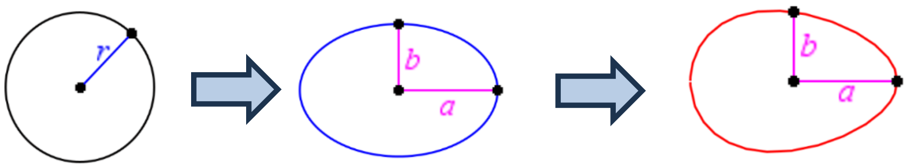
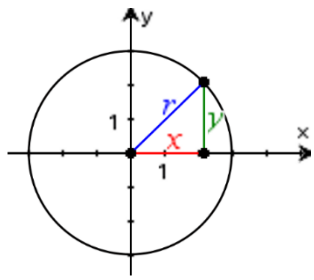
Mathematische Betrachtungen zum Ei

Durch spielerisches Variieren von Parametern kann man vom Kreis über die Ellipse zur Ei-Linie gelangen bzw. zu Gleichungen, die diese Kurven mathematisch modellieren. Dabei lässt sich interessante Mathematik entdecken und anwenden. Unter anderem kann die Berechnung der Volumina von Kugel, Ellipsoid und Ei eine Rolle spielen. Alle notwendigen Rechnungen werden händisch oder mit dem einfachen wissenschaftlichen Taschenrechner TI-30X Prio MathPrint™ durchgeführt.

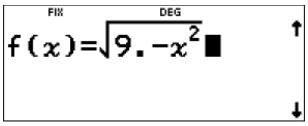


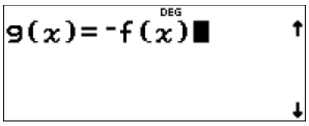
Kreis

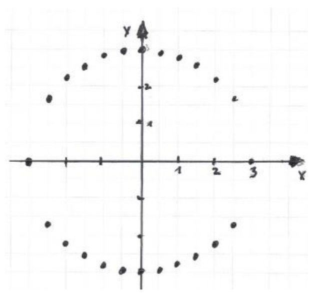


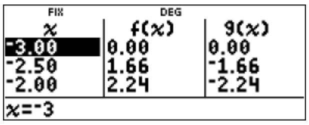
Die Kreisgleichung $\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$ lässt sich mit dem Satz des Pythagoras leicht begründen. Um einen Kreis als Graph zweier Wurzelfunktionen grafisch darzustellen, wird die Kreisgleichung umgestellt: $y_1 = \sqrt{r^2 - x^2}$ und $y_2 = -y_1$

Um auf diese Weise Punkte eines Kreises mit dem Radius $r = 3\ LE$ mit dem TI-30X Prio MathPrint zu erzeugen, wird die Anwendung table aktiviert und eine Wertetabelle berechnet. Unter mode wird die Anzahl der Nachkommastellen auf FLOAT 2 eingestellt.









x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
f(x)	0,00	1,66	2,24	2,60	2,83	2,96	3,00	2,96	2,83	2,60	2,24	1,66	0,00

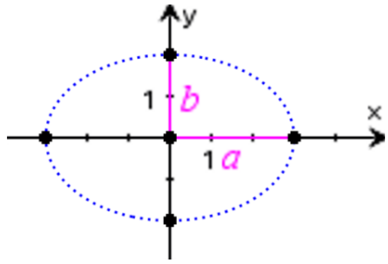
Die Wertetabelle wird zum Skizzieren der Kreisfigur genutzt. Die Punkte zu g(x) sind durch Spiegelung der Punkte von f(x) an der x-Achse ebenfalls leicht einzutragen.

Die Gleichung zur Berechnung des Flächeninhaltes eines Kreises $A = \pi \cdot r^2$ ist aus der Mittelstufe bekannt.

Für eine Betrachtung der Zusammenhänge in der gymnasialen Oberstufe bietet sich hier an, die Formel für das Volumen einer Kugel als Rotationskörper mithilfe der Integralrechnung herzuleiten.

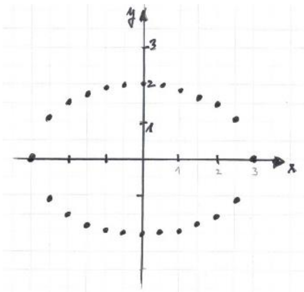
$$V = 2 \cdot \pi \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = 2 \cdot \pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2 \cdot \pi \cdot \left[r^2 \cdot x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2 \cdot \pi \cdot \frac{2}{3} r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Ellipse

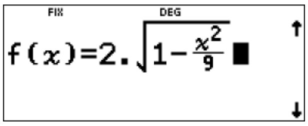


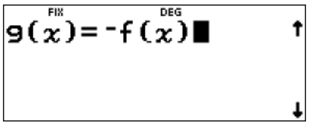
Die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ soll variiert werden. Nach Division durch r^2 ergibt sich $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$. Man überlege sich z. B., welche Auswirkungen es hat, wenn in den Nennern nicht r^2 steht, sondern zwei verschiedene Quadratzahlen auftauchen, also eine Gleichung der Form
$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$vorliegt.
Leicht erkennbar sind die Koordinaten der Punkte, die man erhält, wenn x = 0 oder y = 0 ist. Das ergibt bereits die Haupt- und Nebenscheitelpunkte einer Ellipse. Die Verwandtschaft mit der Kreisgleichung lässt auch eine Vermutung über die symmetrische Form der zu erwartenden Figur zu, beispielsweise als ein „in y-Richtung gestauchter Kreis“, falls a > b ist.

Durch Umstellen der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ergeben sich wie beim Kreis zwei Funktionsgleichungen $y_1 = \sqrt{b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ und $y_2 = -y_1$.



Für die erste Gleichung wird mit dem WTR wieder eine Wertetabelle berechnet. Die Funktionen werden in analoger Weise wie beim Kreis gezeichnet.
Achsen: $a = 3\ LE$; $b = 2\ LE$





x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
f(x)	0,00	1,11	1,49	1,73	1,89	1,97	2,00	1,97	1,89	1,73	1,49	1,11	0,00

Ausgehend von der Kreisfläche mit $A = \pi r^2 = \pi \cdot r \cdot r$ kann durch Ersetzen von r durch a bzw. b eine Formel für die Berechnung des Flächeninhalts der Ellipse mit $A = \pi \cdot a \cdot b$ vermutet werden.

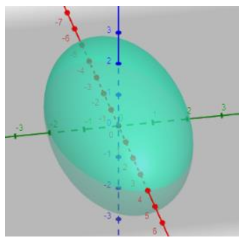
Volumen eines Ellipsoiden bei Rotation einer Ellipse um die x-Achse:

Vermutung durch Vergleich mit dem Kugelvolumen: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot a \cdot b^2$ oder $V = \frac{4}{3}\pi \cdot a^2 \cdot b$?

$$V = 2\pi \int_0^a \left(b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2 dx = 2\,\pi \cdot b^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 2\pi \cdot b^2 \cdot \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = 2\pi \cdot b^2 \cdot \left(a - \frac{a}{3}\right)$$

$V = \frac{4}{3}\pi \cdot a \cdot b^2$

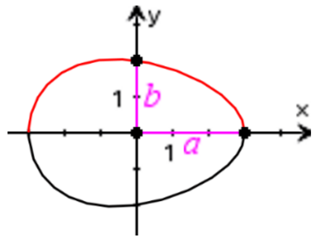
Dass die Länge der Achse b quadriert wird, lässt sich dadurch erklären, dass die Achse b bei Rotation der Ellipse um die x-Achse die Dimension des Körpers zweimal bestimmt, in Höhen- und Breitenausdehnung.[1]



(Quelle: privat)

Ei-Linie

Eine Ei-Linie kann man sich aus einer Ellipse entstanden denken, wenn die y-Werte auf einer Seite vom Ursprung mit größer werdendem Abstand zum Ursprung immer kleiner werden und schließlich bei null enden. Die y-Werte auf der anderen Seite vom Ursprung werden mit wachsender Entfernung zum Ursprung zunächst größer, um dann nach Erreichen eines lokalen Maximums wieder kleiner zu werden und schließlich die x-Achse erreichen.

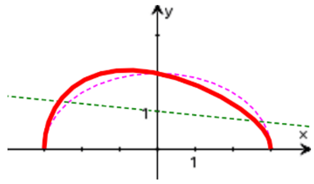


Dies könnte gelingen, wenn die von der Ellipse bekannte Funktion $y_1 = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ mit einer Funktion $\varphi(x)$ multipliziert wird, die eben diese Veränderungen leistet:

$y_1 = \varphi(x) \cdot b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. (vgl. KÖLLER).

Die Funktion y_2 wird wieder durch Spiegelung von y_1 an der x-Achse erzeugt: $y_2 = -y_1$

Für eine solche Funktion $\varphi(x)$ gibt es viele Möglichkeiten, bei denen die Schülerinnen und Schüler auf ihre Kenntnisse über Funktionen zurückgreifen müssen. Schon eine nicht allzu stark fallende lineare Funktion $\varphi(x) = 1 - m \cdot x$ mit 0 < m < 1 könnte das leisten. Es kommt zu einer Überlagerung einer linearen Funktion mit der Wurzelfunktion, die den oberen Bogen der Ellipse beschreibt. Bei geeigneter Wahl von $\varphi(x)$ kann sich eine Kurve ergeben, die zusammen mit $y_2(x) = -y_1(x)$ wie eine Ei-Linie aussieht.



Wir bleiben hier bei $a = 3\ LE$; $b = 2\ LE$. Für die Funktion $\varphi(x)$ wählen wir $\varphi(x) = 1 - 0{,}1x$.

Es folgt $y_1 = (1 - 0{,}1x) \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} = \left(2 - \frac{x}{5}\right) \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ und $y_2 = -y_1$.

Bevor nun eine Wertetabelle erstellt wird, lohnt es sich, anhand des Funktionsterms Vermutungen über den Verlauf des Graphen zu finden.

Die Funktion $h(x) = 2 - \frac{x}{5}$ ist streng monoton fallend und es ist $h(0) = 2$.

Für $0 < x < 3$ ist $h(x) = 2 - \frac{x}{5}$ kleiner als 2, sodass die Funktionswerte von y_1 in diesem Intervall ebenfalls monoton fallend und kleiner als bei der zugrunde gelegten Ellipse sind.

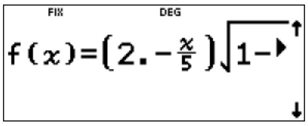
Für x = 3 hat y_1 den Funktionswert 0.

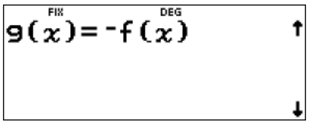
Für $-3 \leq x < 0$ ist $2 - \frac{x}{5}$ größer als 2, sodass die Funktionswerte von y_1 in einem Teilintervall größer als bei dem zugrunde gelegten Ellipsenbogen sind. Wenn dann aber der Faktor $\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ gegen Null geht, wird auch das Produkt $\left(2 - \frac{x}{5}\right) \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ gegen Null gehen.

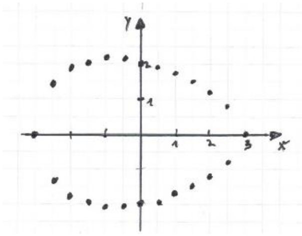
(Ein Beispiel für **die Macht der Null**.)

Die Funktion $y_1 = \left(2 - \frac{x}{5}\right) \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ hat also die Nullstellen x = - 3 und x = 3, bei x = 0 den Wert 2 und im Intervall-3 < x < 0 einen lokalen Hochpunkt.

Wertetabelle und Graph:

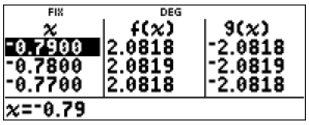






x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
f(x)	0,00	1,38	1,79	1,99	2.07	2.07	2,00	1,87	1,70	1,47	1,19	0,83	0,00

Hinweis:
Durch Verfeinerung der Schrittweite lässt sich auch der Ort des lokalen Extremums von y_1 weiter eingrenzen. Allerdings muss dazu unter $\boxed{\text{mode}}$ die Anzahl angezeigter Ziffern vergrößert werden.



Das lokale Maximum von y_1 liegt im Intervall (-0,79; -0,77).

Erfolgt die Untersuchung des Sachverhaltes in der gymnasialen Oberstufe, kann das lokale Maximum auch mit den Mitteln der Differentialrechnung bestimmt werden.

$$y_1 = f(x) = \left(2 - \frac{x}{5}\right) \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$$

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} + \left(2 - \frac{x}{5}\right) \cdot \frac{-\frac{2}{9}x}{2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}} = \frac{\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{9}\right) - \frac{1}{9} \cdot x \cdot \left(2 - \frac{x}{5}\right)}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}}$$

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{5} + \frac{x^2}{45} - \frac{2}{9}x + \frac{x^2}{45}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}} = \frac{\frac{2x^2}{45} - \frac{2}{9}x - \frac{1}{5}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}}$$

Die Nullstellen der Zählerfunktion werden berechnet:

$$\frac{2x^2}{45} - \frac{2}{9}x - \frac{1}{5} = 0$$

$$x^2 - \frac{2 \cdot 45}{9 \cdot 2}x - \frac{1 \cdot 45}{5 \cdot 2} = 0$$

$$x^2 - 5x - \frac{9}{2} = 0$$

$x_{1;2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{18}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{43}}{2}$, also $x_1 \approx 5{,}779$ (entfällt, da größer als 3) und $x_1 \approx -0{,}779$

Lokales Maximum: $f(-0{,}779) \approx 2{,}082$

Auf die Untersuchung der hinreichenden Bedingung kann verzichtet werden, da die Wertetabelle die Existenz des lokalen Maximums bei x = - 0,78 nahelegt.

Eivolumen:
Das Volumen des Eikörpers kann als Rotationsvolumen mit dem bestimmten Integral berechnet werden:

$$V = \pi \cdot \int_{-a}^{a} \left((1 - m \cdot x) \cdot b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right)^2 dx = \pi \cdot \int_{-a}^{a} \left((1 - m \cdot x)^2 \cdot b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \right) dx$$

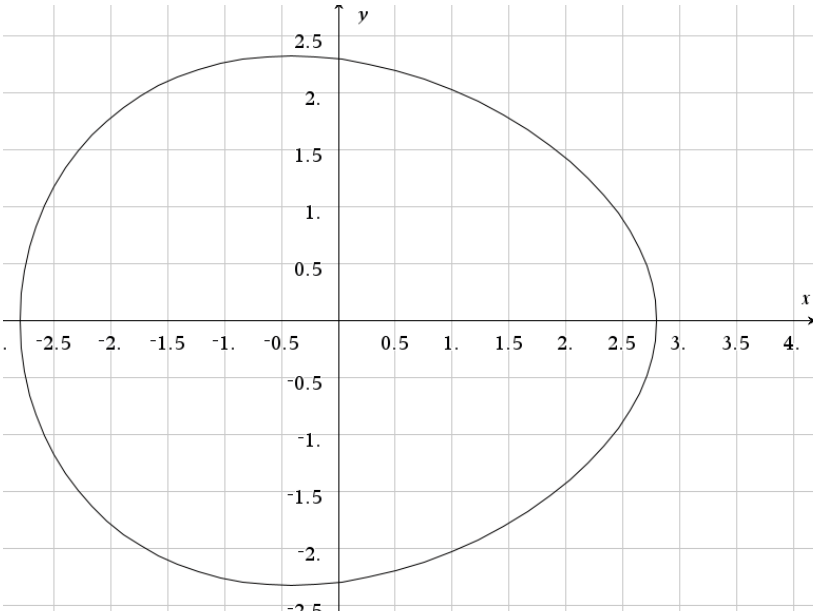
$$V = b^2 \cdot \pi \cdot \int_{-a}^{a} \left(-\frac{m^2}{a^2} \cdot x^4 + \frac{2m}{a^2} \cdot x^3 - \frac{1}{a^2} \cdot x^2 + m^2 \cdot x^2 - 2m \cdot x + 1 \right) dx$$

$$V = \frac{4}{3} a \cdot b^2 \cdot \pi \cdot \left(1 + \frac{1}{5} m^2 \cdot a^2\right)$$

Anwendung:
Die Abbildung zeigt - etwas vergrößert - den Umriss eines Eies.

(Quelle:privat)

a) Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Ei-Linie als mathematisches Modell.
b) Erstellen Sie eine Wertetabelle dieser Funktion und zeichnen Sie die berechneten Punkte in die Abbildung ein.
c) Berechnen Sie das Eivolumen.
d) Anregung für ein Hausexperiment:
   Messen Sie für ein hartgekochtes Ei das Volumen durch Messung des verdrängten Wasservolumens nach Eintauchen in Wasser.
   Halbieren Sie das hartgekochte Ei entlang seiner Längsachse.
   Markieren Sie seinen Umriss auf kariertem Papier oder Millimeterpapier.
   Führen Sie ein Koordinatensystem ein.
   Berechnen Sie eine Gleichung der Umrisslinie und prüfen Sie, ob die damit berechneten Punkt auf der Umrisslinie liegen.
   Berechnen Sie das Volumen.
   Vergleichen Sie des Ergebnis mit dem anfangs durch Messung ermittelten Volumen.



Hinweise zur Lösung:

a) Ablesen lassen sich auf den Koordinatenachsen die Längen der Hauptachse zu $a \approx 2{,}8\ LE$, der Nebenachse mit $b \approx 2{,}3\ LE$. Die Koordinaten eines weiteren Punktes, z.B. P(0,5|2,2), werden zur Berechnung von m in der Gleichung der Ei-Linie benötigt.
Die Randkurve hat bei x = 0,5 den Funktionswert von ca. 2,2.
Einsetzen der Werte von a und b sowie der Koordinaten von P in die Gleichung

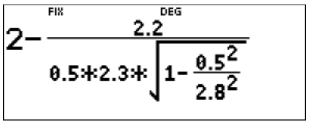
$y_1(x) = (1 - m \cdot x) \cdot b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$:

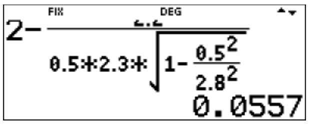
$2{,}2 = (1 - m \cdot 0{,}5) \cdot 2{,}3 \cdot \sqrt{1 - \frac{0{,}5^2}{2{,}8^2}}$ und m ausrechnen:

$$\frac{2{,}2}{2{,}3 \cdot \sqrt{1 - \frac{0{,}5^2}{2{,}8^2}}} = 1 - 0{,}5m$$

$$m = 2 - \frac{2{,}2}{0{,}5 \cdot 2{,}3 \cdot \sqrt{1 - \frac{0{,}5^2}{2{,}8^2}}}$$

$m \approx 0{,}0557$

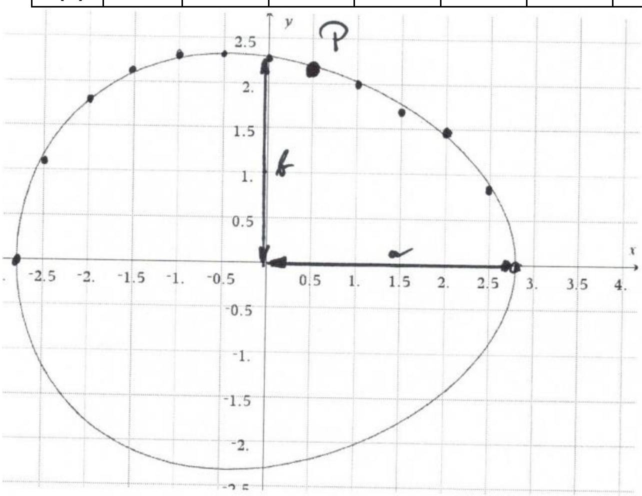


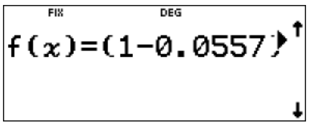


Also könnte $y_1(x) = (1 - 0{,}0557 \cdot x) \cdot 2{,}3 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{2{,}8^2}}$ eine Näherung für die Gleichung der Ei-Linie sein.

b) Wertetabelle und Zeichnung.

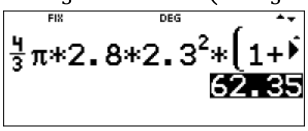
x	-2,8	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	2,8
f(x)	0	1,18	1,79	2,10	2,27	2,33	2,3	2,20	2,03	1,78	1,43	0,89	0





c) Volumenberechnung (siehe Seite 4 unten):

$V = \frac{4}{3} a \cdot b^2 \cdot \pi \cdot \left(1 + \frac{1}{5} m^2 \cdot a^2\right) = \frac{4}{3} \cdot 2{,}8 \cdot 2{,}3^2 \cdot \pi \cdot \left(1 + \frac{1}{5} \cdot 0{,}0557^2 \cdot 2{,}8^2\right) \approx 62{,}35\ VE$



d) Beispiel: Volumenmessung durch Wasserverdrängung 47 ml.

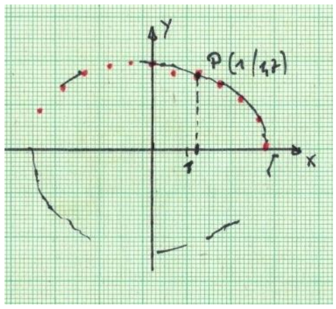
$a \approx 2{,}8\ cm; b \approx 1{,}9\ cm; P(1|1{,}7)$

$m \approx 0{,}0421$

$y_1 = (1 - 0{,}0421 \cdot x) \cdot 1{,}9 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{2{,}8^2}}$

Volumenberechnung:

$V \approx 42{,}5\ cm^3$

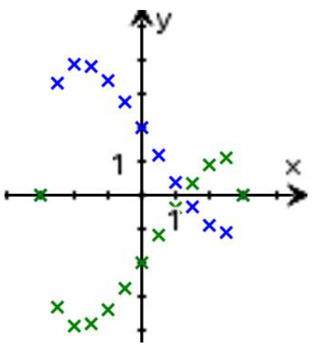


Ergänzungen[1]:

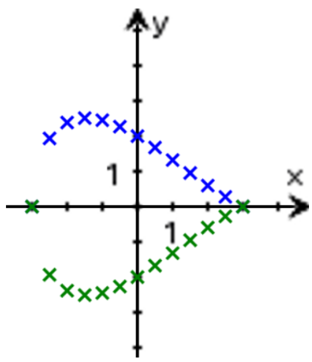
a) Es lassen sich auch Ei-Linien von geeigneten Gegenständen aus dem Alltag (Deko-Artikel, Kinder-Überraschungsei usw.) vorgeben und dazu die Gleichungen ermitteln.

b) Verwendet man z. B. Hühnereier, so lassen sich deren Volumina nicht nur berechnen, sondern auch durch die Verdrängungsmethode (Eintauchen in Wasser, Messung des verdrängten Wasservolumens) zu Vergleichszwecken bestimmen (siehe Seite 5/6).

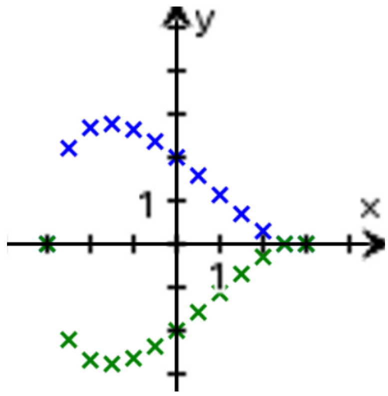
c) Interessant sind z. B. auch Fälle, bei denen für die Funktion $\varphi(x) = 1 - m \cdot x$ mit 0 < m < 1 der Parameter m anders gewählt wird. Sie lassen sich ebenfalls spielerisch erkunden.



m = 0,8



m = 0,3

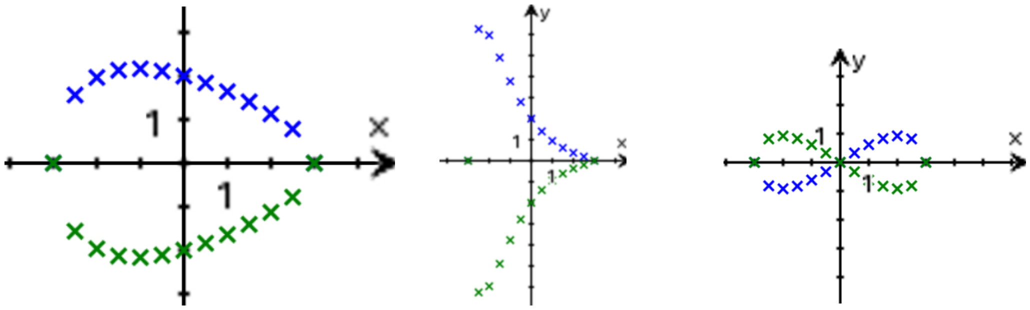


m = 0,4

Eine weitere Möglichkeit für $\varphi(x)$ wäre z. B. die Verwendung einer geeigneten Exponentialfunktion $\varphi(x)$, z. B. $\varphi(x) = 2^{-0{,}1x}$ anstelle der linearen Funktion. Mit der Verwendung anderer Koeffizienten im Exponenten dieser Funktion oder gar anderer Funktionstypen sind interessante Figuren zu beobachten.

[1] Die Zeichnungen wurden mit der TI-Nspire Software erstellt.

Einige Beispiele:



$\varphi(x) = 2^{-0,2x}$ $\varphi(x) = 2^{-x}$ $\varphi(x) = sin\left(\frac{x}{3}\right)$

Um möglichst viele solcher „Ei-Linien“ und andere Graphen zu erhalten, ist - vor allem, wenn die Schüler keine Funktionsplotter zur Verfügung haben - eine arbeitsteilige Unterrichtsgestaltung wohl sinnvoll.
Damit der mathematische Gehalt nicht durch bloße Spielerei verloren geht, sollten die Schülerinnen und Schüler angehalten werden, die Ergebnisse anhand der verwendeten Funktionen und deren Eigenschaften aus mathematischer Sicht vorherzusagen oder nachträglich zu begründen.
Es steht außer Frage, dass sich die hier beschriebenen Überlegungen mithilfe von Funktionsplottern, z. B. mit dem TI-Nspire, auf ähnlichem Wege rascher und anschaulicher anstellen lassen, aber sie sind eben auch mit weniger digitalem Aufwand, aber mit der Anwendung elementarer Kenntnisse durchführbar.

Literaturverzeichnis

Köller, Jürgen: https://www.mathematische -basteleien.de/eilinien.htm (Weitere Kurven → Ei-Linien), zuletz eingesehen am 11.04,2025

Autor:
Dr. Wilfried Zappe

