

Kurvenanpassung mit Schiebereglern – Exploration mit Parametervariationen

Einleitung

Schieberegler haben sich als sehr hilfreich erwiesen, wenn man zu Daten einen funktionalen Zusammenhang finden möchte und zu dem gewünschten Funktionstyp kein Regressionsmodell zur Verfügung steht. Der Umgang mit Schiebereglern öffnet aber auch einen Blick auf die Wirkung von Parametern im Sinne eines Funktionenlabors. Klassische Beispiele sind hier die Veränderung der Parabelform oder das „Wackeln“ an der Geradensteigung und die Beobachtung des jeweiligen Effekts.

Das Beobachten der schrittweisen Veränderung eines oder mehrerer Parameter trägt zum Verständnis von Funktionenscharen bei. Diese Technik lässt sich bei beliebigen Funktionstypen verwenden, wenn das Zusammenspiel der Parameter einmal verstanden wurde. Man braucht eigentlich nur die Grundform einer Funktion f zu kennen und kann mit Hilfe des Zusammenhangs $y = a \cdot f(b(x - c)) + d$ ¹ aus dem Grundtyp die gewünschte graphische Darstellung anpassen. Dieses ist auch als Anregung zu verstehen, die oft langatmige Wiederholung des „Funktionenzoos“ einmal interessanter zu gestalten und das Grundverständnis über Funktionen zu stärken.

Beispiel1: Begrenztes Wachstum

Um die Vorgehensweise in einem einfachen Zusammenhang kennenzulernen, soll der Funktionsterm zu einem begrenzten Wachstum aufgestellt werden. Als Beispiel dient die Erwärmung eines Getränks, das mit einer Temperatur von 5°C aus dem Kühlschrank genommen und einer Umgebungstemperatur von 25°C ausgesetzt wird. Die Temperatur wird in Minutenabständen gemessen (s. Tab. 1) und die erhaltenen Daten in einem Plot dargestellt (s. Abb. 3).

Zeit in Minuten	Temperatur in °C
0	5,0
1	8,6
2	11,6
3	14,0
4	16,0
7	20,1
10	22,3
20	24,6

Tab. 1: Temperaturmessung einer Erwärmung

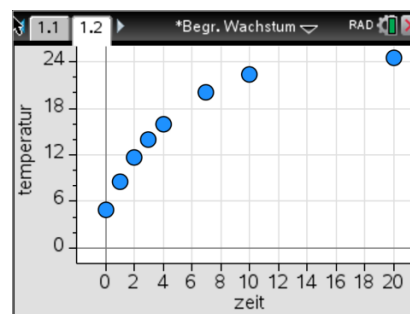


Abb. 1: Plot der Daten aus Tab. 1

Zu dem vorliegenden Verlauf gibt es kein unmittelbar verwendbares Regressionsmodell. Wenn aus dem Unterricht der allgemeine Typ des begrenzten Wachstums bekannt ist, so kann mit Hilfe einer Grundfunktion und Schiebereglern ein Funktionsterm hergeleitet werden.

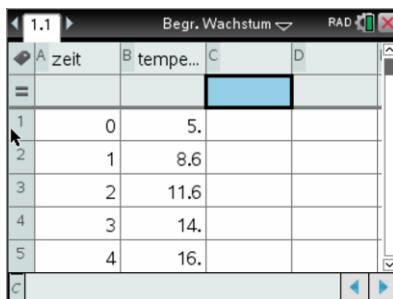
¹ Diese Schreibweise ist notwendig, um auch trigonometrische Funktionen zu erfassen. Bei den folgenden Betrachtungen ist $b=1$.

Sei also die Grundfunktion $f(x) = (a - g) \cdot e^{-c \cdot x} + g$ mit a als Anfangstemperatur, g als Temperaturgrenze und c als Wachstumskonstante. In diesem Fall sind die Parameter $a=5$ und $b=25$ unmittelbar dem Sachzusammenhang zu entnehmen, so dass nur der Parameter c variiert werden muss: $f(x) = (5 - 25) \cdot e^{-c \cdot x} + 25$.

Schieberegler und Funktionen in *Data und Statistics*

Die genaue Vorgehensweise soll hier detailliert dargestellt werden, Fortgeschrittene können diesen Abschnitt überspringen.

Die Applikation *Lists & Spreadsheet* wird geöffnet, die Daten übertragen und die Variablennamen eingetragen (s. Abb. 2). Im nächsten Schritt wird die Applikation *Data & Statistics* geöffnet (s. Abb. 3). In dem Streudiagramm werden entsprechend der Aufforderung „Klicken für mehr Variablen“ jeweils die Variablen „zeit“ und „temperatur“ zugeordnet. Über das Kontextmenü „Fenster/Zoom“ kann noch die Fenstereinstellung optimiert werden (s. Abb. 4). Für die Variation des Parameters c wird im Kontextmenü „Aktionen“ der Punkt „Schieberegler einfügen“ gewählt. Die Einstellungen werden der Situation entsprechend eingetragen (Variable: c , Anfangswert: 0, Minimum: 0, Maximum: 1, Schrittweite 0.1). Die Einstellung erfordert manchmal ein bisschen „Fingerspitzengefühl“. Schließlich wird über das Kontextmenü „Analysieren“ der Punkt „Funktion zeichnen“ ausgewählt und der erstellte Term der Grundfunktion mit Parameter eingegeben (s. Abb. 6). Durch Betätigen des Schiebereglers wird der optimale graphische Verlauf eingestellt und der Parameterwert $c=0,2$ gefunden. Bei Anklicken des erhaltenen Graphen wird der Funktionsterm angezeigt, allerdings mit dem allgemeinen Parameter.



	A zeit	B tempe...	C	D
1	0	5.		
2	1	8.6		
3	2	11.6		
4	3	14.		
5	4	16.		

Abb. 2: Die Daten aus Tabelle 1

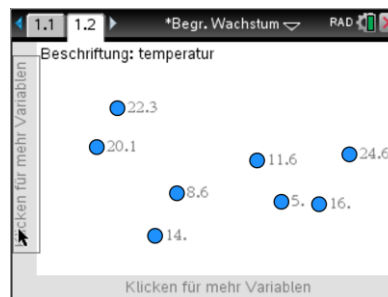


Abb. 3: Streudiagramm

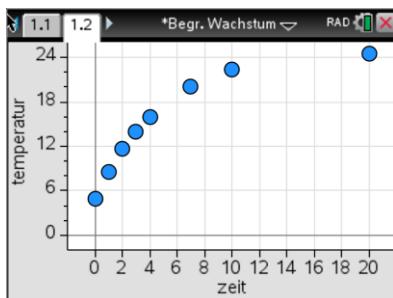


Abb. 4: Plot der Daten

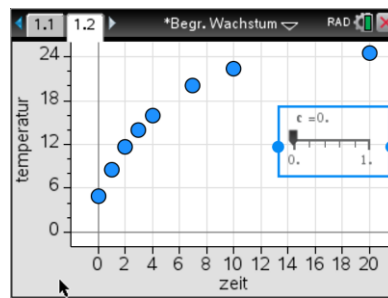


Abb. 5: Einfügen des Schiebereglers

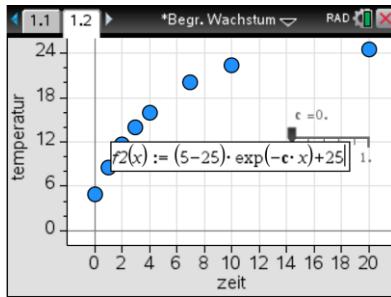


Abb. 6: Eingabe der Grundfunktion

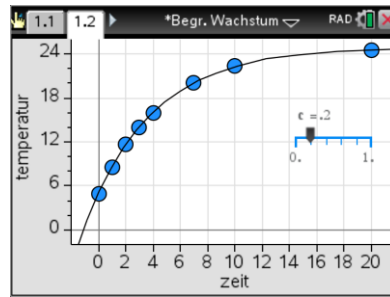


Abb. 7: Parametervariation mit dem Schieberegler

Dem Autor ist durchaus bewusst, dass die Herleitung relativ einfach auf algebraischem Weg leistbar ist. Aber das Beobachten der schrittweisen Veränderung eines oder mehrerer Parameter trägt zum Verständnis von Funktionenscharen bei und zeigt in diesem Fall den Einfluss des Wachstumsfaktors auf den Verlauf des Graphen.

Beispiel 2: Umrechnungsformel für Windstärken

Für Wassersportler wie Segler und Surfer sind Informationen über die Windgeschwindigkeit und damit die Stärke des Windes wichtig. Gebräuchlich ist die Angabe der Windstärke in der (nicht metrischen) Maßeinheit BEAUFORT² bzw. abgekürzt Bft (s. Tab. 2). Wetterdienste geben allerdings überwiegend die Windgeschwindigkeit in m/s, km/h oder in Knoten (nautische Meilen pro Stunde, Einheit kn) an. Mit der BEAUFORT-Angabe wissen Segler und Surfer, welche Kraft der Wind hat und mit welcher Segelgröße sie daher auf das Wasser gehen können. Die Windgeschwindigkeit ist mit Geräten messbar, die Windstärke in Bft ist eine nicht metrische Festlegung. Der Zusammenhang wird über Zuordnungstabellen hergestellt. Da sich die Tabellenwerte schlecht merken lassen, wäre eine Umrechnungsformel von Windgeschwindigkeit in km/h in Bft praktisch. Diese soll mit Hilfe der oben dargestellten Schiebereglermethode entwickelt werden.

Zuvor noch zwei Anmerkungen. Da die Umrechnung 1 kn = 1,852 km/h ein proportionaler Zusammenhang ist, soll im Weiteren die Einheit km/h im Vordergrund stehen. Informationen zu der Geschichte der Maßeinheit BEAUFORT und ausführlichere Versionen der Tab. 2 findet man in der Literatur oder bei WIKIPEDIA.

Windstärke in Bft	Windgeschwindigkeit in km/h	mittlere Windgeschwindigkeit in km/h		Beschreibung
		km/h	kn	
0	< 1	0	<1	Windstille
1	1 – 5	3	1,7	leichter Zug
2	6 - 11	8	4,3	leichter Wind
3	12 - 19	16	8,6	schwacher Wind
4	20 -28	24	13,0	mäßiger Wind
5	29 – 38	34	18,4	frischer Wind
6	39 – 49	44	23,8	starker Wind
9	75 – 88	82	44,0	Sturm
12	> 118	125	67	Orkan

Tab 2: Zusammenhang von Windstärke und Windgeschwindigkeit. Die Tabelle ist nicht vollständig.

² Die Beaufortskala geht u.a. auf Sir Francis Beaufort (1774–1857) zurück.

Die Bearbeitung der relativ offenen Problemstellung kann im Sinne des forschenden Lernens angelegt werden. Die Schülerinnen und Schüler experimentieren mit den Parametern allgemeiner Funktionstypen und können ihre Vermutungen direkt überprüfen und optimieren. Mögliche Schritte auf diesem Lernweg sollen im Folgenden aufgezeigt werden. Angesiedelt sei diese Erarbeitung in dem Zusammenhang quadratischer Funktionen.

Für die graphische Darstellung wird für die Windgeschwindigkeit der mittlere Wert in dem Intervall genommen. Der Punkteplot der Windgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Windstärke legt ein quadratisches Modell nahe, dass sich mit „Quadratischer Regression“ finden lässt und eine zufriedenstellende Annäherung liefert (s. Abb. 7 und 8).

Es zeigt sich, dass die Windstärke quadratisch mit der Windgeschwindigkeit wächst.

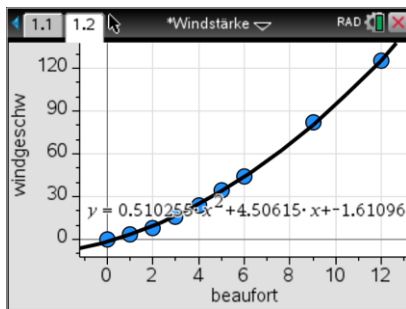


Abb. 7: Windgeschwindigkeit [km/h] in Abhängigkeit von der Windstärke [Bft].

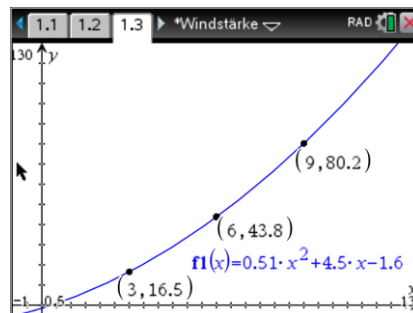


Abb. 8: Für ausgewählte BEAUFORT-Werte ergeben sich recht gute Näherungen, für 0 Bft aber nicht.

Eigentlich soll aber die Windstärke in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit betrachtet werden. Hier erweist sich die Idee der Umkehrfunktion als nützlich, die hier sinnbildlich am Vertauschen der Achsenbezeichnungen erfahren wird. Monotonieeigenschaften sollen erstmal nicht betrachtet werden. Der Verlauf der Datenpunkte legt eine Wurzelfunktion als mögliches mathematisches Modell nahe. Für Wurzelfunktionen gibt es aber keinen Regressionsbefehl, also ist Exploration angesagt. Ein erster Versuch führt zu dem Modell $f(x) = a \cdot \sqrt{x}$, wobei der Parameter a in der Nähe von 1 liegen müsste. Mit der Schrittweite 0,1 für a tastet man sich auf den Wert 0,8 vor, stellt dann die Schrittweite auf 0,01 um. Die gefundene Funktion $f(x) = 0,82 \cdot \sqrt{x}$ ist sicherlich nicht optimal (s. Abb. 9). Da sie aber bis Windstärke 4 Bft relativ gut übereinstimmt, wäre dieses Modell für den Praktiker schon hilfreich.

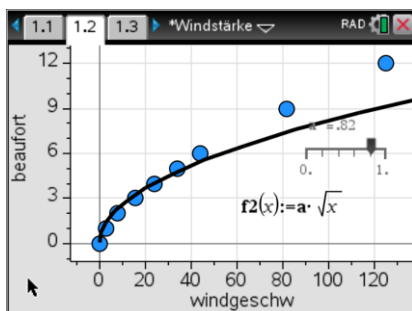


Abb. 9: Ein erstes Modell. Für den Praktiker geeignet.

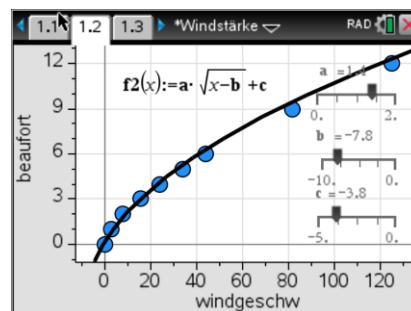


Abb. 10: Lohn der Mühe - Die fast perfekte Anpassung.

Mit der alleinigen Veränderung des Streckfaktors gelingt eine bessere Annäherung nicht. Der Graph muss offensichtlich in seiner Lage verändert werden. Hier könnte eine Verschiebung parallel zu den Achsen helfen. Wie schon bei der Parabelverschiebung könnte das neue Modell $f(x) = a \cdot \sqrt{x-b} + c$ sein. Mit etwas Vorüberlegung nimmt man für die Schieberegler-einstellung negative Werte für die Parameter b und c . Damit die Suche schneller geht, sollte die Schrittweite wieder auf 0,1 gestellt werden. Eine gute Strategie ist, durch Veränderung der Parameter b und c den Graphen durch den Punkt $(0|0)$ laufen zu lassen und dann mit dem Streckfaktor a nachzuarbeiten. Ein bisschen Durchhaltewille ist aber notwendig. Am Ende des Experimentierens könnte das Modell $f(x) = 1,4 \cdot \sqrt{x+7,8} - 3,8$ (s. Abb. 10) entstanden sein. Puristen können die Werte noch auf Hundertstel verfeinern. Mit dem Streckfaktor $a = 1,36$ erreicht man eine gute Annäherung.

Aus mathematischer Sicht sollte jetzt ein zweiter Blick auf die Problemstellung gerichtet werden.

Der Graph der Funktion $f_1(x) = 0,51 \cdot x^2 + 4,5 \cdot x - 1,6$ ³ für die Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit von der Windstärke (s. Abb. 7) ist eine Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(-4,41|-11,5)$. Unter Beachtung der Monotonieeigenschaften kann für $x \geq -4,41$ die Umkehrfunktion bestimmt werden (s. Abb. 11).

$$f_1^{-1}(x) = 1,4 \cdot \sqrt{x+11,5} - 4,41$$

Die Parameter b und c für die Verschiebung parallel zu den Achsen sind also durch die Koordinaten des Scheitelpunkts der Ausgangsfunktion vorgegeben, so dass eigentlich nur der Streckfaktor gesucht werden musste.

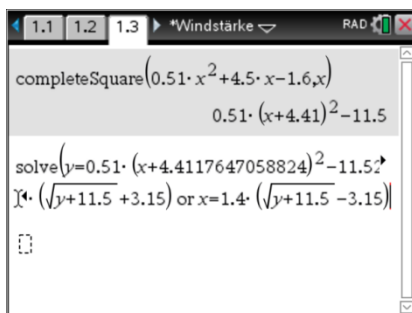


Abb. 11: Bestimmung der Scheitelpunktsform und der Umkehrfunktion

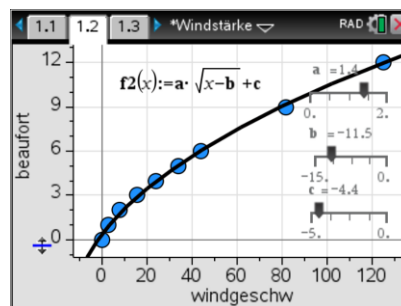


Abb. 12: Optimierte Anpassung, die die mathematischen Hintergründe berücksichtigt

Fazit: Es ist eine Umrechnungsformel gefunden worden, aber als Faustformel nur für Kopfrechenakrobaten geeignet. Liegt die Windgeschwindigkeit in Knoten [kn] vor, gibt es eine praktikable Faustformel: $(\text{Windgeschw. [kn]} + 5) : 5$. Ist ein lineares Modell geeigneter? Vielleicht eine Anregung für eine neue Forschungsreise.

³ Hinweis: Alle Werte sind gerundet angegeben, um die Lesbarkeit nicht zu stören.

Beispiel 3: Der Umriss eines Hühnereies als Funktion

Bei der Behandlung von Rotationsvolumina wird häufig ein Hühnerei als Objekt eingesetzt. Neben dem Vorteil, dass mit einem gekochten Ei und einem Eierschneider die grundlegende Berechnungsmethode visualisiert werden kann, lässt sich das berechnete Volumen auch durch das Messen des verdrängten Wasservolumens überprüfen. Dazu ist aber eine möglichst genaue Funktion für den Hühnerei-Umriss notwendig. Die folgende Herleitung geht auf eine Idee von JAHNKE (s. JAHNKE, S.241) zurück.

Der Ei-Umriss ist dadurch gekennzeichnet, dass der eine Eipol halbkreisförmig ist, während der andere leicht konisch zuläuft, man bezeichnet so etwas als Ei-Kurve oder Oval. Unter Berücksichtigung der Symmetrieachse von Pol zu Pol kann man die Ei-Kurve so in ein Koordinatensystem legen, dass sie sich durch zwei zueinander symmetrische Funktionen beschreiben lässt (s. Abb. 12).

Die Genese der Funktion beginnt bei der Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, wobei die Halbachse a auf der x -Achse liegt und die Halbachse b auf der y -Achse. Jetzt erfolgt noch eine Verschiebung um a Einheiten in positiver x -Richtung und die Auflösung nach y . Man erhält

$$f(x) = \pm b \cdot \sqrt{1 - \frac{(x-a)^2}{a^2}}$$

Für den Parameter a kann man in erster Näherung die Hälfte der Länge von Eipol zu Eipol nehmen, für den Parameter b den Radius des größten Durchmessers des Eies (s. Abb.13). Damit der rechte Eipol eine konische Form bekommt wird f_1 mit der Funktion f_2 mit $f_2(x) = 1 - cx$ multipliziert. Dieser Faktor sorgt dafür, dass mit wachsenden x -Werten die Ellipse gestaucht wird. Für $c=0,09$ ist dieser Effekt in Abb. 14 zu sehen. Durch die Stauchung passen allerdings die gewählten Werte für die Parameter a und b nicht mehr zu dem gemessenen Ei. Mit den Schiebereglern werden jetzt die Parameter dem tatsächlichen Umriss des Eies angepasst (s. Abb. 15).

Einen tieferen mathematischen Blick auf die Ei-Kurve und weitere Anregungen zu diesem Zusammenhang findet man bei ZAPPE.

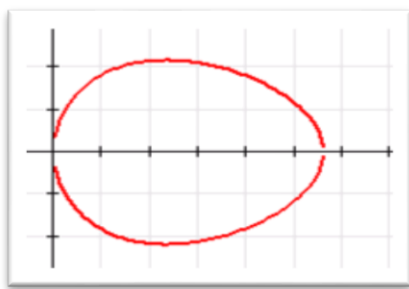


Abb. 12: Ei-Kurve, erzeugt durch zwei zueinander symmetrische Funktionsgraphen. Es empfiehlt sich die Zoomeinstellung Zoom-Quadrat.

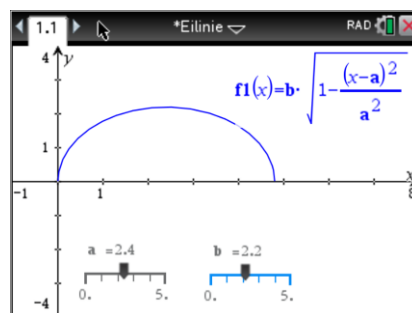


Abb. 13: Ellipse für $y \geq 0$

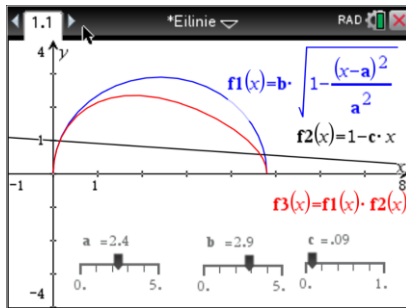


Abb. 14: Ellipse (blau), Gerade (schwarz) und resultierende Ei-Kurve (rot).

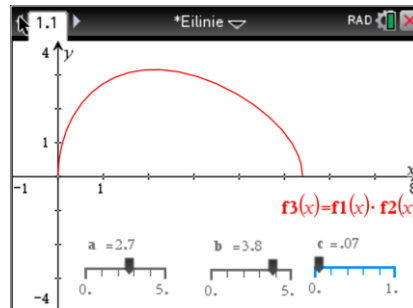


Abb. 15: Ein mögliches Resultat.

Schlussbemerkung

Natürlich kann man die in diesem Beitrag behandelten Problemstellungen auch durch algebraische Verfahren lösen. Leistungsstarke Schülerinnen und Schüler werden diesen Weg sicherlich auch gehen und sollten darin bestärkt werden. Der Vorteil der hier gezeigten Vorgehensweise ist jedoch, dass die Parametervariation in den Vordergrund gestellt wird. Das Beobachten der schrittweisen Veränderung eines oder mehrerer Parameter trägt zum Verständnis von Funktionenscharen bei.

Literaturquellen:

- JAHNKE, T. / WUTTKE, H. (Hrsg.): Mathematik Analysis. Cornelsen Verlag 2001
- ZAPPE, W.: Mathematische Betrachtungen zum Ei. https://ti-unterrichtsmaterialien.net/materialien?resource_id=3960&cHash=26675d8253f0bbbedf72dd27691243e5f (zuletzt eingesehen am 28.04.2025)

Autor:

Lampe, Hans-Ulrich

Info:

Hans-Ulrich Lampe unterrichtete Biologie und Mathematik am Wilhelm-Busch-Gymnasium in Stadthagen und war Fachleiter für Mathematik am Studienseminar Stadthagen. Mittlerweile ist er im Ruhestand und engagiert sich bei T3-Deutschland.