

Die LAGRANGE-Punkte im System Sonne - Erde

Annahme: Der Schwerpunkt des Systems Sonne - Erde liegt näherungsweise im Mittelpunkt der Sonne.
Die Erde bewegt sich auf einer Kreisbahn um die Sonne.
Es gibt keine weiteren Störeinflüsse.

gegeben: $G := 6.6726 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$

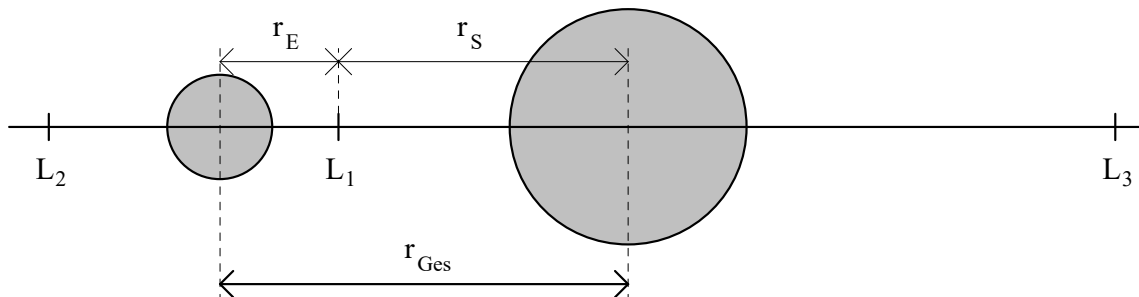
$$m_S := 1.989 \cdot 10^{30} \cdot \text{kg} ; \quad r_{\text{Ges}} := 149.6 \cdot 10^6 \cdot \text{km}$$

$$m_E := 5.97 \cdot 10^{24} \cdot \text{kg} ; \quad m_K \dots \text{Masse eines Probekörpers}$$

$$v_E := \sqrt{G \cdot \frac{m_S}{r_{\text{Ges}}}} ; \quad v_E = 29.785 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

LAGRANGE-Punkt L_1 :

Unter Berücksichtigung der Erdbewegung folgt (alle Körper liegen auf einer Linie):



$$F_S = F_E + F_r$$

$$G \cdot \frac{m_S \cdot m_K}{r_S^2} = G \cdot \frac{m_E \cdot m_K}{(r_{\text{Ges}} - r_S)^2} + m_K \cdot \frac{v_K^2}{r_S} ; \quad T_E = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_S}{v_K} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{\text{Ges}}}{v_E}$$

$$G \cdot \frac{m_S}{r_S^2} = G \cdot \frac{m_E}{(r_{\text{Ges}} - r_S)^2} + \frac{v_E^2 \cdot r_S}{r_{\text{Ges}}^2}$$

$$f(r) := G \cdot \frac{m_E}{(r_{\text{Ges}} - r)^2} + \frac{v_E^2 \cdot r}{r_{\text{Ges}}^2} - G \cdot \frac{m_S}{r^2}$$

$$\varepsilon_r := 100 \cdot \text{km}$$

$$\text{nst}_1(\text{li}, \text{re}) := \begin{cases} m \leftarrow \frac{\text{li} + \text{re}}{2} \\ m \text{ if } |\text{li} - \text{re}| < \varepsilon_r \\ \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{nst}_1(\text{li}, m) \text{ if } (f(\text{li}) \cdot f(m)) \leq 0 \\ \text{nst}_1(m, \text{re}) \text{ otherwise} \end{array} \right. \end{cases}$$

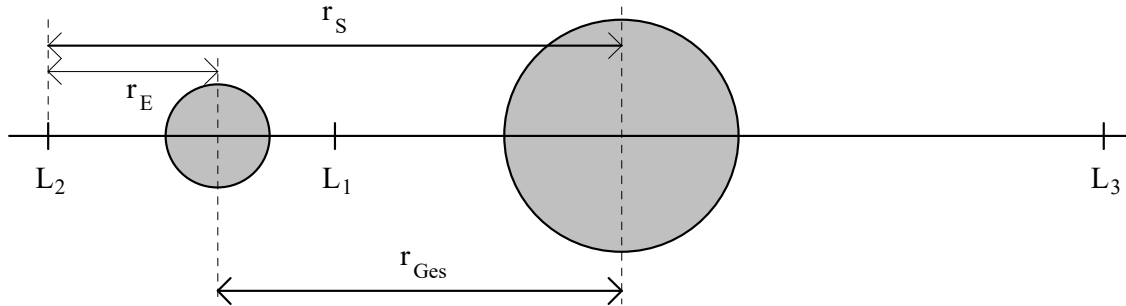
$$r_S := \text{nst}_1(100000 \cdot \text{km}, r_{\text{Ges}})$$

$$r_S = 1.481 \times 10^8 \text{ km}$$

$$r_E := r_{Ges} - r_S \quad ; \quad r_E = 1.491 \times 10^6 \text{ km}$$

In einer Entfernung von ca. 1 491 000 km zum Erdmittelpunkt ist ein Körper zwischen Sonne und Erde unter der Berücksichtigung der Erdbewegung kräftefrei.

LAGRANGE-Punkt L_2 :



$$F_r = F_E + F_S$$

$$m_K \cdot \frac{v_K^2}{r_S} = G \cdot \frac{m_E \cdot m_K}{(r_S - r_{Ges})^2} + G \cdot \frac{m_S \cdot m_K}{r_S^2} \quad ; \quad T_E = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_S}{v_K} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{Ges}}{v_E}$$

$$\frac{v_E^2 \cdot r_S}{r_{Ges}^2} = G \cdot \frac{m_E}{(r_S - r_{Ges})^2} + G \cdot \frac{m_S}{r_S^2}$$

$$f(r) := G \cdot \frac{m_E}{(r - r_{Ges})^2} + G \cdot \frac{m_S}{r^2} - \frac{v_E^2 \cdot r}{r_{Ges}^2}$$

$$\varepsilon_r := 100 \cdot \text{km}$$

$$\text{nst}_2(\text{li}, \text{re}) := \begin{cases} m \leftarrow \frac{\text{li} + \text{re}}{2} \\ m \text{ if } |\text{li} - \text{re}| < \varepsilon_r \\ \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{nst}_2(\text{li}, m) \text{ if } (f(\text{li}) \cdot f(m)) \leq 0 \\ \text{nst}_2(m, \text{re}) \text{ otherwise} \end{array} \right. \end{cases}$$

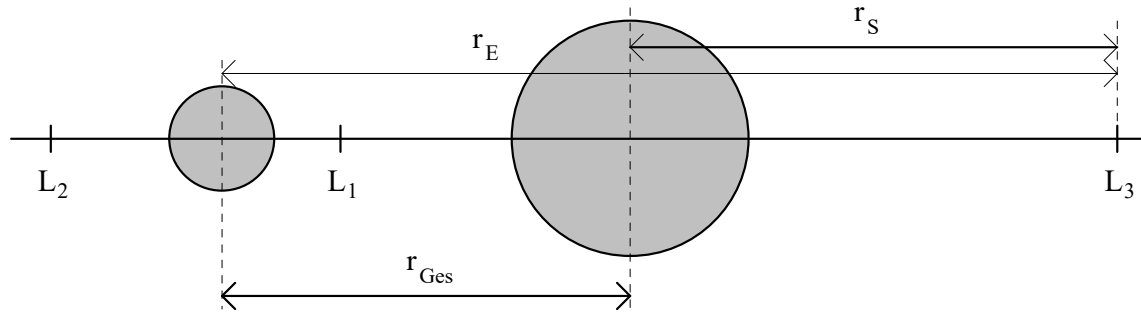
$$r_S := \text{nst}_2(r_{Ges} + 100000 \cdot \text{km}, 2 \cdot r_{Ges})$$

$$r_S = 1.511 \times 10^8 \text{ km}$$

$$r_E := r_S - r_{Ges} \quad ; \quad r_E = 1.501 \times 10^6 \text{ km}$$

Hinweis: Das James-Webb-Teleskop wurde im Januar 2022 zur Infrarotbeobachtung früher Galaxien im LAGRANGE-Punkt L_2 , also in einer Entfernung von etwa 1 500 000 km von der Erde platziert.

LAGRANGE-Punkt L_3 :



$$F_r = F_E + F_S$$

$$m_K \cdot \frac{v_K^2}{r_E} = G \cdot \frac{m_E \cdot m_K}{(r_S + r_{Ges})^2} + G \cdot \frac{m_S \cdot m_K}{r_S^2} \quad ; \quad T_E = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_S}{v_K} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{Ges}}{v_E}$$

$$\frac{v_E^2 \cdot r_S}{r_{Ges}^2} = G \cdot \frac{m_E}{(r_S + r_{Ges})^2} + G \cdot \frac{m_S}{r_S^2}$$

$$f(r) := G \cdot \frac{m_E}{(r + r_{Ges})^2} + G \cdot \frac{m_S}{r^2} - \frac{v_E^2 \cdot r}{r_{Ges}^2}$$

$$\varepsilon_r := 100 \cdot \text{km}$$

$$\text{nst}_3(\text{li}, \text{re}) := \begin{cases} m \leftarrow \frac{\text{li} + \text{re}}{2} \\ m \text{ if } |\text{li} - \text{re}| < \varepsilon_r \\ \text{otherwise} \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{nst}_3(\text{li}, m) \text{ if } (f(\text{li}) \cdot f(m)) \leq 0 \\ \text{nst}_3(m, \text{re}) \text{ otherwise} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$r_S := \text{nst}_3(100000 \cdot \text{km}, r_{Ges})$$

$$r_S = 1.496 \times 10^8 \text{ km}$$

$$r_E := r_S + r_{Ges} \quad ; \quad r_E = 2.992 \times 10^8 \text{ km}$$

Hinweis: Es gibt noch zwei weitere LAGRANGE-Punkte L_4 und L_5 , die sich außerhalb der Verbindungslinie Sonne - Erde auf der elliptischen Erdbahn bewegen.