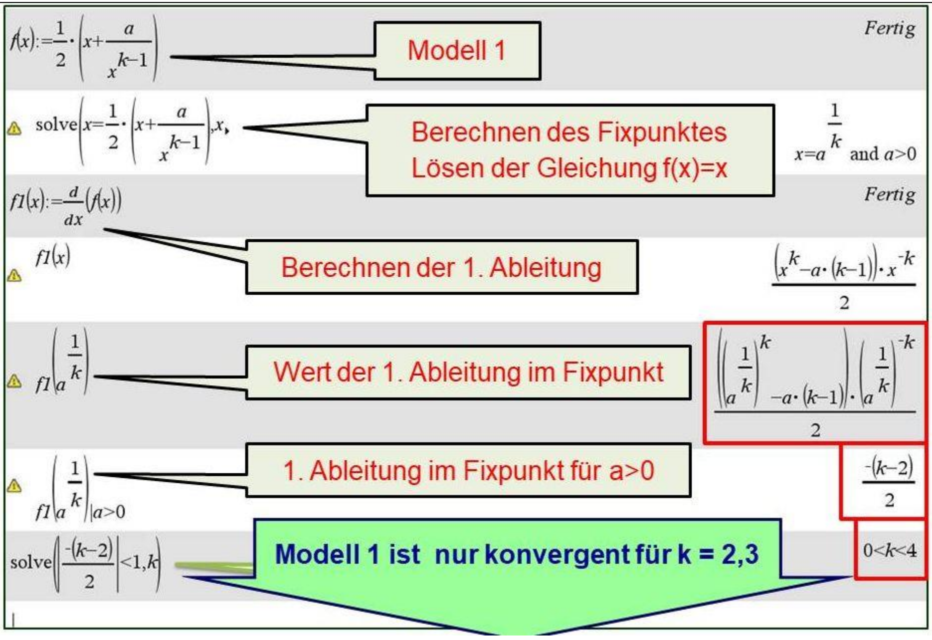


Das „Loch“ in der Mitte lässt keinen Schluss bezüglich Konvergenz zu.

Daher übersiedeln wir in das CAS Werkzeug und versuchen einen Konvergenzbeweis.

Schritt 2: Nutzen des Fixpunktsatzes, exakter Beweis der Konvergenz [Dorninger, 1988]

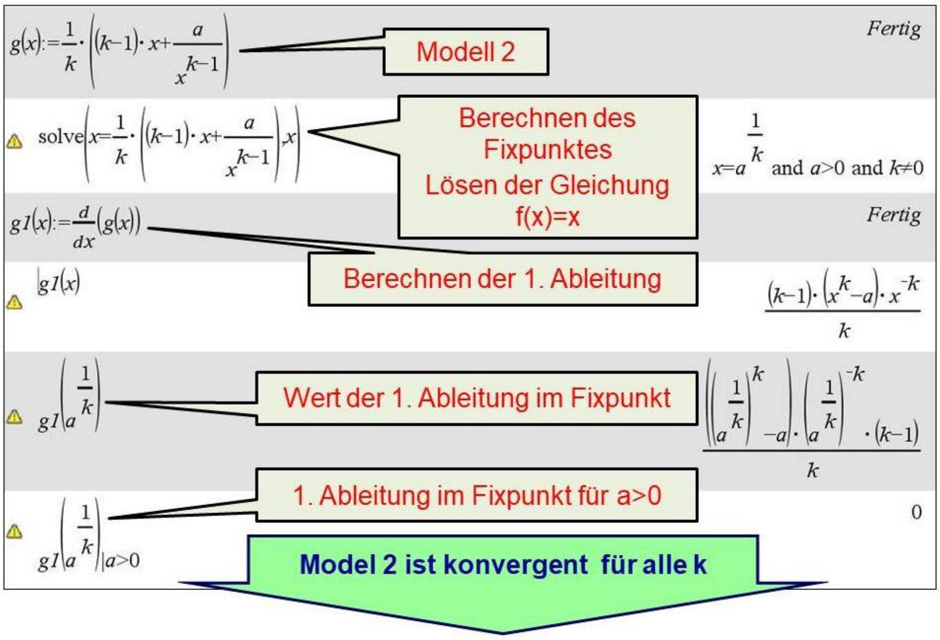
Fixpunktsatz: Es sei eine Funktion f im Fixpunkt x* differenzierbar. Dann ist der Fixpunkt x* **anziehend** für $|f'(x^*)|<1$ und **abstoßend** für $|f'(x^*)|>1$ (Im Fall $|f'(x^*)|=1$ kann keine allgemeingültige Aussage gemacht werden.)



Das erste Ergebnis des Wertes der 1. Ableitung im Fixpunkt ist nicht brauchbar.

Aber man könnte sich daran erinnern dass $\sqrt[k]{a}$ nur für a>0 definiert ist.

Dann kommt man zu einem brauchbaren Ergebnis.



Dieselbe Untersuchung für das Modell 2:

Ergebnis für Verfahren 1:

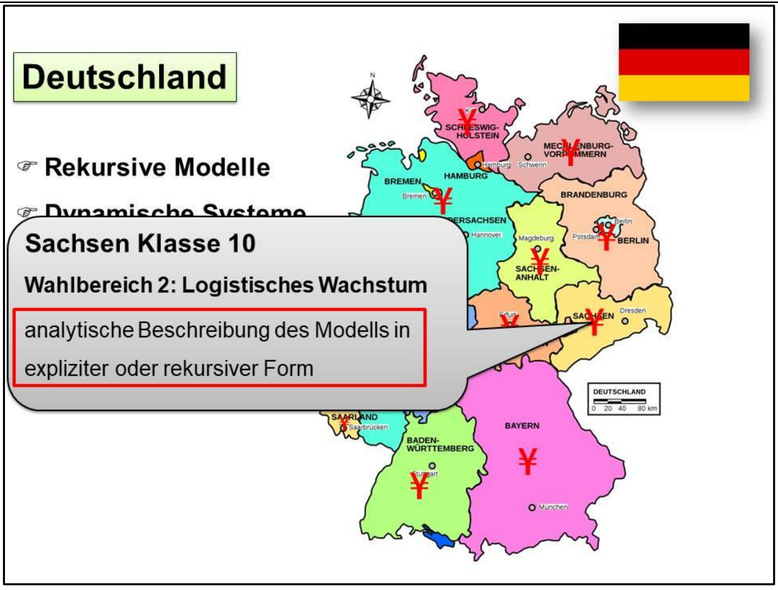
Der Betrag der 1. Ableitung an der Stelle des Fixpunktes ist kleiner 1 für k = 1,2,3. Daher konvergiert die Lösungsfolge des rekursiven Verfahrens 1 nur für k = 2 und k = 3. Für k = 4,5,… ist die Folge nicht konvergent.

Ergebnis für Verfahren 2:

Der Betrag der 1. Ableitung an der Stelle des Fixpunktes ist stets 0. Daher konvergiert die Lösungsfolge des rekursiven Verfahrens für alle $k \in \mathbb{N}$.

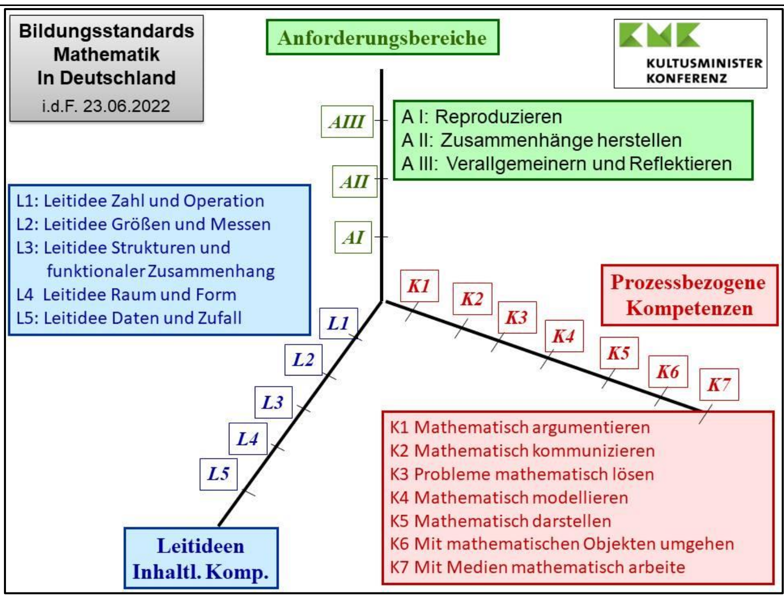
Kapitel 3: Ein Blick in Lehrpläne und Zusammenfassung

3.1 Die Situation in Deutschland



In fast keinem Lehrplan eines deutschen Bundeslandes findet man bei den Inhaltsbereichen das Thema „Nutzen rekursiver Modelle“.

Ein positives Beispiel ist der Lehrplan von Sachsen, wo wenigstens im Wahlbereich dieser Inhalt angesprochen wird.



Erfreulicher Weise findet man bei den Bildungsstandards in der Fassung vom 23.06.2022 KMK, 2022] einen Bildungsauftrag bezüglich der Nutzung rekursiver Modelle mit Hilfe von Technologie.

Das Thema in den Bildungsstandards:

K4 Mathematisch Modellieren

Typische Teilschritte des Modellierens sind das **Strukturieren** und Vereinfachen gegebener Realsituationen, das **Übersetzen** realer Gegebenheiten in mathematische Modelle, das Arbeiten im mathematischen Modell, das **Interpretieren** mathematischer Ergebnisse in Bezug auf Realsituationen und das **Überprüfen** von Ergebnissen sowie des Modells im Hinblick auf Stimmigkeit und Angemessenheit bezogen auf die Realsituation.

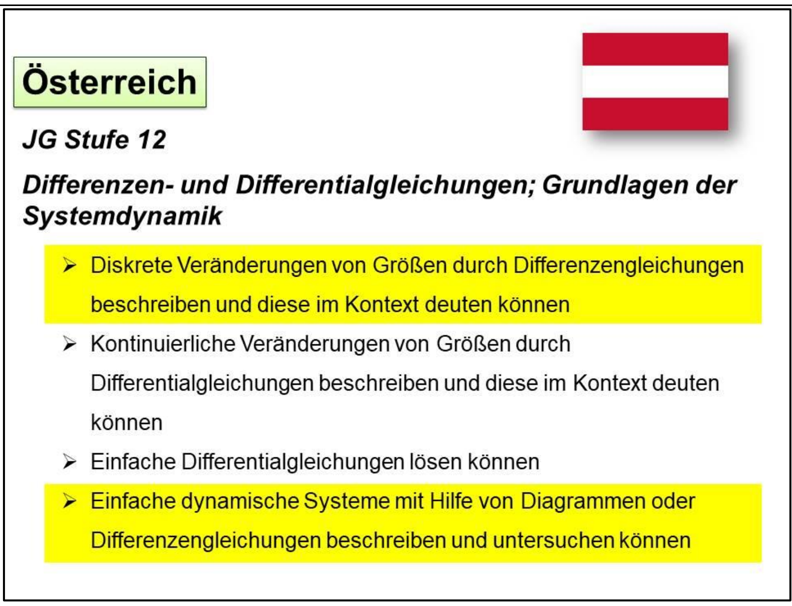
L3 Leitidee Strukturen und funktionaler Zusammenhang

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen die **Prozentrechnung bei Wachstumsprozessen** (beispielsweise bei der Zinsrechnung), auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge
- erkennen und verwenden funktionale Zusammenhänge und stellen diese in **verschiedenen Repräsentationen** dar (sprachlich, tabellarisch, grafisch, algebraisch) und können zwischen diesen Darstellungsformen wechseln, **auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge**

Man fragt sich, wonach sollen sich Lehrerinnen und Lehrer orientieren, wenn im Lehrplan und in den Bildungsstandards so unterschiedliche Bildungsaufträge formuliert sind? Würde man den Bildungsstandards entsprechend mit Hilfe digitaler Werkzeuge Aufgaben wie die mit dem Bausparkredit im Unterricht behandeln, wäre das ein Verstoß gegen den Lehrplan?

3.2 Die Situation in Österreich

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>
In Österreich findet man im Lehrplan einen klaren Auftrag zur Beschäftigung mit rekursiven Modellen.

Im Unterricht orientiert man sich leider seit der Einführung der Zentralmatura an den Grundkompetenzlisten des Maturakonzeptes („Was nicht geprüft wird, das wird auch nicht unterrichtet“).
</td>
</tr>
<tr>
<td>


Bis jetzt gültig:

Inhaltsbereich Analysis:

Das systemdynamische Verhalten von Größen durch Differenzengleichungen beschreiben bzw. diese im Kontext deuten können.
</td>
<td>
Leider wurde in der neuen Überarbeitung der Grundkompetenzliste genau diese Grundkompetenz gestrichen.

Aber auch bisher spielt diese Kompetenz eine geringe Rolle.
</td>
</tr>
</table>

3.3 Zusammenfassung

In der bildungstheoretischen Orientierung des österreichischen Maturakonzeptes [IDM, 2009] findet man folgende Charakterisierung der Rolle der Mathematik im Bildungskanon:

> *Mathematik ist ein möglicher Modus der Weltbegegnung, eine spezifische Brille, die Welt um sich herum zu sehen bzw. zu modellieren. Sie tut dies als Darstellungsform und als Denktechnologie.*

Rekursive Modelle sind so eine spezifische Brille, mit der wir Bereiche in der Welt um uns herum und auch in der Welt der Mathematik besser betrachten können. Wir sollten diese Brille im Unterricht aufsetzen. Dann entspricht der Ertrag des Lernprozesses der von Bruno Buchberger stammenden Definition von Mathematik:

> ***Mathematik ist die über Jahrhunderte entwickelte Technik des Problemlösens durch Schließen***

Mit der bei diesem Lernprozess erworbenen Strategiekompetenz leistet das Fach Mathematik einen wichtigen Beitrag zur allgemeinen Problemlösekompetenz.

Quellen

Aumayr, G., Heugl, H., 2015: T3 (Teachers Teaching with Technology) Österreich: Materialien für den Unterricht http://www.t3oesterreich.at/index.php?id=227

BMB (Bundesministerium für Bildung), 2016: Lehrpläne der AHS Oberstufe, aktuelle Fassung vom 14. August 2016 https://www.ris.bka.gv.at/GeltendeFassung.wxe?Abfrage=Bundesnormen&Gesetzesnummer=10008568

Dorninger, D., Karigl, G., 1988: „Mathematik für Wirtschaftsinformatiker“ Band II, S. 7. Springer-Verlag Wien New York. ISBN 3-211-82107-4

Heugl, H. (2008): “Sustainability of mathematics education by using technology demonstrated with the topic of exponential growth. Lecture at the conference TIME 2008 in Pretoria. http://www.acdca.ac.at/acdca/konferenzen/south-africa-2008.html

Heugl, H., 2014: „Mathematikunterricht mit Technologie – ein didaktisches Handbuch mit einer Vielzahl von Aufgaben“. Veritas-Verlag, Linz. ISBN 978-3-7101-0431-2

Heugl, H., 2015: „Iterationsverfahren zur Approximation irrationaler Zahlen“. TI-Unterrichtsmaterialien für Mathematik und Naturwissenschaften. http://www.ti-unterrichtsmaterialien.net/

IDM, 2009: „Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik“. https://www.aau.at/wp-content/uploads/2017/10/sRP-M_September_2009-2.pdf IDM – Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Klagenfurt

KMK, 2022: „ Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)“. https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf

Lechner, J., 1995: “Rekursion- Iteration: Ein Begriffspaar (auch) für den Mathematikunterricht“. Beitrag im Bericht der 13. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematik und Informatik „ der GDM in Wolfenbüttel 1005 (H. Hischer und M. Weiß Hrsg.)

Lechner, J., 1999: “HIV and the Immune System - A Mathematical Model” Lecture at the ACDCA conference in Gösing, Austria. Proceedings: http://www.acdca.ac.at/kongress/goesing/g_lechner.htm

Lechne,J., 2022: Programm zur Simulation der Bekämpfung von HI Viren durch Abwehrzellen.

Lippa, M., 1997: HIV und Immunsystem - ein mathematisches Modell und seine Realisierung mit EXCEL, MNU 50/5, 295-301

Novak, M.A., 1992: Variability of HIV infections. Journal of Theoretical Biology 155, 1-20

Schweiger, F., 2013: „Babylonisches Wurzelziehen“. Mathe-Brief Nr. 33 der ÖMG (Österreichische Mathematische Gesellschaft) http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief/mbrief33.pdf