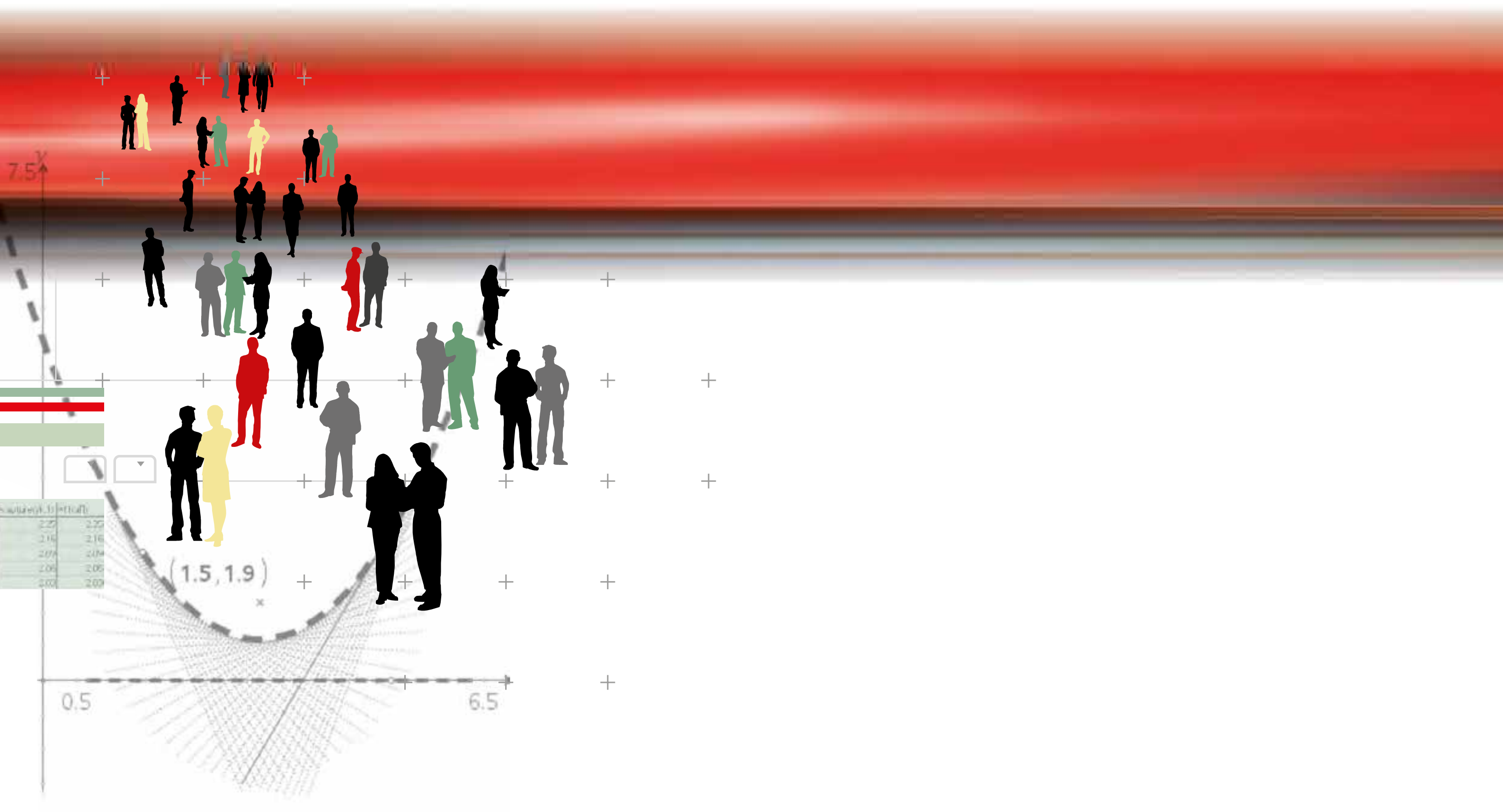
T³ DEUTSCHLAND

T^3- MATHEMATIK

Zur Behandlung der Normalverteilung und beurteilenden Statistik mit einem digitalen Werkzeug

bearbeitet für TI-Nspire™ CX CAS 4.0

Hubert Langlotz (Hrsg.)



Texas Instruments

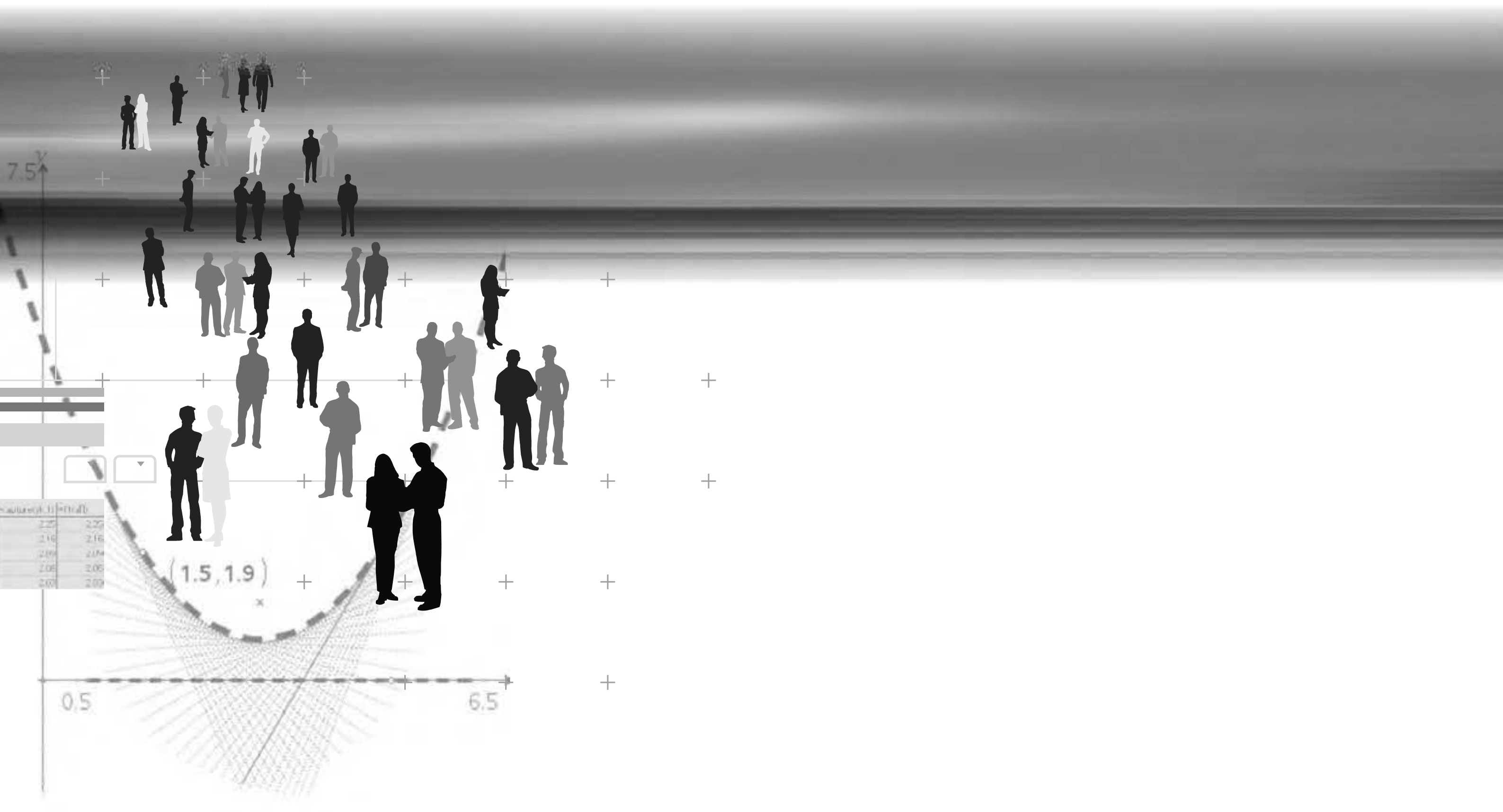
T³ DEUTSCHLAND

T^3- MATHEMATIK

Zur Behandlung der Normalverteilung und beurteilenden Statistik mit einem digitalen Werkzeug

bearbeitet für TI-Nspire™ CX CAS 4.0

Hubert Langlotz (Hrsg.)



TEXAS INSTRUMENTS

Autoren:
Georg-Christian Brückner, Annett Fiedler, Ralph Huste, Tobias Kellner, Hubert Langlotz, Andreas Prömmel, Wilfried Zappe

bearbeitet für TI-Nspire™ CX CAS 4.0 in Kooperation mit T³ Deutschland

Dieses und weiteres Material steht Ihnen zum pdf-Download bereit: www.ti-unterrichtsmaterialien.net
Gedruckte Exemplare erhalten Sie über den Webshop: www.ti-activities-shop.net

Inhalt

Einleitung

Die in den Bildungsstandards für Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife aus dem Jahr 2012 aufgestellten thematischen Forderungen in der Leitidee „Daten und Zufall“, die stochastischen Vorstellungen der Sekundarstufe I u.a. durch weitere Verteilungen, Simulationen und Methoden der beurteilenden Statistik zu erweitern und zu vertiefen[1], veranlasste eine kleine Arbeitsgruppe von T³ in Thüringen dazu, sich mit zwei dieser Themengebiete intensiver zu befassen.

Zum einen wird in diesem Heft aus inhaltlicher Sicht versucht, für die Schülerhand einen Zugang zu stetigen Verteilungen, insbesondere mit Blick auf die Normalverteilung, anzubieten. Die Normalverteilung wird bei der Verfügbarkeit von digitalen Werkzeugen vor allem unter dem Aspekt der geeigneten Modellierung von stochastischen Situationen betrachtet. Wir unterbreiten konkrete Vorschläge, wie man im Unterricht die Behandlung der Normalverteilung mit dem TI-Nspire™ CAS umsetzen könnte.

Ein zweiter Schwerpunkt sind Elemente der beurteilenden Statistik.
Neben dem Lösen typischer Aufgaben zu einseitigen und zweiseitigen Signifikanztests werden wir Anregungen geben, mit dem Verfahren des sogenannten P-Wert-Testens einen intuitiven Zugang in die beurteilende Statistik zu bekommen. Uns erscheint dieser Weg besonders geeignet, um das eigentliche Ziel solcher Testverfahren zu vermitteln. Darauf aufbauend werden konkrete Beispiele vorgestellt, wie einseitige und zweiseitige Signifikanztests (für diskrete und im Kapitel 5 auch für stetige Zufallsgrößen) mit dem TI-Nspire™ CAS modelliert werden können.

Der Zusammenhang zum Schätzen mittels Konfidenzintervallen wird angedeutet.
Verknüpft werden die beiden Themengebiete durch die zentrale Idee der Simulation.

In einem eigenen Kapitel werden hilfsmittelfreie Aufgaben für beide behandelten Themengebiete vorgestellt. Aufgaben dieser Art sind Bestandteil im Zentralabitur vieler Länder und erfordern auch im Unterricht entsprechende Beachtung.

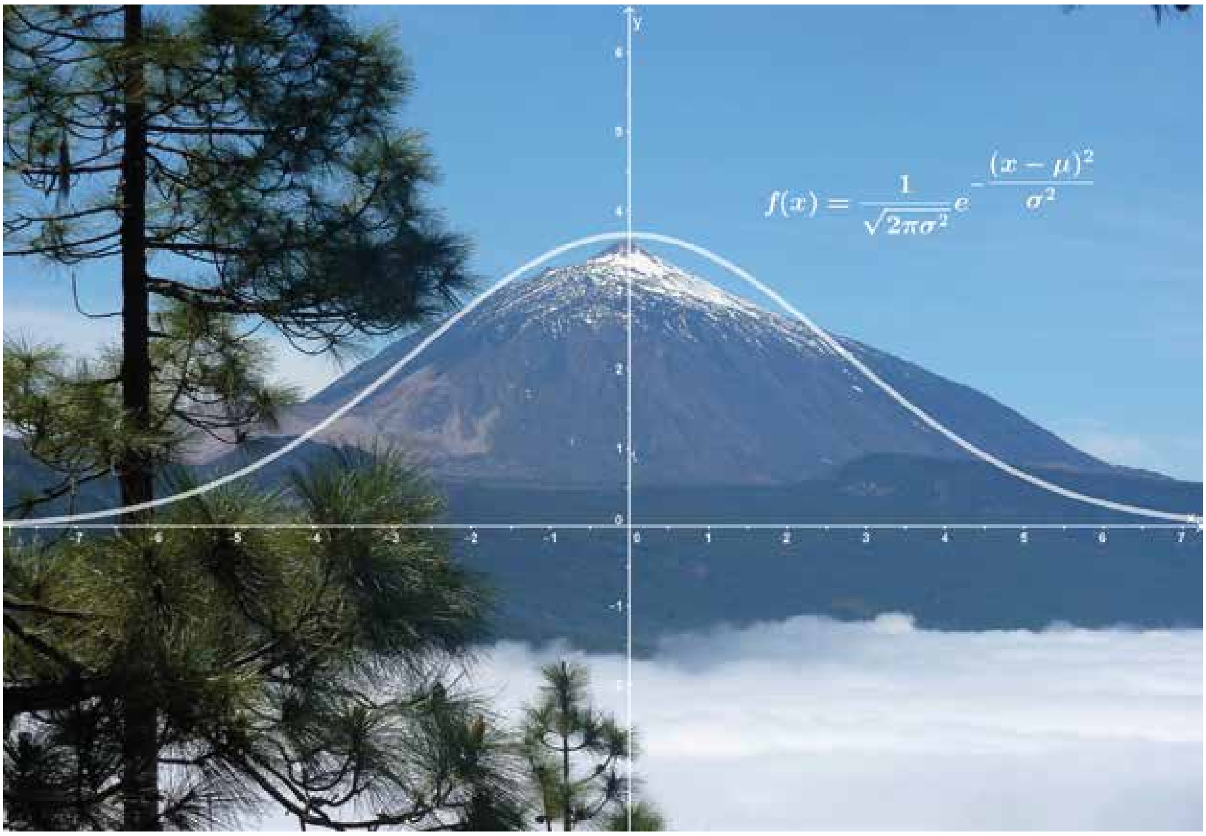
In allen Kapiteln werden vielfältige Aufgabenbeispiele mit zum Teil ausführlichen Lösungen dargestellt. Die Struktur der Kapitel orientiert sich am Thüringer Lehrplan für Mathematik von 2013.
In Kapitel 1 und 2 (Normalverteilung und zweiseitige Signifikanztests) sind die Themen zusammengefasst, die von allen Schülern bearbeitet werden müssen.
Kapitel 3 und 4 (Einseitige Testverfahren und Standardisierung der Normalverteilung) nehmen Bezug auf Thüringer Wahlthemen.
Im Kapitel 5 wird ein Ausblick auf Testverfahren unter Verwendung der Normalverteilung gegeben.
Den Abschluss bilden die Kapitel zu hilfsmittelfreien Aufgaben bzw. mit Aufgaben, die unter Verwendung des digitalen Werkzeugs bearbeitet werden sollen.

[1] BisTa S. 26

Ein großes Dankeschön geht an diejenigen, die sich die Mühe gemacht haben, unsere Arbeit aus ihrem speziellen Blickwinkel zu begutachten sowie kritisch zu hinterfragen, und die uns viele Tipps zur Fertigstellung dieses Heftes gegeben haben. Hervorheben wollen wir hier Andreas Eichler, Dörthe Moll und Reimund Vehling.

Hubert Langlotz Herausgeber

Autoren: Georg-Christian Brückner, Annett Fiedler, Ralph Huste, Tobias Kellner, Hubert Langlotz, Andreas Prömmel, Wilfried Zappe



Quelle: Tobias Kellner

1. Stetige Verteilungen – die Normalverteilung

Georg-Christian Brückner, Tobias Kellner, Wilfried Zappe

Einführung

Zunächst stellen wir einige wiederholende Aspekte in den Vordergrund.
Zufallsexperimente sind dadurch gekennzeichnet, dass es bei jeder Durchführung mehrere mögliche Versuchsausgänge gibt, es aber nicht möglich ist, vorherzusagen, welches dieser Ergebnisse im konkreten Einzelfall eintreten wird. Die Menge aller möglichen Versuchsausgänge heißt **Ergebnismenge Ω**, jede Teilmenge von Ω wird **Ereignis A** genannt. Die Anzahl des Auftretens von A bei n Versuchsdurchführungen ist die **absolute *Häufigkeit H(A)***, daraus wird die ***relative Häufigkeit*** $\boldsymbol{h(A) = \frac{H(A)}{n}}$ berechnet.
Je größer der Stichprobenumfang n wird, desto mehr **stabilisieren** sich bei unabhängiger Wiederholung ein und desselben Zufallsversuchs die relativen Häufigkeiten h(A) um einen Wert p, der zur Festlegung der **Wahrscheinlichkeit P(A)** verwendet wird. P(A) beschreibt gewissermaßen die Chance des Eintretens von A bei sehr vielen Versuchswiederholungen. Theoretischer Hintergrund ist das **schwache Gesetz der großen Zahlen**[2].
Eine Wahrscheinlichkeit kann auch aus theoretischen Erwägungen heraus festgelegt werden. Nimmt man z. B. beim Werfen einer Münze an, dass beide Seiten aus Symmetriegründen die gleiche Chance haben, oben zu liegen, wird die **Laplace-Wahrscheinlichkeit** P(Zahl) = P(Wappen) = 0,5 festgelegt.
Eine Zuordnung $X\colon \Omega \rightarrow \mathrm{R}$, die jedem Ergebnis eines Zufallsversuchs eine reelle Zahl zuordnet, heißt **Zufallsgröße** oder Zufallsvariable.
Im Folgenden wird zwischen diskreten und stetigen Zufallsgrößen unterschieden. Bei diskreten Zufallsgrößen enthält der Wertebereich nur abzählbar viele (oft ganzzahlige) Werte, stetige Zufallsvariablen dagegen können jeden reellen Wert aus einem Intervall annehmen.
Diskrete Zufallsgrößen zeichnen sich durch gemeinsame Eigenschaften aus:

Sie umfassen abzählbar viele (oft ganzzahlige) Werte x_i.
Sind es endlich viele Werte, so kann man für die Zufallsgröße X schreiben:

- $X = \{ x_1;\ x_2;\ \dots;\ x_i;\ \dots;\ x_n\}$
- Zu jedem Wert x_i von X gehört eine Wahrscheinlichkeit p_i.
- Die Zuordnung $x_i \rightarrow p_i$ heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung.
- Für alle Wahrscheinlichkeiten p_i gilt:

$$0 \leq p_i \leq 1 \text{ und } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Wichtige Kenngrößen für diskrete Zufallsgrößen mit endlich vielen Werten:

- Für den Erwartungswert $E(X)$ der Zufallsgröße X gilt:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} (p_\mathrm{i} \cdot \mathrm{x_i})$$

- Für die Standardabweichung $\sigma(X)$ der Zufallsgröße X gilt:

$$\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{p_i} \cdot (\mathrm{x_i} - \mathrm{E(X)})^2)}$$

[2] Lehn, J. & Wegmann, H. (2013)

Beispiel – Gleichverteilung Würfelzahlen
Ein idealer Würfel wird geworfen, die betrachtete Zufallsgröße ist die gefallene Augenzahl, die natürlichen Zahlen 1 bis 6 sind ihre Werte. Unter der Annahme, dass alle Seiten des Würfels die gleiche Chance haben, oben zu liegen, geht man von einer Laplace-Wahrscheinlichkeit für jede Augenzahl von einem Sechstel aus. Die Tabelle zeigt in den beiden oberen Bildern die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser gleichverteilten Zufallsgröße als Tabelle bzw. als Graph.
In den beiden unteren Bildern wird die Erfassung von 600 simulierten Würfen in einer Urliste sowie deren Häufigkeitsverteilung dargestellt. Das obere Bild zeigt das Histogramm der theoretischen Gleichverteilung.

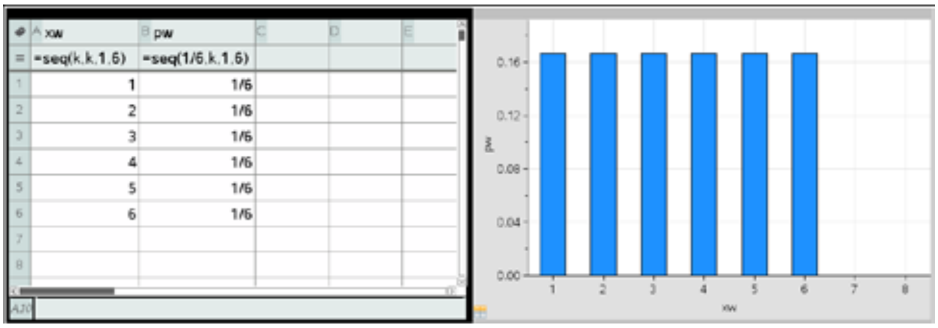


Abb. 1.1 Histogramm der theoretischen Gleichverteilung

Säulendiagramme wie das oben rechts dargestellte nennt man ***Histogramme***[3]. Hinweise zur Erstellung von Histogrammen finden Sie auf Seite 19.

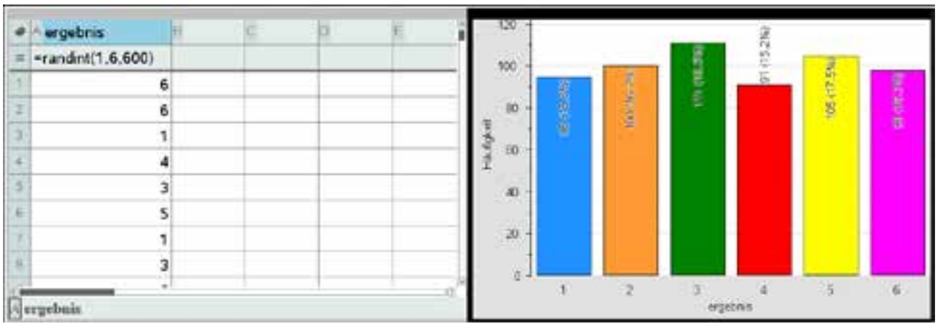


Abb. 1.2 Histogramm der simulierten Gleichverteilung

Neben den diskreten Zufallsgrößen gibt es auch solche, deren Werte, abgesehen von ihren Einheiten, ein Intervall reeller Zahlen vollständig ausfüllen. Die Wartezeit auf die Straßenbahn eines zufällig eintreffenden Fahrgastes kann man als **stetige Zufallsgröße** modellieren, denn sie kann theoretisch alle reellen Werte von 0 bis zu einer oberen Grenze annehmen.

[3] Im Allgemeinen werden die Säulen als "Stäbe" („ohne" Breite) gezeichnet. Sie lassen sich so sinnvoll zur Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung von *diskreten* Zufallsgrößen einsetzen, die Höhe der Säule ist die Wahrscheinlichkeit. Der TI-Nspire™ CAS liefert solche Stabdiagramme nicht bzw. nur mit zusätzlichem Aufwand, sondern Punktdiagramme oder Histogramme.

Beispiel – Gleichverteilung Wartezeit

Tagsüber fährt vom Erfurter Anger alle 10 Minuten die Straßenbahnlinie 2 zum ega-Park[4]. Die Zufallsgröße X beschreibt die Wartezeit eines zufällig eintreffenden Fahrgastes in Minuten. Die Wartezeit kann theoretisch jeden reellen Wert x zwischen 0 und 10 Minuten annehmen, falls die Bahn pünktlich ist.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Wartezeit im Intervall $0 \leq x \leq 10$ liegt, ist 1.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Wartezeit im Intervall $0 \leq x \leq 5$ liegt (höchstens 5 min Wartezeit), ist $\frac{1}{10} \cdot (5-0) = \frac{1}{2}$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Wartezeit im Intervall $2 \leq x \leq 4$ liegt (mindestens 2 min und höchstens 4 min Wartezeit), ist $\frac{1}{10} \cdot (4-2) = \frac{1}{5}$.
Allgemein lässt sich die Wahrscheinlichkeit für die Wartezeit in einem Intervall $a \leq x \leq b$ durch $P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{10}(b-a)$ modellieren.

Stetige Zufallsgrößen, insbesondere normalverteilte Zufallsgrößen, stehen im Mittelpunkt der weiteren Betrachtungen.

Inhaltliche und didaktisch-methodische Aspekte eines phänomenologischen Zugangs zur „Normalverteilung“

Die Bildungsstandards Mathematik für den Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife fordern u. a.[5]:

Erhöhtes Anforderungsniveau
Die Schülerinnen und Schüler können darüber hinaus ... ▪ exemplarisch diskrete und stetige Zufallsgrößen unterscheiden und die „Glockenform“ als Grundvorstellung von normalverteilten Zufallsgrößen nutzen ▪ stochastische Situationen untersuchen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen

Normalverteilte Zufallsgrößen sind Beispiele für stetige Zufallsgrößen. Für eine stetige Zufallsgröße gilt, dass sie alle reellwertigen Argumente aus einem Intervall annehmen kann. Die Normalverteilung approximiert die additive Überlagerung vieler kleiner identischer und unabhängiger Effekte zu einem Gesamteffekt (theoretischer Hintergrund: zentraler Grenzwertsatz).
Typische Beispiele für das Modellieren von Sachverhalten mit der Normalverteilung sind die Körpergröße oder das Geburtsgewicht von Neugeborenen, die Füllmenge von 0,5-Liter-Bierflaschen oder der Durchmesser von Stahlbolzen mit 20 mm Soll-Durchmesser.
Die von der KMK in den Bildungsstandards empfohlene Nutzung digitaler Werkzeuge[6] im Mathematikunterricht hat für die Behandlung normalverteilter Zufallsgrößen Konsequenzen:

– Bereits für binomialverteilte Zufallsgrößen entfällt im Allgemeinen die bei ausschließlicher Verwendung von Tafeln zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten entstehende Notwendigkeit, für größere oder nicht tabellierte Werte von n, die Normalverteilung als Näherung zu nutzen.

[4] ega-Park: Erfurter Gartenbauausstellung
[5] Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012); S. 26
[6] Hier wird Bezug genommen auf den Einsatz von TI-Nspire™ CAS.

- Zur Berechnung von Intervallwahrscheinlichkeiten kann auf die Ermittlung von Integralen mit dem TI-Nspire™ CAS oder auf entsprechende CAS-Befehle zurückgegriffen werden.
- Die grafische Darstellung von Gaußschen Glockenkurven für $N(\mu;\ \sigma)$[7] verteilte Zufallsgrößen ist problemlos möglich und erleichtert nicht nur einen anschaulichen Zugang, sondern gibt auch die Möglichkeit, Wahrscheinlichkeiten als Flächeninhalte näherungsweise zu bestimmen.
- Die mit TI-Nspire™ CAS mögliche Berechnung von Intervallwahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen für (fast) beliebige Erwartungswerte und Standardabweichungen macht einen Zugang zur Tafel der N(0; 1)-Verteilung durch Standardisierung unnötig.
- Auch der bislang typische Zugang zur Normalverteilung über die Näherungsformel von MOIVRE/LAPLACE ist nicht mehr zwingend erforderlich. Die Näherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung kann aber für gewisse Sachverhalte durchaus sinnvoll sein (s. Beispiel „Transistor“ auf Seite 50).

Wir werden hier einen Weg zur Behandlung der Normalverteilung im Mathematikunterricht beschreiben, der im Wesentlichen vom Phänomen der „Glockenkurve“ ausgeht und auf den Einsatz von TI-Nspire™ CAS Bezug nimmt.
„In Anwendungssituationen treten dabei u. a. folgende Fragestellungen auf:

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem rein zufällig ausgewählten Objekt mit dem normalverteilten Merkmal X die entsprechende Merkmalsausprägung innerhalb eines Intervalls [a; b] (mit $a, b \in R$) liegt?
- Wie groß muss man c (mit $c \in$ R) wählen, damit das Ergebnis der Realisierung der N($\mu;\ \sigma$)-verteilten Zufallsgröße mit einer Wahrscheinlichkeit von beispielsweise mindestens 0,95 zu dem Intervall $[\mu - c;\ \mu + c]$ gehört?“[8]

Ein phänomenologischer Einstieg am Beispiel „Körpergröße“

Die Normalverteilung kann als Modell für die Körpergröße von Kindern desselben Lebensalters verwendet werden. Während das Geschlecht eines Babys als diskrete Zufallsgröße aufgefasst werden kann, ist die Körpergröße als stetige Zufallsgröße interpretierbar, denn sie kann (theoretisch) alle reellen Werte aus einem Intervall annehmen. Dem sind häufig nur durch die Messgenauigkeit Grenzen gesetzt.
Beispiel:
Über mehrere Monate wurden Daten über 277 Neugeborene im Ilm-Kreis der Presse entnommen und gesammelt. Im nebenstehenden Histogramm sind die Ergebnisse für die Körpergröße dargestellt. Jede Säule hat die Breite 1. Im Rahmen der Messgenauigkeit repräsentiert hier z. B. der Messwert x = 51 cm alle Körpergrößen aus dem Intervall $50{,}5\ cm \le x < 51{,}5\ cm.$

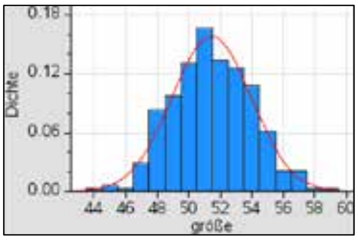


Abb. 1.3 Verteilung der Größen von Neugeborenen

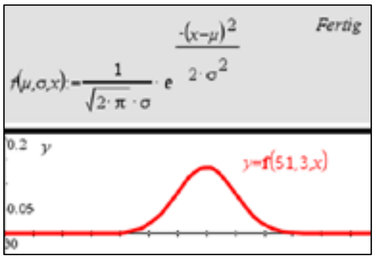
Trotz der relativ kleinen Stichprobe ist eine annähernde Glockenform der Verteilung der Daten gut zu erkennen. Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion (siehe nächster Abschnitt) wird auch Gaußsche Glockenkurve[9] genannt. Ihr Kurvenverlauf ist symmetrisch zum Erwartungswert.

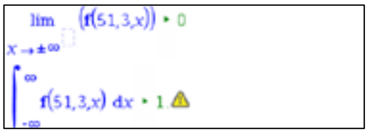
[7] Diese Kurzform beschreibt eine normalverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ.
[8] „Lehrbuch Mathematik, Gymnasiale Oberstufe; Qualifikationsphase – Brandenburg“, Duden Paetec, Berlin, 2012, S. 441 f.

Im Folgenden nehmen wir die Körpergröße Neugeborener als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 51$ cm und der Standardabweichung $\sigma = 3$ cm an. Unter anderem an diesem Beispiel wollen wir Eigenschaften der Gaußschen Glockenkurve, Definition und Eigenschaften der Normalverteilung und Berechnungsmöglichkeiten veranschaulichen.

Die Gaußsche Glockenkurve

Die Gaußsche Glockenkurve wird durch die Funktion $f_{\mu;\,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$ beschrieben.
Dabei geben x = μ die Stelle für das lokale Maximum sowie x = $\mu - \sigma$ und x = $\mu + \sigma$ die Wendestellen der Glockenkurve an.
Die x-Achse ist Asymptote des Graphen und es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mu;\,\sigma}(x)dx = 1.$[10]
Die Glockenkurve ist symmetrisch zur Geraden x = μ.





Die oben genannten Aussagen über das lokale Maximum, die Wendestellen und die Symmetrie der Gaußschen Glockenkurve lassen sich mithilfe der Analysis nachweisen. Diese Untersuchungen werden hier aus Platzgründen nicht weiter dargestellt.

Definition der Normalverteilung

Eine Funktion f mit $x \in R$ heißt **Dichtefunktion** oder **Wahrscheinlichkeitsdichte**, wenn für sie gilt:

(1) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in R$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Eine reellwertige Zufallsgröße X nennt man ***stetig verteilte Zufallsgröße*** mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f, wenn für alle Werte a und b aus R mit $a \leq b$ gilt:

- $\mathbf{P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx}$
- $\mathbf{P(X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx}$
- $\mathbf{P(a \leq X) = \int_a^{\infty} f(x)dx}$

Eine Zufallsgröße X heißt **normalverteilt** mit den Parametern $\mu \ und \ \sigma$, wenn sie eine Gaußsche Glockenfunktion $f_{\mu;\,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$ als Dichtefunktion besitzt. Sie wird mit $N(\mu;\ \sigma)$ bezeichnet.

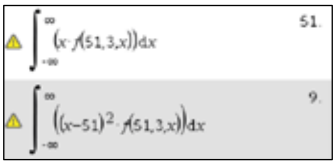
Normalverteilte Zufallsgrößen sind Beispiele für **stetige Zufallsgrößen**[11], weil sie beliebige reelle Werte annehmen können. Hingegen sind binomialverteilte Zufallsgrößen Beispiele für **diskrete Zufallsgrößen**, weil sie nur nichtnegative ganzzahlige Werte annehmen.

[9] nach dem deutschen Mathematiker Carl Friedrich Gauß
[10] Der Rechner gibt die Warnung „Zweifelhafte Genauigkeit" aus. Dieses Integral wird vom TI-Nspire ™CAS numerisch für konkrete Werte von μ und σ bestimmt. Für einen symbolischen Nachweis braucht man den Satz von Fubini oder Kenntnisse aus der Funktionentheorie, beides ist in der Schule nicht machbar.
[11] Neben der Normalverteilung gibt es auch andere stetig verteilte Zufallsgrößen. Sie werden hier in Beispielen und Aufgaben exemplarisch untersucht.

In Analogie zur Definition von Erwartungswert und Varianz bei diskreten Zufallsgrößen werden **Erwartungswert und Varianz einer stetigen Zufallsgröße** X mit Werten aus R und der Dichtefunktion f definiert: E(X) = $\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$ und
V(X) = $\int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E(X)\right)^2 \cdot f(x)dx$ bzw. $\sigma = \sqrt{V(X)}$ (falls diese Integrale existieren)

Es lässt sich zeigen, dass folgender Satz gilt:

Für jede $N(\mu;\,\sigma)$ verteilte Zufallsgröße X ist $E(X) = \mu$ und $V(X) = \sigma^2$

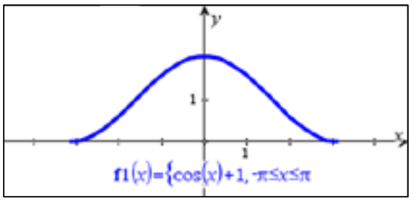


Der Beweis für diesen Satz kann in der Schule nicht geführt werden. Man kann aber diese Sachverhalte an Beispielen plausibel machen, wie der nebenstehende Bildschirm zeigt.

Nicht jede glockenförmige Kurve ist eine Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße.

Man kann zeigen, dass der Graph der Funktion
f(x) = $\begin{cases} \cos(x) + 1, & \text{für } -\pi \le x \le \pi \\ 0, & sonst \end{cases}$
zwar glockenförmig ist, aber nicht als Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße infrage kommt.

Lösung:

Die Glockenform kann man der grafischen Darstellung entnehmen. Es gilt zwar f(x) ≥ 0 für $x \in R$, aber es ist $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(x) + 1)\,dx = 2\pi \neq 1$	

Einige stetige Zufallsgrößen, die nicht normalverteilt sind:

Im Folgenden geben wir einige stetige Zufallsgrößen an, die nicht normalverteilt sind, um dem Eindruck vorzubeugen, dass die Normalverteilung die einzige stetige Verteilung ist.

Quadratische Funktion als Dichtefunktion

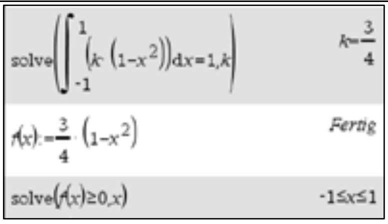
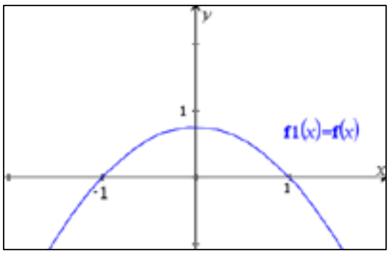
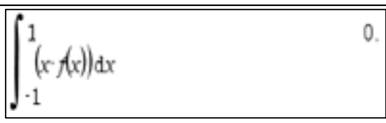
Eine stetig verteilte Zufallsgröße soll durch eine Dichtefunktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot (1 - x^2)\,, & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

beschrieben werden.

a) Begründen Sie, dass es sich nicht um eine normalverteilte Zufallsgröße handelt.
b) Bestimmen Sie k so, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte wird.
c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße.

Lösung:
Wir beschränken uns auf das Intervall [-1,1], da die Funktion ansonsten 0 ist.

Die Dichtefunktion ist eine quadratische Funktion und nicht die Gaußsche Glockenfunktion.	
Wir nutzen die Definition der Dichtefunktion und bestimmen k so, dass $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 1$ ist. Aus dieser Gleichung ergibt sich $k = \frac{3}{4}$. Dann prüfen wir, ob die Eigenschaft $f(x) \geq 0$ mit $x \in [-1, 1]$ erfüllt ist. Der CAS-Rechner bestätigt diese Ungleichung rechnerisch und grafisch. Hinweis: Die Rechnungen sind so einfach, dass sie auch ohne CAS machbar sind.	 
Der Erwartungswert wird durch E(X) = $\int_{-1}^{1} x \cdot f(x)dx$ berechnet. Er hat in unserem Beispiel den Wert 0.	

Die Gleichverteilung

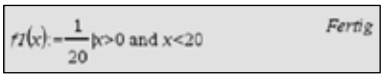
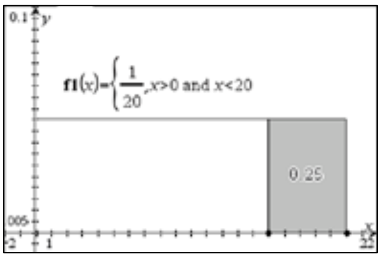
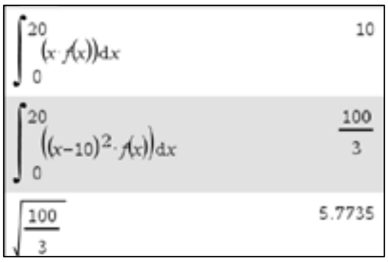
Tagsüber fährt vom Ilmenauer Busbahnhof alle 20 Minuten ein Bus zur Technischen Universität.

a) Modellieren Sie die Zufallsgröße X als Wartezeit eines zufällig eintreffenden Fahrgastes für den Bus. Verwenden Sie dabei die Dichtefunktion der Gleichverteilung mit dem Ansatz:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}\,, & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0, & sonst \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig eintreffender Fahrgast mehr als 15 Minuten auf den Bus warten muss. Stellen Sie diese grafisch dar.
c) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Wartezeit.

Lösung:

Die Wartezeit ist gleichverteilt mit $a = 0$ und $b = 20$. Also ist die Dichtefunktion: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & \text{für } 0 \leq x \leq 20 \\ 0, & sonst \end{cases}$ Integration über R bestätigt die Dichteeigenschaft.	
$P(X \geq 15) = \int\limits_{15}^{20} f(x)dx = \frac{1}{20}x\Big\|_{15}^{20} = \frac{20}{20} - \frac{15}{20}$ $= \frac{1}{4}$ Um die Funktion im CAS grafisch darzustellen, wird sie mit eingeschränktem Definitionsbereich definiert: $f_1(x) = \frac{1}{20} \| 0 \leq x \leq 20$ Für die Fläche müssen unter *Menü – Graph analysieren – Integral* die Ober- und Untergrenzen angepasst werden.	  
$E(X) = \int\limits_{0}^{20} x \cdot f(x)dx = \frac{1}{40}x^2\Big\|_{0}^{20} = \frac{400}{40} = 10$ $V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$ $= \int\limits_{0}^{20} (x-10)^2 \cdot f(x)dx = \frac{100}{3}$ $\sigma = \sqrt{\frac{100}{3}} \approx 5{,}77$ Der Erwartungswert der Wartezeit liegt bei 10 Minuten, die Standardabweichung bei rund 5,77 Minuten.	

Die Exponentialverteilung

Eine Zufallsgröße heißt exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, wenn ihre Dichtefunktion die Form

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{für } x \geq 0 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

hat.

a) Weisen Sie nach, dass für den Erwartungswert einer exponentialverteilten Zufallsgröße gilt:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

In einem Rechnernetzwerk soll die Wartezeit für einen Druckauftrag als exponentialverteilt mit einem Erwartungswert von 10 Minuten betrachtet werden.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Druckauftrag höchstens 15 Minuten bis zur Abarbeitung warten muss. Stellen Sie diese grafisch dar.

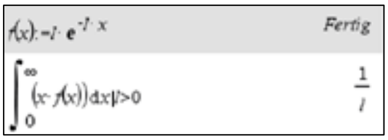
c) Bestimmen Sie die Standardabweichung für die Wartezeit.

Lösung:

<table>
<tr>
<td>Der Erwartungswert ergibt sich mit partieller Integration

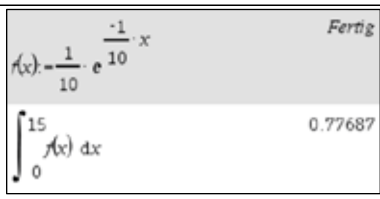
$$E(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = x\left(-e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(-e^{-\lambda x}\right) dx$$

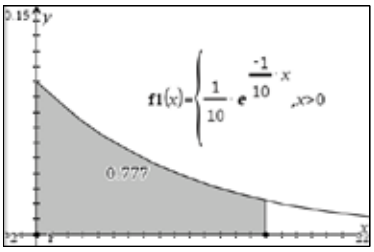
$$= 0 - \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^\infty = 0 + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \cdot 0} = \frac{1}{\lambda}$$

oder mittels CAS.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>

$$10 = E(X) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{10}$$

$$P(X \leq 15) = \int_0^{15} \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}x} = -e^{-\frac{1}{10}x}\Big|_0^{15} \approx 0{,}78$$

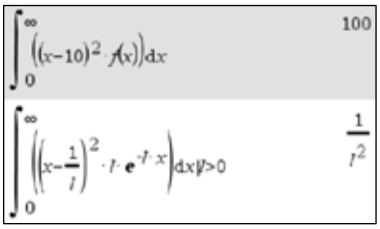
Die grafische Darstellung am CAS erfolgt analog zur vorherigen Aufgabe.</td>
<td>


</td>
</tr>
<tr>
<td>

$$V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

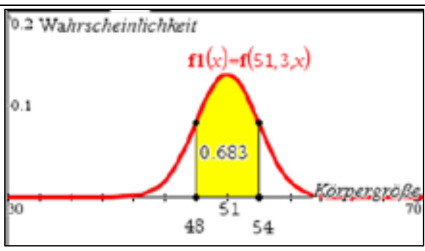
$$= \int_0^\infty (x-10)^2 \cdot f(x) dx = 100$$

$\sigma = \sqrt{100} = 10$

Die Standardabweichung beträgt also 10 Minuten. Für die Exponentialverteilung lässt sich nachrechnen, dass Standardabweichung und Erwartungswert übereinstimmen.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Berechnung von Intervallwahrscheinlichkeiten für normalverteilte Zufallsgrößen mithilfe des bestimmten Integrals

Wir greifen auf das Beispiel von Seite 9 zurück und betrachten die Körpergröße von Neugeborenen als normalverteilte Zufallsgröße mit dem Erwartungswert 51 cm und der Standardabweichung 3 cm.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborenes zwischen 45 cm und 55 cm groß ist. Ergebnis: $P(45 \leq X \leq 55) \approx 0{,}886$	$\int_{45}^{55} f(51,3,x)\,dx$ 0.886039
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborenes 57 cm groß ist. Nach Definition ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $P(X=57)=\int_{57}^{57} f_{51;3}(x)\,dx=0$ Es gibt natürlich Neugeborene, deren Körpergröße mit 57 cm angegeben wird. Wenn im Alltagsgebrauch von einer Körpergröße von 57 cm Gebrauch gemacht wird, so ist (in Abhängigkeit von der Messgenauigkeit) z. B. eine Körpergröße im Intervall [56,5; 57,5) gemeint. Annahme: Diese Größe wird für alle Neugeborenen mit einer realen Größe von 56,5 cm bis 57,5 cm eingetragen. Unter dieser Annahme gilt dann: $P(56{,}5 \leq X < 57{,}5) \approx 0{,}018$	$\int_{56.5}^{57.5} f(51,3,x)\,dx$ 0.018246
Ermitteln Sie die Körpergrößen der 20 % kleinsten Kinder. Ergebnis: $P(-\infty \leq X \leq a) = 0{,}2$ führt auf $a \approx 48$. Bis zu einer Körpergröße von 48 cm sind die 20 % kleinsten Kinder zu finden.	$\text{solve}\left(\int_{-\infty}^{a} f(51,3,x)\,dx=0.2,a\right)$ ▸ $a=48.4751$
Zeigen Sie mithilfe des Werkzeugs *Graph analysieren – Integral*, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der die Werte um genau eine Standardabweichung vom Erwartungswert nach links und rechts abweichen, ca. 68 % beträgt.	

Werkzeuge des TI-Nspire™ CAS für normalverteilte Zufallsgrößen

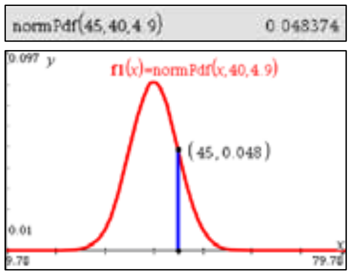


Abb. 1.4 Der normPdf-Befehl

Der Befehl $\boldsymbol{normPdf(x,\mu,\sigma)}$ liefert den Wert der Dichtefunktion $f_{\mu;\,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$ an der Stelle x.
In der nebenstehenden grafischen Darstellung kann dieser Wert als Länge der blauen Strecke interpretiert werden. Beachten Sie, dass dieser Wert nicht etwa eine Wahrscheinlichkeit repräsentiert, sondern den Wert der Dichtefunktion an der Stelle x.
Der Befehl $normPdf(x,\mu,\sigma)$ wird v. a. zur grafischen Darstellung der Funktion $f_{\mu;\,\sigma}(x)$ verwendet.

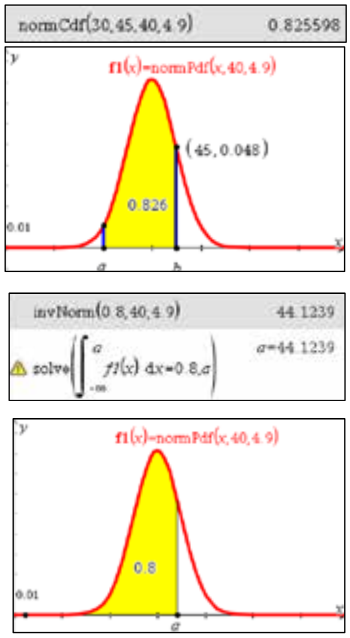


Abb. 1.5 Der normCdf-Befehl

Mit dem Befehl $\boldsymbol{normCdf(a,b,\mu,\sigma)}$ wird die Wahrscheinlichkeit des Auftretens der normalverteilten Zufallsgröße X ~ $N(\mu;\ \sigma)$ zwischen der unteren Grenze a und der oberen Grenze b berechnet.
Diese Wahrscheinlichkeit P(a < X < b) oder auch P(a ≤ X ≤ b) entspricht dem Wert des Integrals

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}dx$$

und wird als Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall [a; b] interpretiert.
Ist umgekehrt der Wert der Wahrscheinlichkeit p = P(X < a) bzw. p = P(X ≤ a) gegeben und wird die zugehörige obere Grenze a gesucht, kann der Befehl $\boldsymbol{invNorm(p,\mu,\sigma)}$ verwendet werden.
Das ist gleichbedeutend mit der Lösung der Gleichung

$$\int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}dx=p$$

Das Modell „Normalverteilung“ und seine „Tücken“[12]

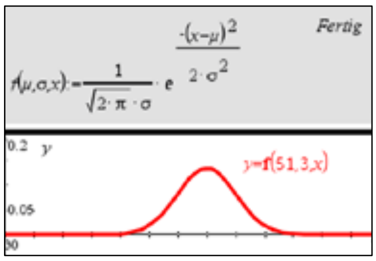


Abb. 1.6 Glockenkurve für das Modell der Neugeborenen

Wir gehen zunächst davon aus, dass sich die Körpergröße von Neugeborenen (von der Maßeinheit Zentimeter abgesehen) durch eine normalverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern $\mu=51 \text{ und } \sigma=3$ modellieren lässt, obwohl Folgendes gilt:

(1) Die Zufallsgröße X kann auch negative Werte annehmen, die Körpergröße dagegen nicht.

(2) Es kann X ≥ 100 sein, was aber für die Körpergröße Neugeborener nicht gilt.[13]

[12] Vgl. Lehrbuch Mathematik Gymnasiale Oberstufe; Qualifikationsphase – Brandenburg, Duden Paetec, Berlin, 2012, S. 444
[13] „Am 2. August um 16.00 Uhr wurde im Krankenhaus des Unternehmens Hegang Mining in Hegang in der nordostchinesischen Provinz Heilongjiang das größte Baby der Welt geboren. Der Junge maß bei seiner Geburt 75 Zentimeter und war damit um 9 Zentimeter länger als das bisherige „Superbaby“. Der neue Rekordhalter wog mit 7,05 Kilogramm rund 80 Gramm weniger als das schwerste Baby der Welt und belegt damit Platz zwei.“
gesendet am 12/04/08 um 18:09
Quelle: http://forum.gofeminin.de/forum/bebeestla/__f20632_bebeestla-Grosstes-Baby-der-Welt-geboren.html

(3) Es ist P(X = 51) = $\int_{51}^{51} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot 3} \cdot e^{-\frac{(x-51)^2}{2\cdot 3^2}} dx$ = 0, obwohl Körpergrößen von 51 cm bei Neugeborenen im Alltagsgebrauch relativ häufig angegeben werden.

Ein Analysieren und Abwägen dieser Probleme ergibt:

normCdf(-∞,0,51,3)	0.
normCdf(100,∞,51,3)	3.02344E-60
normCdf(50.5,51.5,51,3)	0.132368

(1) P(X < 0) ist beinahe null, also vernachlässigbar klein.
(2) P(X ≥ 100) analog
(3) Die Größenangabe „51 cm“ repräsentiert ein Intervall, dessen Grenzen sich aus der vereinbarten Messgenauigkeit ergeben. Geht man von ganzzahligen Zentimeterwerten aus, so kann die Angabe „51 cm“ bedeuten, dass die Körpergröße im Intervall 50,5 ≤ X < 51,5 liegt. Für dieses Intervall nimmt die Wahrscheinlichkeit einen positiven Wert an.
Hinweis: Für eine normalverteilte Zufallsgröße gilt als Folge der Modellierung stets P(X = a) = 0, weil die untere und die obere Integralgrenze übereinstimmen.

Im Ergebnis unserer Überlegungen zu den genannten Problemen und wie wir später noch zeigen werden, lässt sich die Körpergröße Neugeborener in der Tat durch eine Normalverteilung modellieren.

Hühnerfarm – Intervallwahrscheinlichkeiten ermitteln

Eine Hühnerfarm mit sehr vielen Hühnern ermittelt eine Woche lang die Masse von jedem gelegten Ei. Wir modellieren die Zufallsgröße X: „Masse eines Eis in Gramm“ mithilfe einer Normalverteilung mit $\mu = 55 \text{ und } \sigma = 3$.

a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse für zufällig der Produktion entnommenen Eier:
A: Ein Ei wiegt mindestens 50 g.
B: Die Masse der Eier liegt zwischen 50 g und 60 g.
b) Diskutieren Sie den Sachverhalt: Ein Ei wiegt 53 g.
c) Ermitteln Sie, welches Mindestgewicht die 35 % schwersten Eier haben.

Lösungen:

Zu a)

P(A) = $P(X \geq 50) \approx 0{,}952$
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ei mindestens 50 g wiegt, liegt bei ca. 0,952. (Oder: Etwa 95,2 % der Eier wiegen mindestens 50 g.)
P(B) = $P(50 < X < 60) \approx 0{,}904$
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse der Eier zwischen 50 g und 60 g liegt, beträgt ca. 0,904.

normCdf(50,∞,55,3)	0.95221
normCdf(50,60,55,3)	0.904419

Zu b)

Im Modell Normalverteilung gilt, da es sich um eine stetige Verteilung handelt, $P(X = 53) = 0$. Nehmen wir allerdings an, dass sich durch die Messgenauigkeit Eier mit einem Gewicht von 53 g in einem Intervall von [52,5;53,5) befinden, so gilt: $P(52{,}5 \leq X < 53{,}5) \approx 0{,}106$	normCdf(52.5,53.5,55,3) 0.106209

Zu c)

$P(X \geq a) = 0{,}35$ Dies ist gleichbedeutend mit $P(X < a) = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$. Es ergibt sich $a \approx 56{,}156$. Das Mindestgewicht der 35 % schwersten Eier beträgt ca. 56,2 g.	invNorm(0.65,55,3) 56.156 © Probe: normCdf(56.156,∞,55,3) 0.349995

Die Sigma-Regeln

Berechnen Sie für mehrere selbstgewählte Werte von μ und σ die Wahrscheinlichkeiten $\int_{\mu-c\cdot\sigma}^{\mu+c\cdot\sigma} f_{\mu;\,\sigma}(x)dx$ mit $f_{\mu;\,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$ für $c \in \{1, 2, 3\}$. Informieren Sie sich, was man unter den $\boldsymbol{\sigma}-$ **Regeln („Sigma-Regeln")** der Normalverteilung versteht, und erläutern Sie die Zusammenhänge zwischen den Wahrscheinlichkeiten der Abweichungen vom Erwartungswert um ganzzahlige Vielfache der Standardabweichung auch mithilfe einer grafischen Darstellung.

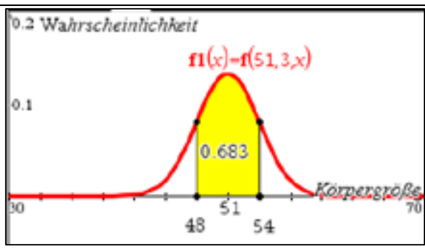
Lösung:
Wir betrachten einige normalverteilte Zufallsgrößen:

μ	0	20	100	-32
σ	1	3	15	6

Die gesuchten Intervallwahrscheinlichkeiten werden mit dem Befehl normCdf bestimmt.

```
mü:=0 ▸ 0   si:=1 ▸ 1
normCdf(mü−si,mü+si,mü,si) ▸ 0.682689
normCdf(mü−2·si,mü+2·si,mü,si) ▸ 0.9545
normCdf(mü−3·si,mü+3·si,mü,si) ▸ 0.9973
```

- Im Intervall der Abweichung $\pm 1 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert sind 68,27 % aller Werte zu finden,
- Im Intervall der Abweichung $\pm 2 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert sind 95,45 % aller Werte zu finden,
- Im Intervall der Abweichung $\pm 3 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert sind 99,73 % aller Werte zu finden.



Die Sigma-Regeln stehen nicht in den Bildungsstandards. Aber im Sinne intelligenten Übens des Umgangs mit dem Befehl normCdf erscheint es didaktisch sinnvoll, diese Regeln zu thematisieren. Auch sind sie für das inhaltliche Verständnis normalverteilter Zufallsgrößen wichtig.

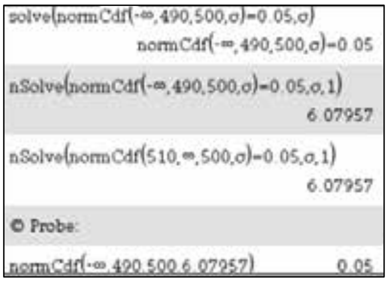
Abfüllen von Salz – Berechnen der Standardabweichung

Beim Abfüllen von Salz in 500-Gramm-Kartons kann die Abfüllmenge als normalverteilt aufgefasst werden. In 5 % dieser Kartons werden weniger als 490 g, in 5 % mehr als 510 g Salz abgefüllt. Ermitteln Sie die Standardabweichung der Füllmengen vom Sollwert 500 g.

Lösung:

Gesucht ist die Standardabweichung σ einer normalverteilten Zufallsgröße, von der neben dem Erwartungswert $\mu = 500$ zwei Intervallwahrscheinlichkeiten bekannt sind:
$P(X < 490) = 0{,}05$ bzw. $P(X > 510) = 0{,}05$

Die gesuchte Größe wird näherungsweise unter Verwendung von $P(X < 490) = 0{,}05$ bestimmt:
Der Befehl
$solve(normCdf(-\infty, 510{,}490, \sigma) = 0.05, \sigma)$ führt nicht zum Ziel.
Es ist deshalb der Befehl zur näherungsweisen Lösung
$\boldsymbol{nsolve(normCdf(-\infty, 490, 500, \sigma) = 0.05, \sigma, 1)}$
zu verwenden. Dieser Befehl verlangt einen Startwert (hier ist z. B. „**1**“ als Startwert geeignet). In der Regel kann der Startwert geschätzt werden, z. B. mithilfe einer grafischen Darstellung wie in nebenstehendem Bild.
Ergebnis: $\sigma \approx 6{,}08$
Den gleichen Wert erhält man bei Nutzung von $P(X > 510) = 0{,}05$.
Hinweis: Ein ähnliches, aber nicht ganz so einfach zu lösendes Beispiel finden Sie auf Seite 47.



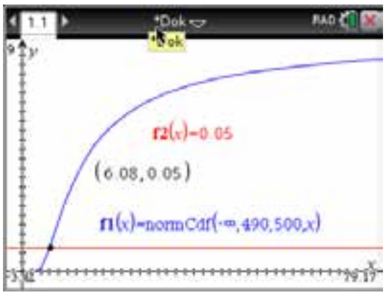
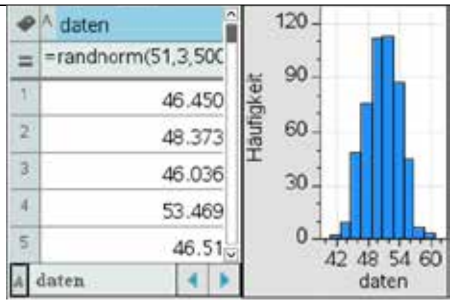


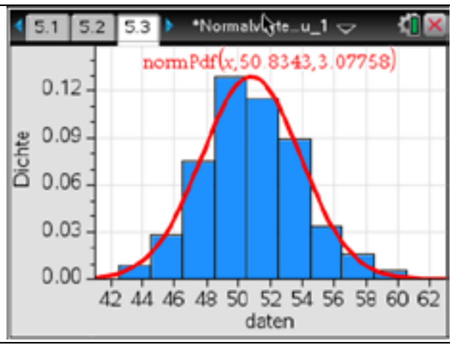
Abb. 1.7 numerische und grafische Lösung

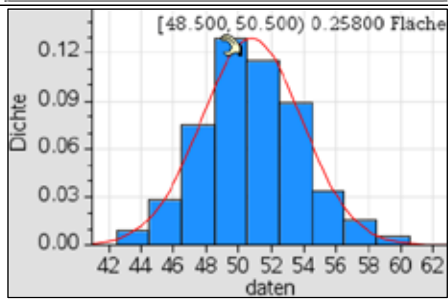
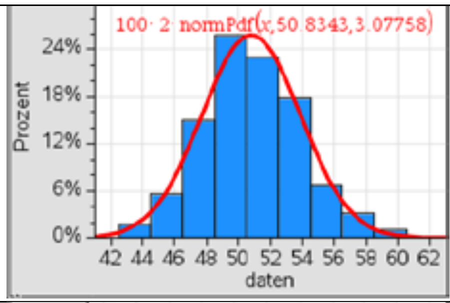
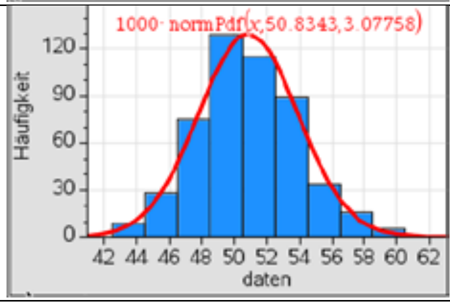
Simulation normalverteilter Zufallsgrößen/Histogramme

Wir simulieren die Körpergrößen von 500 Neugeborenen, wenn dafür eine Normalverteilung mit dem Erwartungswert 51 cm und einer Standardabweichung von 3 cm zugrunde gelegt wird.
Lösung:

In *Lists&Spreadsheet* werden in der Spalte A mit dem Befehl **=randNorm(51, 3, 500)** 500 normalverteilte Zufallszahlen mit $\mu = 51$ und $\sigma = 3$ erzeugt und abgespeichert („daten“).
Diese Liste von Zufallszahlen wird in *Data& Statistics* zunächst als Punktdiagramm dargestellt, das sich über <Ctrl><Menü> in ein Histogramm umwandeln lässt. Nebenstehend ist ein solches Histogramm mit einer Säulenbreite von 2 zu sehen.



<table>
<tr><td>Mit <Ctrl><R> in der Liste „daten“ kann die Simulation beliebig oft wiederholt werden.</td><td></td></tr>
<tr><td>Über <Ctrl><Menü> lassen sich Maßstab und Säulenbreite einstellen. Wählt man den Maßstab Dichte, so hat die Fläche aller Rechtecksäulen zusammen den Wert 1.
Mit Menü – Analysieren – NormalPdf anzeigen wird eine Glockenkurve gezeichnet und die zugehörige Dichtefunktion angezeigt.</td><td></td></tr>
<tr><td>In einem Histogramm mit dem Maßstab Dichte repräsentiert der <u>Flächeninhalt</u> einer Rechtecksäule die zum jeweiligen Intervall (Säulenbreite) zugehörige relative Häufigkeit.

Es gilt: $\boldsymbol{Dichte} = \frac{\boldsymbol{relative\ Häufigkeit}}{\boldsymbol{Säulenbreite}}$</td><td></td></tr>
<tr><td>In einem Histogramm mit dem Maßstab Prozent wird die relative Häufigkeit der Daten in Prozent angezeigt. Die zugehörige Glockenkurve hat dann eine Gleichung der Form
$\boldsymbol{y = Säulenbreite \cdot 100 \cdot normpdf(x, \mu, \sigma)}$.</td><td></td></tr>
<tr><td>In einem Histogramm mit dem Maßstab Häufigkeit wird die absolute Häufigkeit der Daten angezeigt. Die zugehörige Glockenkurve hat dann eine Gleichung der Form
$\boldsymbol{y =}$
$\boldsymbol{Säulenbreite \cdot Gesamtanzahl\ der\ Daten \cdot}$
$\boldsymbol{normpdf(x, \mu, \sigma)}$.</td><td></td></tr>
</table>

Daten auf Normalverteilung prüfen

Wir testen durch Simulation, ob die Augensumme beim n-maligen Werfen von sechs Spielwürfeln durch eine Normalverteilung angenähert werden kann.

Lösung:

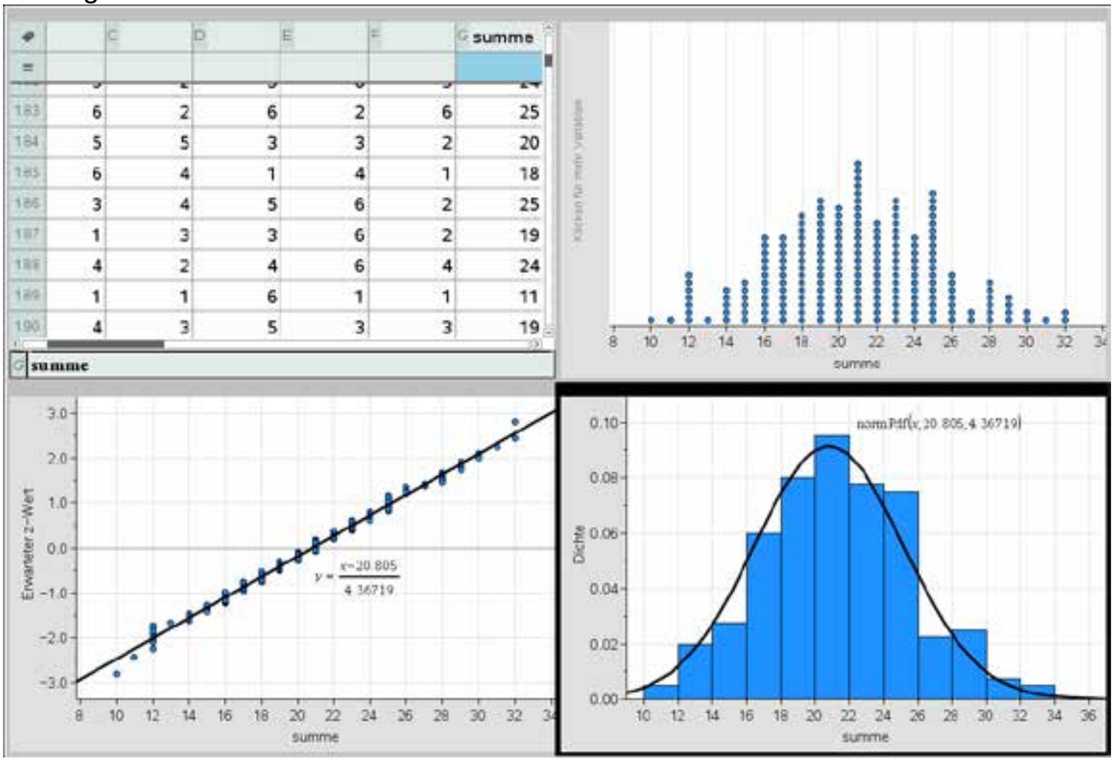


Abb. 1.8 Verschiedene Möglichkeiten zur Untersuchung der Normalverteilung

Links oben:
Zellen A1 bis F1:
Mit dem Befehl =randInt(1,6) wird das Werfen eines Spielwürfels simuliert, insgesamt also sechsmal simuliert.
Zelle G1:=sum(A1:F1); die Spalte G wird im Spaltenkopf mit einer Variablen benannt, z. B. „summe“.
Die Summe der geworfenen Augenzahlen wird ermittelt.
Die Anweisungen aus den Zellen A1 bis G1 werden bis in die Zeile 200 kopiert. (*Menü – Daten – Füllen*)
Rechts oben:
In der Anwendung Data&Statistics werden die Daten der Liste „summe“ als Punktdiagramm dargestellt.
Links unten:
Mit >Ctrl<>Menü> wird der Befehl ***Normal Wahrscheinlichkeitsdiagramm*** ausgelöst.
Die Datenpunkte werden um eine Gerade angeordnet. Je dichter sie an der Geraden liegen, desto besser lassen sich die Daten durch eine Normalverteilung modellieren. Der gleichzeitig angezeigten Geradengleichung (hier: $y = \frac{x-20{,}805}{4{,}36719}$) lassen sich der Erwartungswert (20,8) und die Standardabweichung (4,37) entnehmen.
Diese Anwendung ist eine „blackbox“, ihre Erläuterung würde den Rahmen dieses Beitrages und auch die Möglichkeiten im Unterricht sprengen.
Rechts unten:
Mit <Ctrl><Menü> wird der Befehl „Histogramm“ ausgelöst. Mit *Menü – Analysieren – NormalPdf anzeigen* kann eine Glockenkurve mit zugehöriger Gleichung erzeugt werden.

Die Werte für Erwartungswert und Standardabweichung stimmen mit den vorher erzeugten überein.
Mit <Ctrl><R> kann die Simulation beliebig oft wiederholt werden. Die Ergebnisse variieren, aber es lässt sich (fast) immer gut auf eine Normalverteilung schließen, obwohl man natürlich bei einer solchen Simulation nur endlich viele, also diskrete Werte vorliegen hat. Der Fakt, dass die Normalverteilung dennoch ein gutes Modell für den Versuch liefert, liegt an dem in der Einleitung erwähnten zentralen Grenzwertsatz. Es folgt also unmittelbar aus der Tatsache, dass es sich bei der Augensumme von n Würfeln um eine additive Überlagerung unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen handelt.

Bestimmung von μ und σ einer durch Klassen und Häufigkeitsliste gegebenen Datentabelle

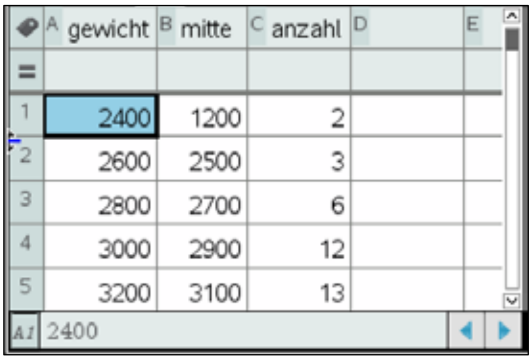
Für das Körpergewicht Neugeborener ist nebenstehende Datentabelle gegeben[14].

Ermitteln Sie μ und σ unter der Annahme, dass das Körpergewicht mit einer Normalverteilung modelliert wird.
Argumentieren Sie, ob die Annahme einer Normalverteilung für diese Daten gerechtfertigt ist.

Körpergewicht G in g	Anzahl
G ≤ 2400	2
$2400 < G \leq 2600$	3
$2600 < G \leq 2800$	6
$2800 < G \leq 3000$	12
$3000 < G \leq 3200$	13
$3200 < G \leq 3400$	23
$3400 < G \leq 3600$	16
$3600 < G \leq 3800$	18
$3800 < G \leq 4000$	5
$4000 < G \leq 4200$	1
4200 < G	1

Lösung:

Die linke „Randklasse“ der Körpergewichte kann höchstens eine Breite von 2400 haben. Aus Symmetriegründen wählen wir auch für die rechte „Randklasse“ eine Breite von 2400. Aufgrund der Informationen zu den gegebenen Daten wären aber auch andere Breiten für die Randklassen möglich.
Alle anderen Gewichtsklassen haben eine Breite von 200.
Für eine grafische Veranschaulichung bestimmen wir die Klassenmitten (Spalte B).
Da die Daten nicht in einer Urliste gegeben sind, lassen sie sich mit dem TI-Nspire nicht als *Schnellgraph* darstellen.
Die Daten „mitte“ und „anzahl“ werden stattdessen über *Menü – Daten – Ergebnisdiagramm* als Histogramm mit einer Säulenbreite von 200 dargestellt.



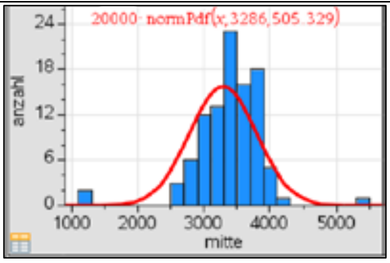
	A gewicht	B mitte	C anzahl	D	E
=					
1	2400	1200	2		
2	2600	2500	3		
3	2800	2700	6		
4	3000	2900	12		
5	3200	3100	13		

A1 2400

Eine Glockenform ist nur mit viel „Nachsicht“ erkennbar. Und das gilt, selbst wenn man die eventuell mit einer nicht exakten Breite aus-

[14] Vgl. Heinz Böer, „Normalverteilung“, MUED, Schriftenreihe Einführungen, Nottuln-Appelhüsen, 2013, Seite 20

gestatteten „Randklassen“ vernachlässigt. Eigentlich kann man hier nur von der bekannten Tatsache ausgehen, dass das Körpergewicht Neugeborener bei größeren Stichprobenumfängen als normalverteilt angesehen werden kann und deshalb hier näherungsweise eine Normalverteilung unterstellen. Die mit *Menü – Analysieren – NormalPdf anzeigen* erzeugte Glockenkurve zeigt einen Erwartungswert von $\mu = 3286$ g und eine Standardabweichung $\sigma \approx 505$ g an. Der Faktor 20 000 ergibt sich aus dem Produkt $100 \cdot 200$, weil die Gesamtzahl der Kinder 100 und die Säulenbreite 200 betragen.



Gemäß der Sigma-Regeln müssen in der Ein-Sigma-Umgebung des Erwartungswertes ca. 68 % der Werte liegen, für die Aufgabe wäre dies das Intervall [3286-505; 3286+505] = [2781; 3791]. Das wären hier ungefähr die nebenstehenden Gewichtsklassen. In diesen befinden sich 88 der 100 Werte, also wesentlich mehr als 68 %. Das bedeutet, dass man für diese Stichprobe an dem Modell Normalverteilung zweifeln kann und den Sachverhalt z. B. durch weitere Stichproben untersuchen sollte.

$2600 < G \leq 2800$	6
$2800 < G \leq 3000$	12
$3000 < G \leq 3200$	13
$3200 < G \leq 3400$	23
$3400 < G \leq 3600$	16
$3600 < G \leq 3800$	18

Weitere Beispielaufgaben mit Kurzlösungen

Regentropfen

Es regnet über einen längeren Zeitraum. Die auf einer quadratischen Messfläche von einem Quadratmeter auftreffenden Regentropfen werden als reellwertige Zufallszahlen für die x- und y-Koordinate jeweils im Intervall von 0 bis 1 simuliert. Das obere linke Bild in Abbildung 1.9 zeigt zwei Listen mit jeweils 5000 Simulationsergebnissen für x- bzw. y-Koordinaten. Im oberen rechten Bild ist das Simulationsergebnis grafisch dargestellt. Das untere linke Bild zeigt nur die Verteilung der x-Koordinaten. Jede Säule hat eine Breite von 0,05, ihr Flächeninhalt ist ein Maß für die relative Häufigkeit. So sind z. B. in der ersten Säule alle Werte aus dem Intervall [0; 0,05] zusammengefasst und ihre relative Häufigkeit beträgt bei dieser konkreten Simulation 0,043. Aus der Festlegung ergibt sich die Höhe einer Säule als Verhältnis von relativer Häufigkeit der Daten aus dem Intervall zu ihrer Klassenbreite, genannt Häufigkeitsdichte oder kurz ***Dichte*** D und es gilt $D = \frac{rH}{\Delta x}$. Die Fläche aller Säulen beträgt 1 (siehe Histogramm in der Abb. 1.9 unten links).

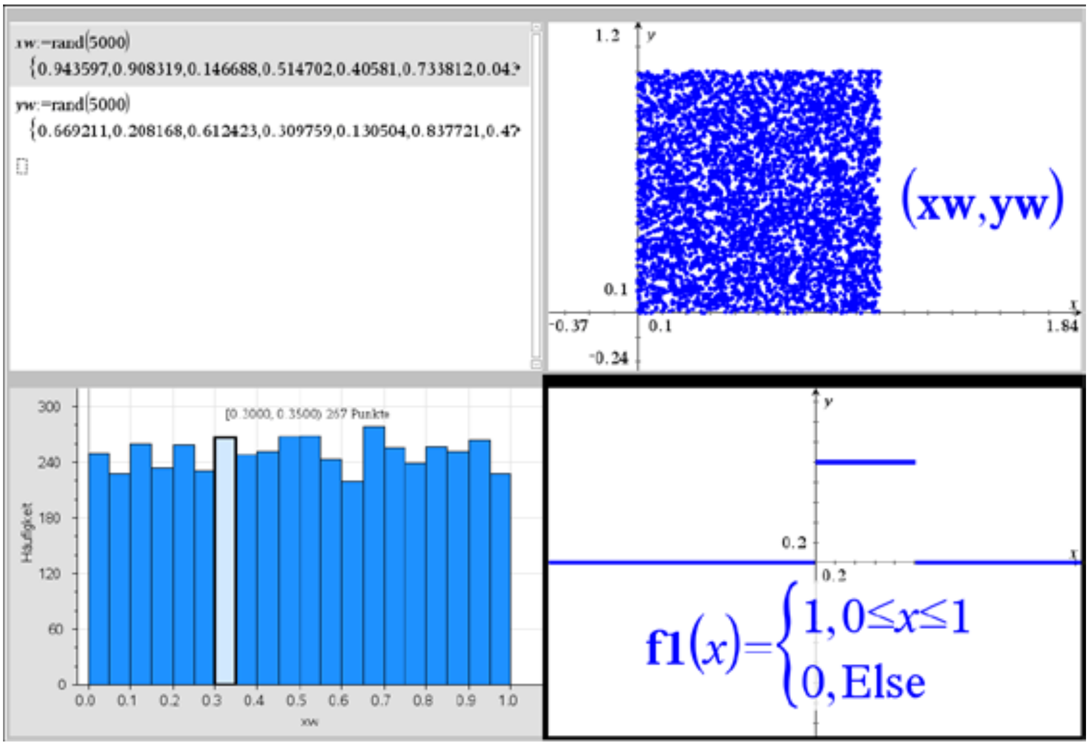


Abb. 1.9 Simulation der Regentropfen

a) Vollziehen Sie die Simulation nach.
b) Begründen Sie, dass die Funktion f1 im unteren rechten Bild als Dichtefunktion für die Zufallsvariable X: „x-Koordinate der Regentropfen“ infrage kommt.
c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für $P(0{,}3 \leq X \leq 0{,}8)$.

Lösungshinweise:
a) Individuell
b) f1 ist per Definition nie negativ. Die Fläche zwischen dem Graphen von f1 und der x-Achse hat den Inhalt 1.
c) $P(0{,}3 \leq X \leq 0{,}8) = 0{,}5$

Beispiel „Masse von Tabletten“

Insbesondere in der Pharmaindustrie spielt die Statistik mit Normalverteilungen eine große Rolle. Das folgende Beispiel soll diesen Sachzusammenhang illustrieren.

Die Masse von 100 einzelnen Tabletten aus einer laufenden Produktion wurde ermittelt. Es ergaben sich folgende Werte in mg.[15]

117,0	117,5	118,5	118,6	118,9
120,2	120,4	119,4	119,1	119,4
120,1	120,9	119,7	119,4	119,2
120,9	121,3	121,0	120,1	120,6
121,1	123,9	121,3	121,2	120,8
121,4	125,1	119,9	121,0	120,2
121,5	122,5	120,1	121,5	119,5
120,6	123,5	122,9	123,8	123,7
119,5	122,1	123,4	123,5	121,0
118,6	122,4	122,5	124,5	122,5
121,6	122,6	124,3	119,5	123,2
123,6	122,8	123,6	120,0	122,1
120,5	121,7	121,8	122,1	120,3
120,1	121,6	122,1	122,6	120,4
119,6	121,7	120,5	121,9	121,7
119,8	121,3	120,9	123,6	122,0
121,4	120,7	119,6	120,6	120,5
119,6	124,0	123,4	122,6	120,6
119,4	123,3	123,5	121,7	120,8
121,4	122,4	122,5	122,5	121,6

Abb. 1.10 Urliste einer Stichprobe von n = 100 Tablettenmassen (mg)

a) Für die statistische Auswertung muss zunächst überprüft werden, ob das Modell Normalverteilung adäquat ist. Prüfen Sie, ob sich die Masse der Tabletten durch eine Normalverteilung modellieren lässt.
b) Berechnen Sie nun die Wahrscheinlichkeit, dass die Masse der Tabletten nicht größer als 123 mg ist.

Lösungen:
Darstellung im Schnellgraph, NormalPdf einfügen
Normalwahrscheinlichkeitsdiagramm
Säulenbreite 1

[15] Quelle: http://www.deutscher-apotheker-verlag.de/uploads/tx_crondavtitel/datei-datei/9783804724396_p.pdf

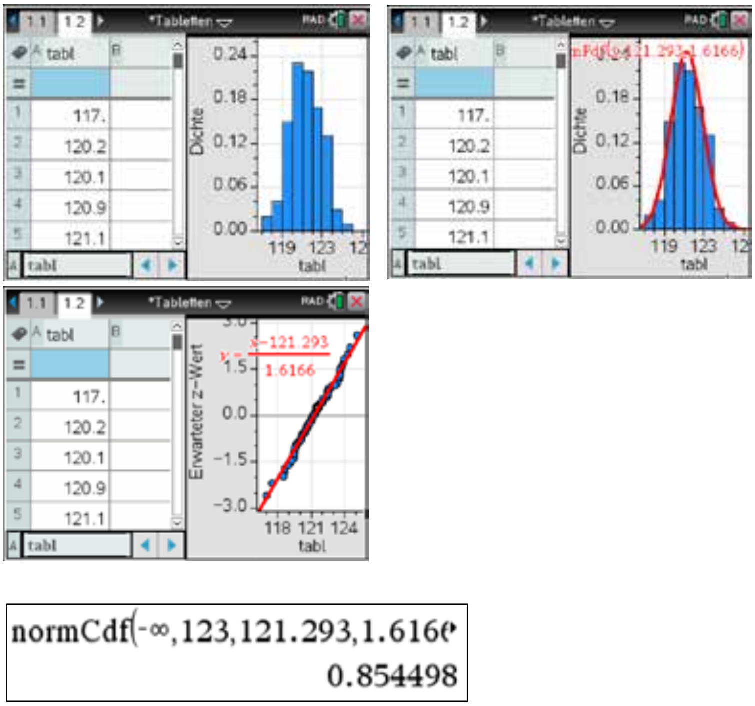


Abb. 1.11 Normalwahrscheinlichkeitsdiagramm und Lösung

Zugverspätungen

Durch die Zeitschrift ***test*** wurden 70.875 Regionalzüge auf ihre Verspätung hin anhand von Datenangaben zu Zugverspätungen („Aktuelle Ankunft/Abfahrt“ bei www.bahn.de) untersucht.[16]

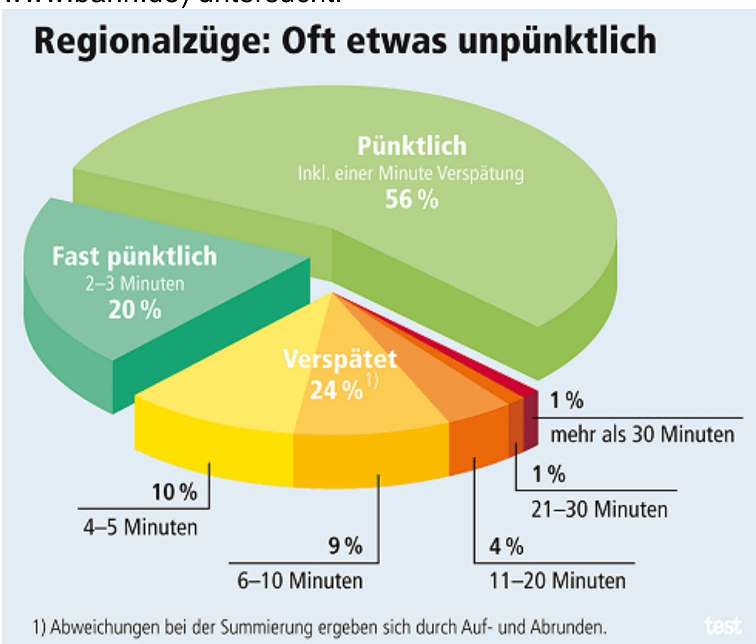


Abb. 1.12 Verspätungen von Regionalzügen, Quelle: test 2/2008, S. 78 ff.

a) Erstellen Sie ein Punktdiagramm für den Zusammenhang *Zeit* → *Anteil Verspätungen*. Verwenden Sie dabei für die Größe *Zeit* immer die linke Grenze jedes Teilintervalls als Wert für die Verspätung, also z. B. für das Intervall

[16] (Quellen: test 2/2008, S.78 ff; https://www.test.de/Deutsche-Bahn-Wie-puenktlich-fahren-die-Zuege-wirklich-1617492-2617492/

[2; 3] den Wert 2.

b) Zeigen Sie, dass die Punkte ungefähr auf dem Graphen einer on $f(x) = k \cdot e^{-k \cdot x}$ mit $x;\ k \in \mathbb{R}; x \geq 0;\ k > 0$ liegen. Geben Sie einen passenden Wert für k an.

c) Begründen Sie, dass die Funktion f die Eigenschaften einer Dichtefunktion erfüllt.

d) Berechnen Sie mithilfe von f die Wahrscheinlichkeit, dass ein Regionalzug höchstens 15 Minuten Verspätung hat.

Lösungshinweise:

Abb. 1.13 Lösungen

Beispiele für das Finden von weiteren Übungsaufgaben:

(1) „Lehrbuch Mathematik, Gymnasiale Oberstufe; Qualifikationsphase – Brandenburg“, Duden Paetec, Berlin, 2012

(2) „Lambacher Schweizer, Mathematik, Stochastik“, Ernst Klett Verlag Stuttgart, 2012

(3) Bigalke/Köhler „Mathematik 12, Thüringen“, Cornelsen, 2015

(4) Schmidt, Körner, Lergenmüller „Mathematik Neue Wege; Stochastik“ hrsg. von Günter Schmidt. Hannover [u.a.]: Schroedel, 2012.

2. Aspekte der beurteilenden Statistik I: Zweiseitige Signifikanztests

Hubert Langlotz und Andreas Prömmel

Einleitung

Die beurteilende Statistik ist das Teilgebiet der Stochastik, das über Stichprobenverfahren zum einen möglichst genaue Schlussfolgerungen über bestimmte Parameter (dies kann z. B. ein Ausschussanteil oder ein Mittelwert sein) in der Grundgesamtheit ermöglicht, dies bezeichnet man als Schätzen. Zum anderen geht es darum, eine aufgestellte Hypothese für eine Grundgesamtheit („die Partei wird bei der nächsten Wahl mindestens 50 % der Stimmen erhalten") mittels einer Datenerhebung in einer Stichprobe beurteilen zu können, dies bezeichnet man als Testen. Eine typische Frage ist dabei, ob Unterschiede in den beobachteten Daten durch Zufall erklärt werden können oder nicht.

Da alle Autoren aus Thüringen sind, zitieren wir hier kurz aus dem Thüringer Lehrplan von 2013. Dort ist festgelegt, dass für alle Schüler das Thema 1 obligatorisch ist, das Thema 2 ist dann ein zur Wahl stehendes Vertiefungsgebiet.

Thema 1	Thema 2 (Wahlthema)
Der Schüler kann · exemplarisch statistische Erhebungen planen und beurteilen, · zweiseitige Signifikanztests für binomialverteilte Zufallsgrößen durchführen und interpretieren.	Der Schüler kann · Hypothesentests (auch einseitige Signifikanztests und Alternativtests) für binomial- und normalverteilte Zufallsgrößen durchführen und interpretieren, · die Unsicherheit der Ergebnisse von Hypothesentests begründen.

Tab. 2.1 Beurteilende Statistik im Thüringer Lehrplan

Statistische Erhebungen planen und beurteilen

Zu den originären Aufgaben der Statistik zählt die Analyse von Daten. Unser Alltag wird immer mehr von Daten, vor allem auch Massendaten (big data) durchdrungen: in Form von Einschaltquoten, Kundenprofilen, Bildungswegen etc. Schüler sollten sich wenigstens einmal in ihrer Schullaufbahn als Datendetektiv in einen idealtypischen Kreislauf von Problem-Plan-Data-Analysis-Conclusion begeben (Abb. 2.1).

Der erste Schritt sollte hierbei sein, sich Klarheit darüber zu verschaffen, was geschätzt oder getestet werden soll. Aus vielerlei Gründen ist es meist nicht möglich, bei Untersuchungen die Daten in Form einer Kompletterfassung (Grundgesamtheit) zu erheben. Deswegen werden Stichproben erhoben und diese untersucht. Dabei können, allein bedingt durch Zufallsschwankungen, Stichprobenfehler bei der Erhebung und Darstellung von Daten gemacht werden. Insbesondere die Wahl der Stichprobe stellt sich hierbei als zentral dar. Bei der Wahl der Stichprobe ist darauf zu achten, dass jedes Element der Grundgesamtheit die gleiche Chance haben muss, in die Stichprobe zu kommen (vgl. Büchter & Henn, S. 396). Nur dann können die gewonnenen Daten zur Interpretation von Kenngrößen der Grundgesamtheit genutzt werden. Dies heißt auch, dass bei der Planung der Untersuchung die Größe der Stichprobe oft die zentrale Größe darstellt. Einerseits sind die Ergebnisse von statistischen Tests im Normalfall umso genauer, je größer der verwendete Stichprobenumfang ist, andererseits aber kosten größere Stichproben mehr Zeit und sind in der Regel kostenintensiver.

Exemplarisch lassen sich Stichproben im Unterricht schnell durch Abstimmungen bzw. durch Datenerfassung zu interessanten Fragestellungen erheben. Ideen und Rohdaten dazu finden sich auf der Internetseite von CensusAtSchool (Neuseeland), bei Biehler et al. (2011) oder auch in der KaDiSto-Reihe der Universität Kassel:

- Verbringen Mädchen im Mittel mehr Zeit mit Hausaufgaben als Jungen?
- Haben Jungen im Mittel einen schwereren Schulranzen als Mädchen?
- Sind Jungen im Mittel größer als Mädchen?
- Verbringen Mädchen im Mittel mehr Zeit in sozialen Medien als Jungen?

Eine weitere Möglichkeit für das Erheben von Stichproben ist die händische Simulation mit idealtypischen Zufallsgeräten. Ziel ist es, für „Was wäre wenn“-Situationen eine simulierte Häufigkeitsverteilung zu erzeugen, mit deren Hilfe man z. B. ein beobachtetes Ergebnis dahingehend bewerten kann, ob es auch allein durch Zufall hätte entstehen können. Tests auf Fairness, Geschmackstests oder Tests auf eine besondere Fähigkeit hin sind dafür typische Aufgabenstellungen. Auch das 10-20-Test-Problem lässt sich hier verorten. (Meyfarth 2006).

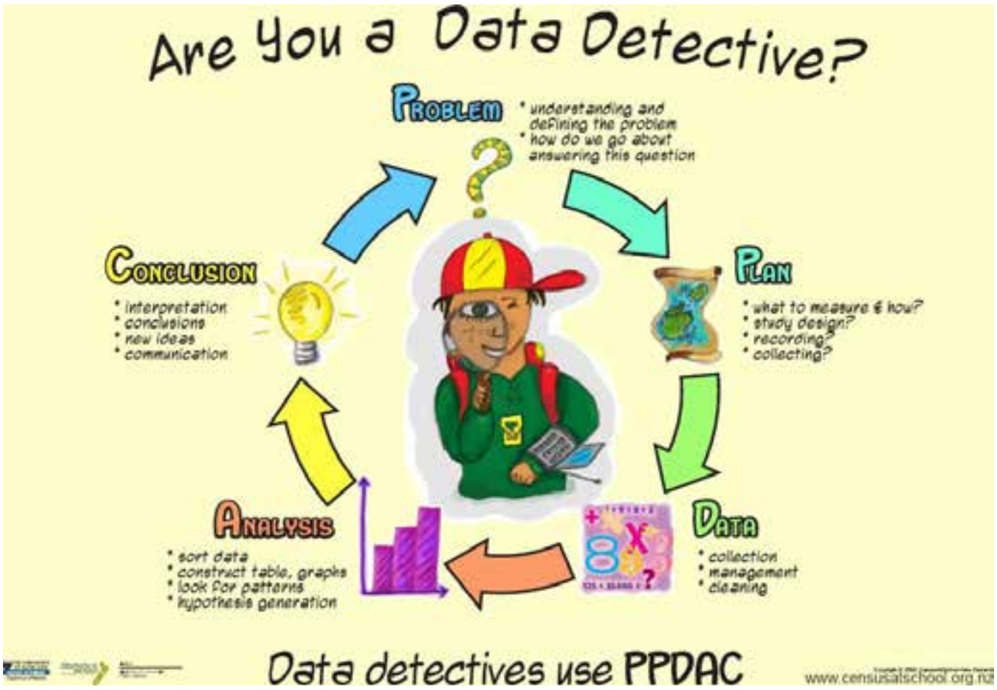


Abb. 2.1 PPDAC-Kreislauf (Quelle: www.censusatschool.org.nz)

Statistische Tests und Nutzung digitaler Werkzeuge

Mit einem statistischen Test soll ausgehend von Stichproben eine bestimmte Hypothese über eine Grundgesamtheit überprüft werden. Beispiele wären:

(1) Der Mädchenanteil in der Bevölkerung beträgt 50 %. (zweiseitiger Test)
(2) Die meisten Weißbiergläser fassen weniger als 0,5 l. (einseitiger Test)
(3) Der Anteil defekter Smartphone-Akkus ist entweder 10 % oder 30 %. (Alternativtest – wird in diesem Heft nicht thematisiert)

Mit dem TI-Nspire™ CAS steht ein digitales Werkzeug zur Verfügung, das verschiedene Zugänge zum Testen und Schätzen ermöglicht. Einige dieser Möglichkeiten wollen wir im Folgenden vorstellen.

Zwei mögliche Einstiegsbeispiele

A) Münztest

Ist das Werfen einer Münze ein faires Spiel?

Experiment: Wann würden wir meinen, dass eine Münze nicht fair ist? Jeder Schüler wirft eine neue 1-Cent-Münze 30 Mal. Wir zählen, wie häufig Kopf erscheint.

Abb. 2.2 Münze und Ergebnisse eines Experiments

Man könnte nun die Schüler auffordern, auf Basis der erhobenen Daten informell zu beurteilen, wann wir die Hypothese „Die Münze ist fair“ anzweifeln.
Eine mögliche Antwort könnte z. B. sein:
Bei 30 Würfen würden wir die Münze noch als fair ansehen, wenn die Anzahl von Kopf mindestens 12 und höchstens 18 beträgt.

Hieran könnte sich, um die Datenbasis zu erhöhen, eine erste einfache Simulation des Vorgangs mit dem digitalen Werkzeug anschließen. Wichtig ist nun die Logik des Vorgehens:
Unter der Annahme, dass die Münze korrekt ist (p = 0,5), werfen wir eine (digitale) Münze 30 Mal und wiederholen diesen Vorgang 1.000 Mal und beobachten die Verteilung der Zufallsgröße X: „Anzahl von Kopf beim dreißigfachen Münzwurf“.
Mit dem Befehl randbin(30,0.5,1000) wird das Experiment 1.000 Mal simuliert und man erkennt im Histogramm schon, dass hin und wieder weniger als 12 bzw. mehr als 18 Mal Kopf auftreten kann. Im rechten Fenster wurden diese Ereignisse mit dem countif-Befehl gezählt. Schon hier bietet es sich an, zu fragen: Was bedeuten die Zahlen 105 und 99 bezogen auf unsere Annahme.

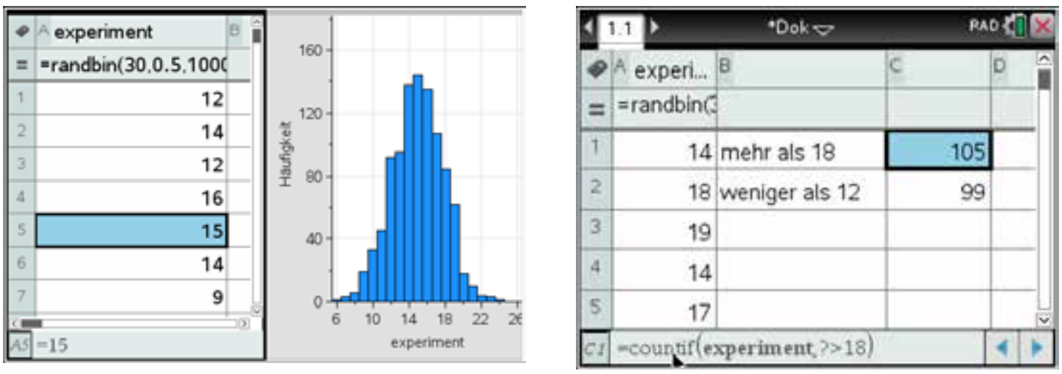


Abb. 2.3 Simulation und Auswertung mit der Lists&Spreadsheet-Applikation

Die Grundidee besteht nun darin, dass man ein in einer Stichprobe beobachtetes Ergebnis danach bewertet, wie wahrscheinlich ein solches oder ein noch extremeres Ergebnis unter der Annahme der zu beurteilenden Hypothese (Nullhypothese) ist. Ist diese Wahrscheinlichkeit (der sogenannte P-Wert, auch als bedingte Überschreitungswahrscheinlichkeit bezeichnet) klein, ist die Nullhypothese anzuzweifeln. Nimmt man das obige Resultat, so lässt sich sagen, dass in ca. 20 % der Fälle Ergebnisse entstehen, die an der Hypothese zweifeln lassen. Das Stichprobenergebnis liefert demnach keine Evidenz gegen die Nullhypothese. An der Fairness der Münze ist nicht zu zweifeln. Abweichungen von 4 oder mehr vom erwarteten Wert 15 Mal Kopf bei 30 Münzwürfen sind gar nicht so selten, wie man vielleicht vorab vermutet hätte. Begreift man den P-Wert als Maß für die Verträglichkeit von Daten (D) und Nullhypothese (H_0), lässt sich formelarm und rein intuitiv ein beobachtetes Stichprobenergebnis D beurteilen: Je größer der P-Wert, umso größer die Verträglichkeit von D und H_0. Oder in der Sprache des Testens: Je kleiner der P-Wert, umso mehr kann man an H_0 zweifeln.[17]

P-Wert (Wahrscheinlichkeit)	Beurteilung/Interpretation
≤ 0.1 %	Sehr starke Evidenz gegen H_0
1 %	Starke Evidenz gegen H_0
5 %	Mittlere Evidenz gegen H_0
10 %	Schwache Evidenz gegen H_0
> 12 %	Keine Evidenz gegen H_0

Tab 2.2 Interpretationen zur Größe des P-Wertes (Wild & Seeber 2000, S. 379)
Dieses sehr einfache Verfahren beruht auf den Arbeiten von R. A. Fisher und findet heute in vielen Wissenschaftsbereichen seine Anwendung.

Ob man hier schon weitergehende Fragen thematisiert (Was könnte man tun, um diesen P-Wert zu verringern? Oder: Was passiert, wenn man die Stichprobengröße vergrößert? Oder auch: Könnte man nicht auch mit einer verbeulten Münze bei dreißig Würfen 15 Mal Kopf erzielen?), entscheidet sich in der jeweiligen Unterrichtssituation.
Relativ einfach ist es aber schon hier, verschiedene P-Werte zu berechnen und zu zeigen, wie man diese verkleinern kann.

Abb. 2.4 Berechnung von P-Werten mit binomcdf()

B) Vermischte Kartenspiele

Zwei Kartenstapel mit jeweils 52 Karten und der gleichen Anzahl an roten und schwarzen Spielkarten werden gemischt und wieder in zwei gleich große Stapel geteilt. Man möchte mit einem Testverfahren (mit einer vorgegebenen statistischen Sicherheit von 95 %) herausfinden, ob sich die Zusammensetzung von roten und schwarzen Karten in den Stapeln geändert hat. Wählen Sie einen der beiden präparierten Stapel aus und initiieren Sie folgende Gesprächssituation:

1. Jeder von euch zieht genau eine Karte, merkt sich die Farbe und legt diese Karte wieder zufällig in den Stapel. Dann zählen wir, wie viele rote Karten gezogen worden sind.
2. Bei welchem Anteil an roten Karten würdet ihr an der Hypothese „Der Anteil von roten und schwarzen Karten im Kartenstapel ist gleich" zweifeln?

Nach dem praktischen Experiment (Erheben einer Stichprobe im Umfang der Schüleranzahl) bietet es sich an, den TI-Nspire™ CAS zur (teilautomatischen) Simulation zu nutzen. Durch Sortieren und Auszählen lassen sich formelarm die mittleren 95 % der Verteilung ermitteln, die man für den Anteil an roten Karten mit p = 0,5 (bei n = Schüleranzahl, hier n = 28) erwarten würde (Abb. 2.5 und 2.6).

[17] Humphrey (2014), Marohn (2015)

Auf dieser Grundlage lässt sich folgende Aussage formulieren: Verwirf H_0 (mit 95%iger Sicherheit), wenn das Ergebnis der Stichprobe außerhalb des 95 %-Prognoseintervalls liegt (= Verwerfungsbereich von H_0), ansonsten tue nichts (= Nichtverwerfungsbereich von H_0).
Mit anderen Worten: Liegt das Ergebnis der Stichprobe innerhalb des 95 %-Prognoseintervalls, weiß man nichts Neues über H_0 und man kann nichts entscheiden!

Abb. 2.5 Einfache Simulation mit randsamp() und countif()

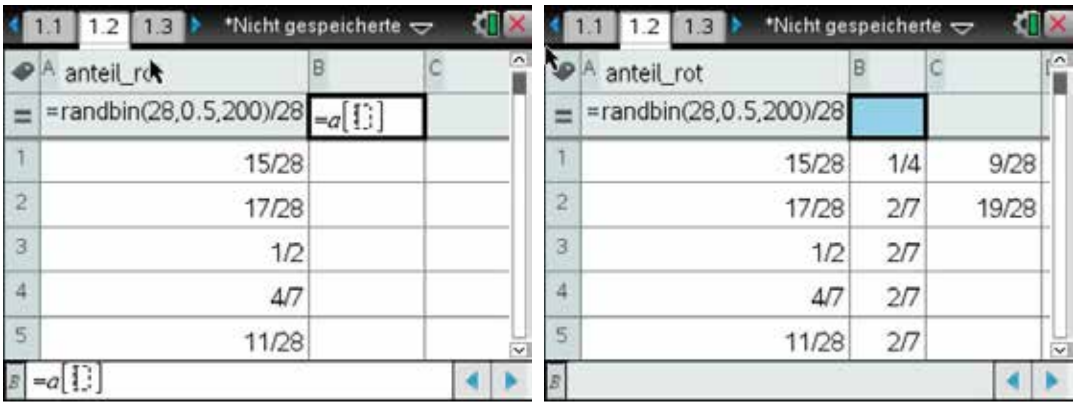


Abb. 2.6 Wiederholte Simulation (m = 200) mit randbin() und Sortieren und Zählen

Durch Kopieren der ersten Spalte in Spalte B und dem anschließenden Aufwärtssortieren (Crtl Menü 8 – 1) lassen sich in Spalte C mit *=b6* und *=b195* die Grenzen des 95 %-Prognoseintervalls (für p = 0,5 und n = 28) angeben.

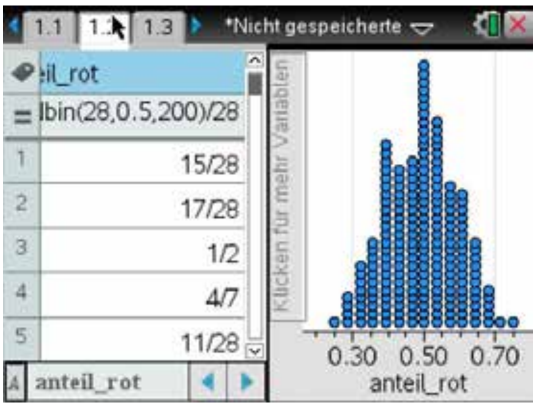


Abb. 2.7 Darstellung der Häufigkeitsverteilung mit Schnellgraph

Das Häufigkeitsdiagramm zeigt, mit welchen Ergebnissen in einer Stichprobe zu rechnen ist, wenn die Zusammensetzung gleich, der Anteil an roten Karten p = 0,5

wäre. Anhand der Simulation lässt sich qualitativ beurteilen, wie das Ergebnis einer Stichprobe zu bewerten wäre. Für eine quantitative Beurteilung kann man das 95 %-Prognoseintervall auch näherungsweise berechnen durch:
[p - $1/\sqrt{n}$; p + $1/\sqrt{n}$]. Betrachtet man nämlich als Zufallsgröße Y den Anteil der roten Karten im Stapel, dann ist E(Y) = p und σ(Y) = $1/(2\sqrt{n})$. Durch die Betrachtung der binomialverteilten Zufallsgröße „Anteil der Erfolge“ lässt sich auf natürliche Weise zum Streuungsmaß $\sigma/\sqrt{n}$ überleiten, das insbesondere bei normalverteilten Zufallsgrößen von Bedeutung ist.
Und nun noch einmal in Anzahlen: Jede Stichprobenabweichung von 6 oder mehr roten Karten vom Erwartungswert 14 lässt stark an der Hypothese p = 0,5 zweifeln. Spätestens an dieser Stelle ist es im Unterricht an der Zeit, die wirkliche Zusammensetzung des Kartenstapels aufzudecken und die Leistungsfähigkeit des Verfahrens (Macht des Tests = 1-β) anzudiskutieren.

Der Signifikanztest[18]

Der Signifikanztest ist ein statistisches Entscheidungsverfahren, das man immer dann verwenden kann, wenn man über keine weiteren Informationen (wie Fehlerkosten etc.) verfügt. (Diepgen 1993, S. 137).
Das allgemeine Vorgehen bei einem Signifikanztest lässt sich so darstellen:

1. Inhaltliche Formulierung der Hypothese („Der Mädchenanteil in der Bevölkerung ist 50 %.“)
2. Formulierung der Nullhypothese H_0 und der (dazu komplementären) Alternativhypothese H_1 (hieraus folgt die Wahl des Testverfahrens)
3. Testgröße angeben/Signifikanzniveau festlegen/Entscheidungsregel formulieren
4. Stichprobe zusammenstellen
5. Vergleich der in der Stichprobe ermittelten Werte mit dem hypothetischen Wert der Nullhypothese und Schlussfolgerung treffen: Liegt die Testgröße im Verwerfungsbereich (kritischer Bereich), dann wird H_0 verworfen, ansonsten kann H_0 nicht verworfen werden.
6. Sicherheit der Entscheidung: Mit der Wahrscheinlichkeit 1-α (statistische Sicherheit) wird H_0 korrekterweise nicht verworfen, wenn das Testergebnis im Nichtverwerfungsbereich liegt.

Wichtig: Punkt 3 darf nach dem Test nicht angepasst werden, das heißt, wenn das Ergebnis auf dem 5 %-Niveau nicht signifikant ist, darf man im Nachhinein nicht einfach dieses Niveau für die bereits erhobene Stichprobe verändern. Ebenso ist es nicht zulässig, so lange Stichproben zu betrachten, bis man beweisen kann, was man beweisen will. Man könnte dies auch mit dem Begriff Testethik bezeichnen.
Die Kernidee des Hypothesentestens lässt sich durch folgendes Zitat gut fassen: „Weichen die tatsächlichen Daten von der bei der Gültigkeit der Nullhypothese zu erwartenden Situation ‚überzufällig' stark ab, d. h. so stark, dass man die Abweichung nicht mehr nur der Zufallsstreuung zuschreiben kann, dann ist die **Nullhypothese zu verwerfen**. Mit anderen Worten: kleine Abweichung = Zufallsstreuung, große Abweichung = Zufallsstreuung und inhaltlicher Unterschied“ (Walter 2009).
Das beschriebene Testverfahren erlaubt eine Quantifizierung dieser qualitativen Aussage.
Da jede Stichprobe die Realisierung eines Zufallsexperiments darstellt, kann es sein, dass in der Stichprobe zufällig unverhältnismäßig mehr oder weniger Elemente mit der betrachteten Eigenschaft vorkommen. Das führt dann zu zufallsbedingten Fehlurteilen über die Grundgesamtheit. Da aufgrund des Stichprobenergebnisses die Null-

[18] Die Statistiker J. Neyman und E. S. Pearson haben das P-Wert-Testen zu einem Entscheidungsverfahren mit einem festen, vordefinierten Ablauf weiterentwickelt.

hypothese abgelehnt werden kann, aber auch u. U. aufrechterhalten werden muss, können folgende Fälle auftreten:

Zustand der Grundgesamtheit / Entscheidung aufgrund der Stichprobe	H_0 gilt	H_1 gilt
H_0 ist zu verwerfen (H_1 gilt).	falsch Fehler 1. Art (α-Fehler) „Fehlalarm“	richtig
H_0 ist nicht zu verwerfen.	richtig	falsch Fehler 2. Art (β-Fehler) „Übersehfehler“

Tab 2.3 Entscheidungsfälle (u. a. Fehlentscheidungen)

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art wird durch die Irrtumswahrscheinlichkeit α angegeben und beeinflusst:[19] $P(H_1 \text{ gilt}|H_0 \text{ gilt}) = \alpha$. Schwieriger ist die Kontrolle über den Fehler 2. Art. Dies kann man als Richtlinie für die Wahl der Nullhypothese nutzen: Da der schwerwiegendere Fehler kontrollierbar sein soll, sollte dieser Fehler als Fehler 1. Art gewählt werden. Wir finden dies im Rahmen unserer Rechtsprechung wieder: „Im Zweifel für den Angeklagten.“ Ziel eines Hypothesentests ist es, eine Entscheidung für oder gegen die Hypothese unter Einhaltung gewisser Schranken für die Fehlerwahrscheinlichkeiten zu treffen. Die oben aufgeführten Beispiele führen auf unterschiedliche Weise in das Hypothesentesten ein.

Ein ausführliches Beispiel zur Verwendung des digitalen Werkzeugs bei einem zweiseitigen Hypothesentest

Die Vorabendsendung „Liebe, liebe Liebelei“ hatte im Schnitt eine Einschaltquote von 25 %. Die Sendeleitung vermutet, dass sich dies nach dem geplanten Ausscheiden eines Hauptdarstellers geändert hat. Man möchte dies durch eine Befragung von 200 Personen auf dem 5 %-Signifikanzniveau testen.
Entwerfen Sie hierfür ein Testverfahren.
H_0: $p = 0{,}3$ H_1: $p \neq 0{,}3$ $\alpha = 0{,}05$ Stichprobengröße $n = 200$

1. Lösung mit systematischem Probieren

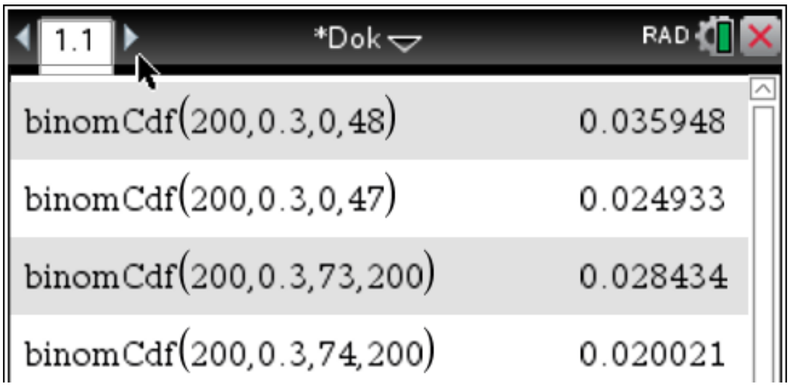


Abb. 2.8 systematisches Probieren mit binomcdf()

Verwerfungsbereich von H_0: $V = \{0,\dots 47\} \cup \{74,\dots 200\}$
Nichtverwerfungsbereich $\overline{V} = \{48,\dots,73\}$

[19] Der Alpha-Fehler ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit $P(H_0 \text{ verwerfen}|H_0 \text{ gilt}) = \alpha$.

Falls weniger als 48 oder mehr als 73 der Befragten angeben, die Sendung zu sehen, kann man von einer Veränderung der Zuschauergunst ausgehen.

2. Lösung mit nSolve-Befehl

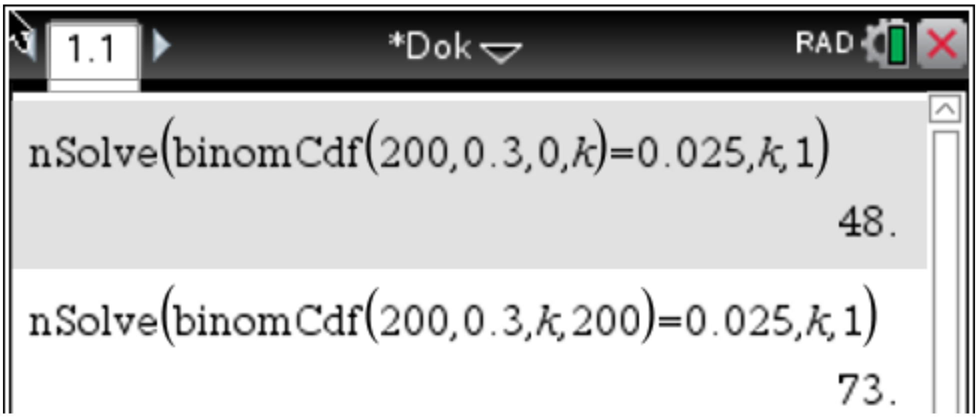


Abb. 2.9 nSolve ()-Befehl zur Ermittlung der Binomialquantile

Der Befehl nSolve liefert für die kumulierte Verteilung binomCdf stets den ersten Wert k, für den die Wahrscheinlichkeit über der angegebenen Grenze liegt. Ein Startwert für die Variable k (hier k = 1) muss angegeben werden. Man erhält somit hier den Nichtverwerfungsbereich.

3. Lösung mittels Tabelle

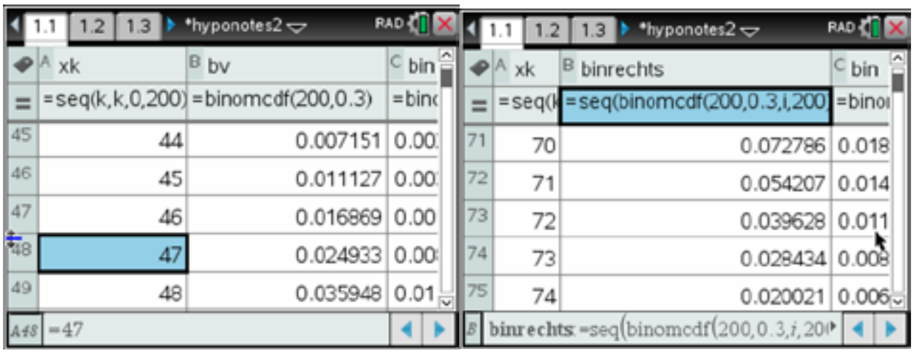


Abb. 2.10 Lösung mittels Lists&Spreadsheet

Während die linke Intervallgrenze direkt abgelesen werden kann, muss man für das Auffinden der rechten Intervallgrenze jeweils vom aktuellen k-Wert an die jeweiligen Einzelwahrscheinlichkeiten bis n aufsummieren.

4. Lösung im Grafikfenster
   Im Grafikfenster lässt sich dieses Problem als Schnittproblem zwischen jeweils zwei Funktionsgraphen f(x) = binomcfd(200, 0.3, x) und g(x) = 0.975 (= 0.025) auffassen, damit ermittelt man den zugehörigen x-Wert.

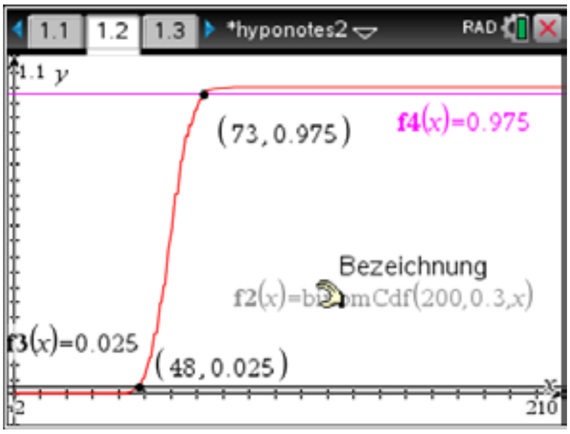


Abb. 2.11 grafische Lösung

5. Nutzung der Notes-Seite
   Um die dargestellten Berechnungen flexibler zu gestalten, kann man sich auch ein Notes-Dokument erarbeiten, sodass man dann für beliebige Stichprobengrößen, beliebige Signifikanzniveaus und beliebige Wahrscheinlichkeiten die Berechnungen der Grenzen automatisieren kann. Gleichzeitig ist hiermit auch eine schöne Veranschaulichung denkbar (aus Praktikabilitätsgründen wird hier kein Histogramm gezeichnet).

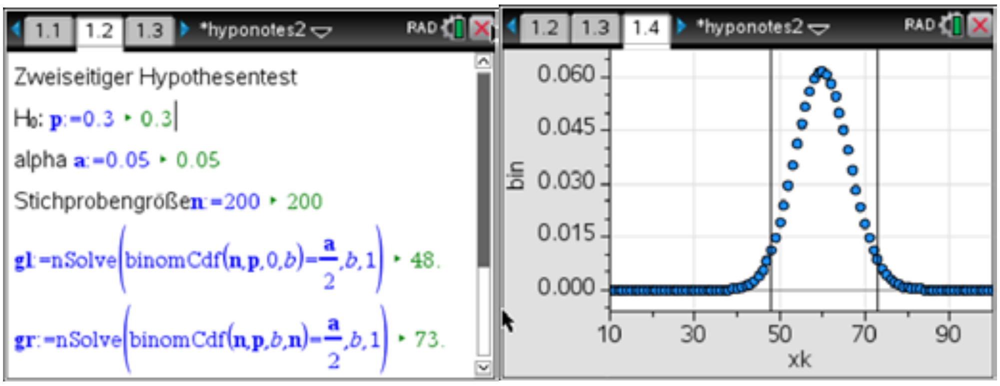


Abb. 2.12 Interaktive Notes-Applikation

Es bietet sich hier eventuell auch an, den ß-Fehler zu verdeutlichen.
Da die Wahrscheinlichkeit hierfür nicht bekannt ist, kann man aber für verschiedene p die Verteilung sichtbar machen und die Größe des Fehlers verdeutlichen.

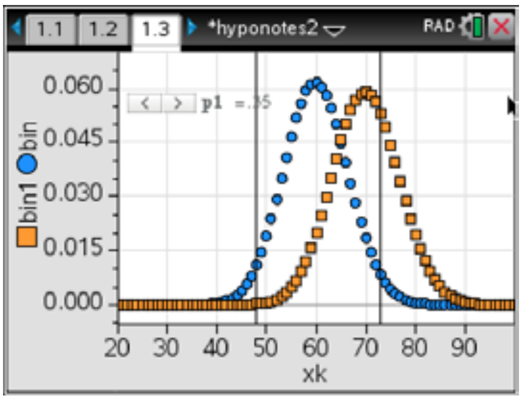


Abb. 2.13 Darstellung der W-Verteilung für verschiedene p

Dieser Fehler kann nun auch automatisch im Notes-Fenster für das aktuelle p der Alternativhypothese berechnet werden.[20]

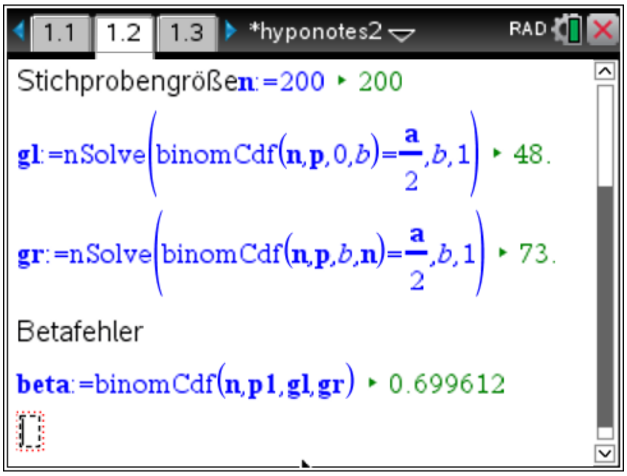
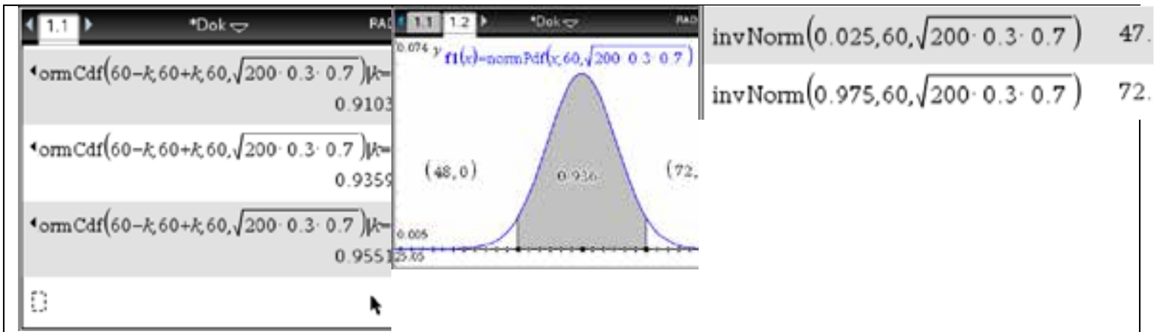


Abb. 2.14 Ermittlung des Beta-Fehlers für das aktuelle p

Der große Stichprobenumfang rechtfertigt auch eine Bearbeitung der Aufgabe mit dem Modell der Normalverteilung (Laplace-Bedingung ist erfüllt). Auch hier sind verschiedene Vorgehensweisen möglich.



Verwerfungsbereich
$V=\{0,\ldots,47\}\cup\{73,\ldots,200\}$
Nichtverwerfungsbereich
$\overline{V}=\{48,\ldots,72\}$

Verwerfungsbereich
$V=\{0,\ldots,47\}\cup\{73,\ldots,200\}$
Nichtverwerfungsbereich
$\overline{V}=\{48,\ldots,72\}$

Abb. 2.15 Vom TI-Nspire unterstützte Vorgehensweisen bei Nutzung der Normalverteilung

Man erhält hier im Vergleich zur Lösung mittels Binomialverteilung in allen Lösungsvarianten leicht abweichende Bereiche (aufgrund der Approximation).

[20] Unter Verwendung der Notation der bedingten Wahrscheinlichkeit heißt dies: $P(H_0|H_1$ gilt), also $P(H_0|p_1=0.35)=0,6696$.

3. Aspekte der beurteilenden Statistik II: Einseitige Signifikanztests

Hubert Langlotz, Andreas Prömmel

Oft wird in Sachzusammenhängen nicht gefragt, ob sich eine bekannte Trefferwahrscheinlichkeit nur geändert hat, sondern in welche Richtung diese Änderung erfolgt ist. Erwartet man eine kleinere Wahrscheinlichkeit, so spricht man von einem linksseitigen Test. Nimmt man an, dass sich die Wahrscheinlichkeit für eine Größe vergrößert hat, spricht man von einem rechtsseitigen Test. Um den Sachverhalt zu verdeutlichen, betrachten wir folgendes Beispiel, das je nach Standpunkt zu einem linksseitigen bzw. einem rechtsseitigen Test führen kann. Das prinzipielle Vorgehen ist analog zum zweiseitigen Test.

Beispiel

Die KKP erhofft sich bei den nächsten Wahlen mehr als 50 % der Stimmen. Mittels einer Befragung unter 500 zufällig ausgewählten wahlberechtigten Personen soll ermittelt werden, ob zusätzliche aufwendige Werbekampagnen erfolgen sollten.
Der Finanzchef möchte durch einen statistischen Test belegen, dass keine zusätzliche Werbekampagne erforderlich ist (also der Stimmenanteil über 50 % liegen wird), der Wahlkampfmanager möchte dies widerlegen. Beide einigen sich darauf, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlentscheidung höchstens 3 % betragen soll.

linksseitiger Test (Wahlkampfmanager)

H0: $p \geq 0{,}5$ H1: $p < 0{,}5$ $n = 500$ $\alpha = 0{,}03$

Da kleine Werte gegen H_0 sprechen, wird H_0 verworfen, wenn sich nur wenige Wähler für die Partei aussprechen. Man muss also die größte Zahl g_l suchen, für die gilt $P(X \leq g_l) \leq 0{,}03$ mit der Prüfgröße X mit den Parametern $n = 500$ und $p = 0{,}5$.

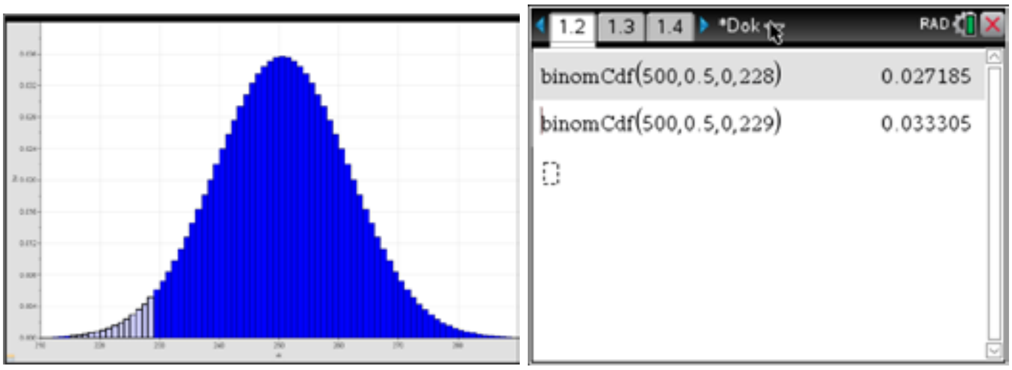


Abb. 2.16 linksseitiger Test

Der Verwerfungsbereich von H_0 wäre demzufolge $V = [0,\ldots, 228]$. Der zugehörige P-Wert wäre hier $P(X \leq 228) = 0{,}027$. Der Wahlkampfmanager entscheidet demnach, H_0 zu verwerfen (97 % statistische Sicherheit), wenn das Stichprobenergebnis im Verwerfungsbereich von H_0 liegt.

Rechtsseitiger Test (Finanzchef)

H_0: $p \leq 0{,}5$ H_1: $p > 0{,}5$ $n = 500$ $\alpha = 0{,}03$
Da große Werte gegen H_0 sprechen, wird H_0 verworfen, wenn sich viele Wähler für die Partei aussprechen. Man muss also die kleinste Zahl g_r suchen, für die gilt $P(X \geq g_r) \leq 0{,}03$.

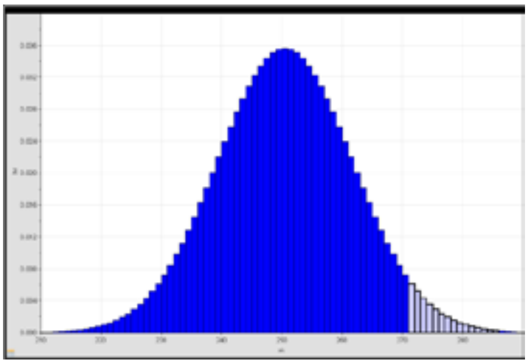
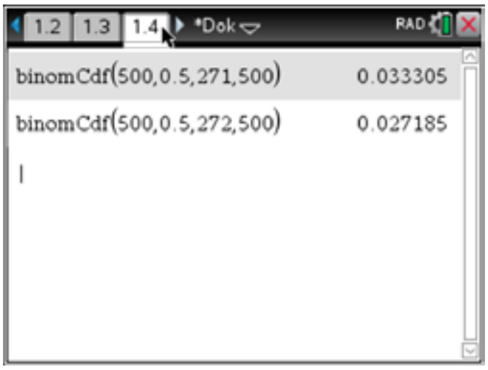



Abb. 2.17 rechtsseitiger Test

Der Verwerfungsbereich von H_0 wäre demzufolge $V = [272, \ldots, 500]$. Der zugehörige P-Wert wäre hier $P(X \geq 272) = 0{,}027$. Der Finanzchef entscheidet, H_0 zu verwerfen (97 % statistische Sicherheit), wenn das Stichprobenergebnis im Verwerfungsbereich von H_0 liegt.
Deutlich wird bei diesem Beispiel auch ein prinzipielles Problem beim Hypothesentesten: Falls die Ergebnisse im Bereich [229, …271] liegen, kann keine der beiden Nullhypothesen verworfen bzw. keine Entscheidung dazu getroffen werden (dazu erfolgen im nächsten Kapitel weitere Anmerkungen).

Insbesondere bei einseitigen Tests spielt das Ziel der Untersuchung eine wesentliche Rolle. **Ein weiteres Beispiel dazu:**

Ein Pharmaunternehmen möchte ein neues Diabetesprodukt auf den Markt bringen und behauptet, dass es bei weniger als 2 % der Testpersonen zu Nebenwirkungen kam. In der Praxis der Zulassung von neuen Medikamenten ist es üblich, von einem Signifikanzniveau von $\alpha = 1$ % auszugehen[21].
Erstellen Sie einen Test so, dass der Fehler 1. Art der schwerwiegendere wäre, da dieser kontrollierbar ist. Es sollen 1.000 weitere Personen getestet werden.

a) Stellen Sie das Testverfahren auf und beschreiben Sie den Fehler 1. Art.
b) Was wäre passiert, wenn die Hypothesen ausgetauscht worden wären?

Lösungsskizzen

a) H_0: $p \geq 0{,}02$ H_1: $p < 0{,}02$ $n = 1000$ $\alpha = 0{,}01$ (linksseitiger Test)

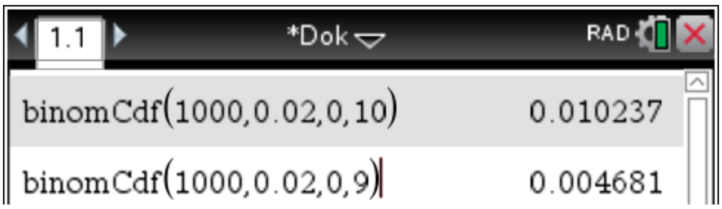
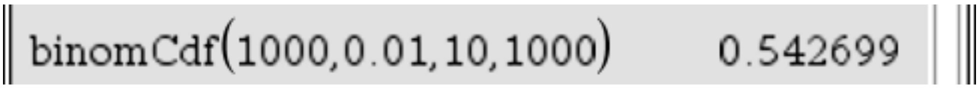


Abb. 2.18 linksseitiger Test

[21] Die Praxis der Neueinführung von Medikamenten untergliedert sich in mehrere Phasen, aus der hier in vereinfachender Weise eine Phase betrachtet wird (https://de.wikipedia.org/wiki/Pharmaforschung)

Der Verwerfungsbereich ist $V = \{0, \ldots, 9\}$. Der Fehler 1. Art bedeutet hier, dass ein Medikament zum Einsatz kommen würde, welches stärkere Nebenwirkungen hat, man entscheidet sich für H_1, obwohl H_0 gilt. Dies wäre sicherlich der gefährlichere Fehler.

Beispiel für einen Fehler 2. Art unter der Annahme, dass p = 0,01 wäre:



Der Fehler 2. Art beschreibt hier eine „verpasste Gelegenheit, man entscheidet sich für H_0, obwohl H_1 gilt “.

b) H_0: $p \leq 0{,}02$ H_1: $p > 0{,}02$ $n = 1000$ $\alpha = 0{,}01$ (rechtsseitiger Test)

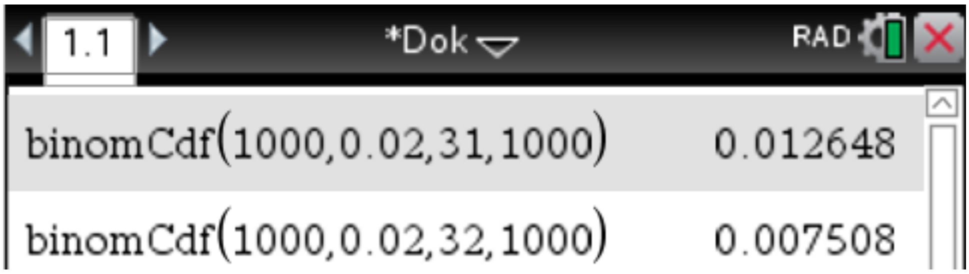
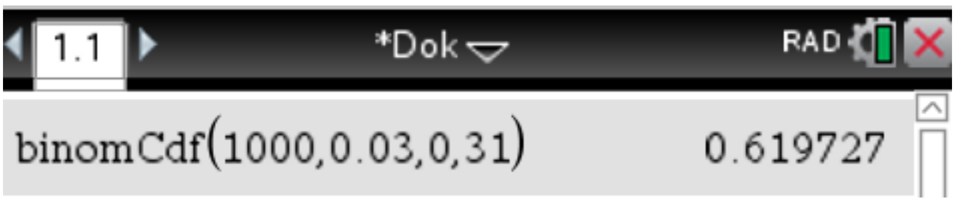


Abb. 2.19 rechtsseitiger Test

Der Verwerfungsbereich ist $V = \{32, \ldots, 1000\}$. Der Fehler 1. Art bedeutet hier, dass ein Medikament nicht zum Einsatz kommen würde, obwohl es nur geringe Nebenwirkungen hat.

Beispiel für einen Fehler 2. Art unter der Annahme, dass p = 0,03 wäre:



Der Fehler 2. Art beschreibt hier den Fall, dass die Hypothese aufrechterhalten wird, obwohl das Medikament größere Nebenwirkungen hat. In diesem beschriebenen Fall sollte also sicherlich die Variante a) gewählt werden.

Was wäre hier z. B. die „Annahme“ der Nullhypothese mit z. B. 14 Nebenwirkungen bei 1.000 Testpersonen wert gewesen?
Auch für p = 0,03 würden wir mit diesem Wert im Nichtverwerfungsbereich liegen, also brächte dies nicht viel.

Weiterführende Gedanken

„Der entscheidende Schritt beim Signifikanztest liegt weniger in der rechnerischen Durchführung des Tests als in der Wahl der Nullhypothese und ihrer Gegenhypothese. … Ein Unterricht, der sich auf den Formalismus eines Signifikanztests, seine rein mathematische Ausprägung beschränkt, wird dem stochastischen Aspekt nicht gerecht. Da man nicht anders zeigen kann, dass eine Hypothese A gegenüber einer Hypothese B den Vorzug verdient, als dass man B statistisch begründet zurückweist, wird die Nullhypothese aufgestellt mit der Absicht, sie nach Möglichkeit zu verwerfen. Dabei darf man die Möglichkeit einer Fehlentscheidung nicht außer Acht lassen, insbesondere wenn sie schwerwiegende Folgen haben könnte“.[22]

<table>
<tr><td>Grundgesamtheit

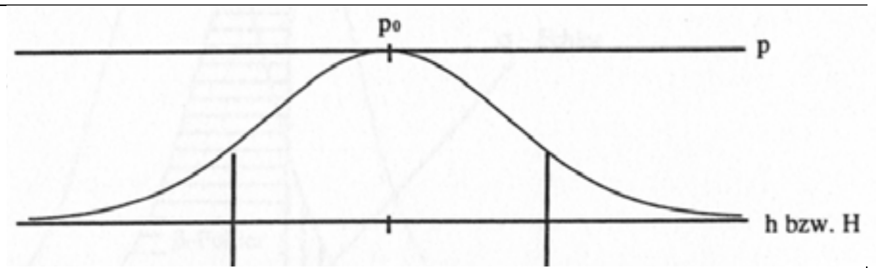
Stichprobe</td><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><td></td><td>H_0: $p = p_0$ „stat. widerlegt“
$p<p_0$ „stat. bewiesen“</td><td>Mit H_0: $p = p_0$ verträgliche Stichprobenergebnisse
(nicht bewiesen)</td><td>H_0: $p = p_0$ „stat. widerlegt“
$p>p_0$ „stat. bewiesen“</td></tr>
</table>

Abb. 2.20 Testen von Hypothesen (siehe Kröpfl 1994, S. 189)

Im Weiteren wollen wir an konkreten Beispielen einige typische Problemstellungen betrachten, die man im unterrichtlichen Kontext beim Testen von Hypothesen darstellen und bearbeiten sollte.

Wichtig erscheint uns dabei, dass man die folgenden drei Aspekte in Betracht zieht:

- Welche Ziele verfolgt man mit dem Test?
- Was man zeigen will, gehört in die Gegenhypothese.
- Nur eine Verwerfung der Nullhypothese hat einen Nutzen.

Wir konstruieren hierzu mögliche Beispiele:

(1) Konsument-Händler-Sicht – Wahl der Nullhypothese

Beispiel: Mein Drucker wurde repariert. Die ausführende Firma versprach mir, dass die Ausschussquote nur noch 4 % beträgt. Nach ersten Druckversuchen misstraue ich der Firma und will dies anhand von 100 Kopien belegen. Entwickle einen Test, der eine Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 % in Kauf nimmt. Gib die Entscheidungsregel an. Welchen Test würde die Firma vorschlagen?

[22] vgl. Schmid (2005, S. 332)

H_0: p ≤ 0,04H_1: p > 0,04

$\alpha \leq 0{,}05$

k_{min} = 8 $V = \{8,...,100\}$

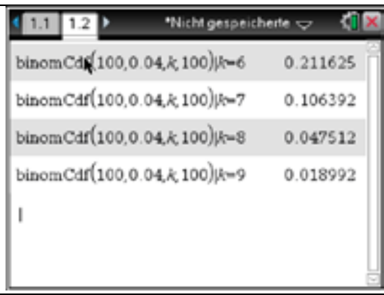


Abb. 2.21 Nullhypothese aus Konsumentensicht

H_0: p ≥ 0,04H_1: p < 0,04

$\alpha \leq 0{,}05$

k_{max} = 8 $V = \{0\}$

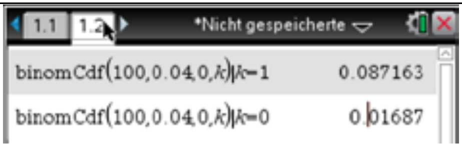


Abb. 2.22 Nullhypothese aus Händlersicht

Der Verwerfungsbereich der Nullhypothese aus Konsumentensicht liegt bei 8 oder mehr fehlerhaften Drucken. Im Gegensatz dazu dürfte es gar keinen Fehldruck geben, wenn man der Firma Recht geben möchte. Wie könnte man sich einigen? Sollte das Stichprobenergebnis irgendwo zwischen 0 und 8 liegen, kann man nämlich gar keine Entscheidung (auf dem Signifikanzniveau 5 %) treffen.

(2) Die Nullhypothese „annehmen“ ist wertlos

Warum ist es wichtig (wenn es möglich ist), die „Wunschhypothese“ immer als Alternativhypothese zu wählen? Wir wollen dies am Eingangsbeispiel „faire Münze“ darstellen.

Beispiel: Münze ist nicht fair

H_0: p = 0,5 H_1: p ≠ 0,5 n = 30 α = 0,05

Der Nichtverwerfungsbereich ist $\overline{V}$ = {10, …, 20}. Nehmen wir an, das Ergebnis beim Test ist 12 (P-Wert 18,7 %). Dann sollte man vermeiden zu sagen: „Damit kann die Nullhypothese angenommen werden“, hieße, die Münze ist fair, denn das Ergebnis passt auch zu unendlich vielen anderen Nullhypothesen. Dazu ein konkretes Beispiel:

H_0: p = 0,4 H_1: p ≠ 0,4 n = 30 α = 0,05

Der Nichtverwerfungsbereich ist $\overline{V}$ = {7, …,18}. Also mit dem gleichen Ergebnis könnte man schlussfolgern, dass p = 0,4 gilt. Man muss also formulieren: „Die Nullhypothese kann **nicht verworfen** werden.“

Schätzen oder Testen

Beim Testen von Hypothesen prüft man, ob eine angenommene Wahrscheinlichkeit mit Beobachtungen verträglich ist, und beim Schätzen bestimmt man aus Beobachtungen ein Vertrauensintervall, von dem man vermutet, dass es die unbekannte Wahrscheinlichkeit mit einer vorgegebenen Sicherheit überdeckt.

Nutzung der Sigma-Regeln beim Testen und Schätzen

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit E(X) = n$\cdot p$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ gilt, dass ca. 68 % der beobachteten Ergebnisse (wenn genügend Ergebnisse betrachtet werden, bzw. wenn die Laplace-Bedingung $n \cdot p \cdot q > 9$ gilt) in der 1σ-Umgebung, ca. 95,5 % in der 2σ-Umgebung und ca. 99,7 % in der 3σ-Umgebung von E(X) liegen (Sigma-Regeln).
Insbesondere bei Fragen der beurteilenden Statistik werden zusätzlich die 1,64σ- (90 %), die 1,96σ- (95 %) und die 2,58σ-Umgebung (99 %) betrachtet[23].

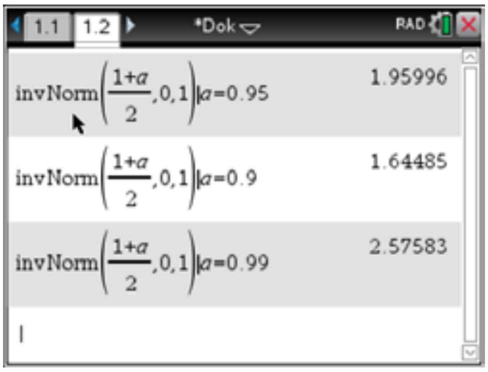


Abb. 2.23 Sigma-Umgebungen

Der mathematische Hintergrund sei hier kurz illustriert:
Die doppelte Ungleichung $E(X) - c \cdot \sigma \le X \le E(X) + c \cdot \sigma$ mit c = 1,2,… beschreibt diese Umgebungen. Für binomialverteilte Zufallsgrößen X folgt daraus:

$$n \cdot p - c \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \le X \le n \cdot p + c \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}.$$

Die Division durch den Stichprobenumfang und die Berücksichtigung, dass $\frac{X}{n}$ die relative Häufigkeit h_n der Zufallsgröße X ist, ergibt

$$p - c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \le h_n \le p + c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}.$$

Hieraus ergibt sich

$|h_n - p| \le c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$, was gleichwertig ist zu $(h_n - p)^2 \le c^2 \cdot \frac{p \cdot (1-p)}{n}$.

Durch Auflösen dieser quadratischen Ungleichung kann man nun sowohl die entsprechenden Vertrauensintervalle (Auflösung nach p(h)) als auch die Prognoseintervalle (Auflösung nach h(p)) bestimmen. (Abb. 2.24 für konkretes h und konkretes p).

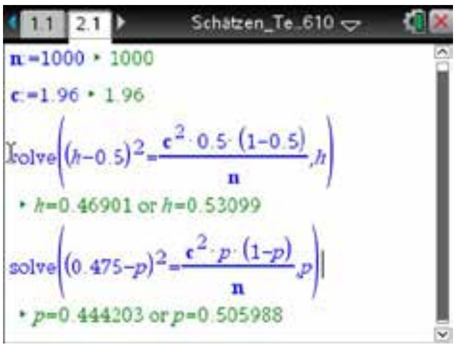


Abb. 2.24 Lösungen der quadratischen Ungleichung für n = 1000 und c = 1,96

[23] Möchte man andere c·σ-Umgebungen betrachten, so kann man dies durch Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung ermöglichen.

Das Prognoseintervall wird durch die „h“ bestimmt, hier [0.469; 0,531]; das Vertrauensintervall durch die „p“, hier [0,444; 0,506]. Stellt man dies funktional dar, so erhält man die Bögen der Konfidenzellipse[24] bzw. für konkrete p das zugehörige Prognoseintervall.

Untere Intervallgrenze $hu(p) = p - c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$

Obere Intervallgrenze $ho(p) = p + c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$

Umgekehrt erhält man durch Auflösen der Ungleichungen für vorgegebene relative Häufigkeiten h die Grenzen des Vertrauensintervalls.

Schätzen (Ausgangspunkt sind die Daten) – Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit (Konfidenzintervall oder Vertrauensintervall)

Von einem ermittelten Stichprobenwert h_n wird auf ein Intervall geschlossen, das die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit einer vereinbarten Sicherheit überdeckt.

Beispiel: Bei einer Befragung sprachen sich von 1.000 Personen 475 für Kandidat A aus, wobei ein Kandidat im 1. Wahlgang mindestens 50 % der Stimmen auf sich vereinigen muss. Ermitteln Sie das 95 %-Vertrauensintervall hierzu.

Ermittlung des Vertrauensintervalls: Zu h_n = 0,475 gehört das Vertrauensintervall von [0,444; 0,506]. Die Waagerechte im Diagramm[25] liefert die Lösung.

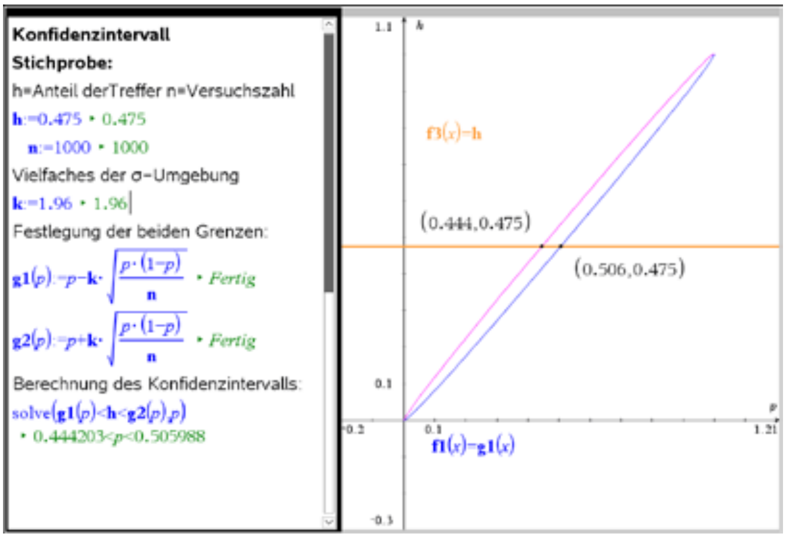


Abb. 2.25 Lernumgebung Konfidenzintervall

Mit 95 % Sicherheit überdeckt das Vertrauensintervall [0,444; 0,506] den tatsächlichen Stimmenanteil für Kandidat A. Es könnte also gerade noch zu einer Mehrheit im bereits ersten Wahlgang reichen, aber eher wohl nicht.

[24] Vgl. Vehling (2015)
[25] Vgl. Dreeßen-Meyer (2011)

Testen (Ausgangspunkt ist eine Hypothese) – Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe (Prognoseintervall)

Der Anteil p eines Merkmals sei bekannt bzw. soll abgesichert werden, dann kann man z. B. das 95 %-Prognoseintervall angeben, in welches mit 95%iger Wahrscheinlichkeit die relative Häufigkeit h_n des Merkmals in der Stichprobe fällt.
Das Prognoseintervall zu p = 0,5 ergibt sich durch die Schnittpunkte der senkrechten Geraden (hier p = 0,5 mit den beiden Funktionsgraphen g_1 und g_2).

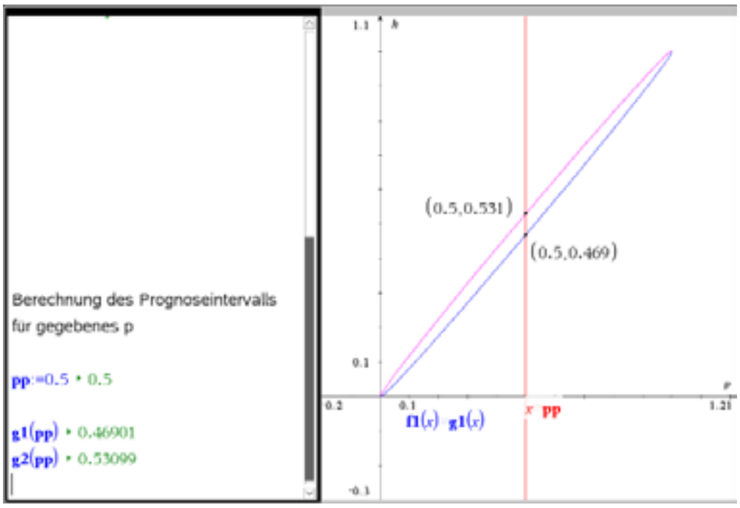


Abb. 2.26 Lernumgebung Prognoseintervall

Demzufolge liegt die zu erwartende relative Häufigkeit mit der Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % im Intervall [0,46901; 0,53099].

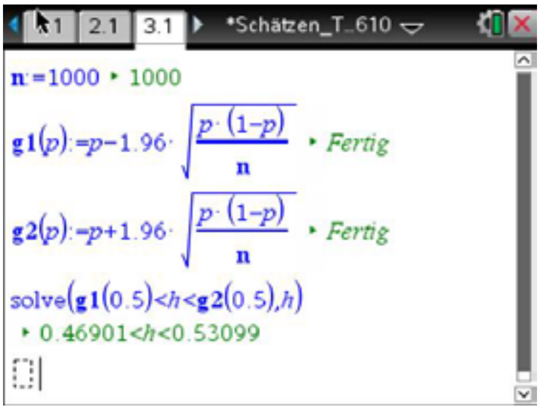


Abb. 2.27 Berechnung Prognoseintervall

Kommen wir hier noch einmal auf das Einstiegsbeispiel dieses Kapitels zurück:

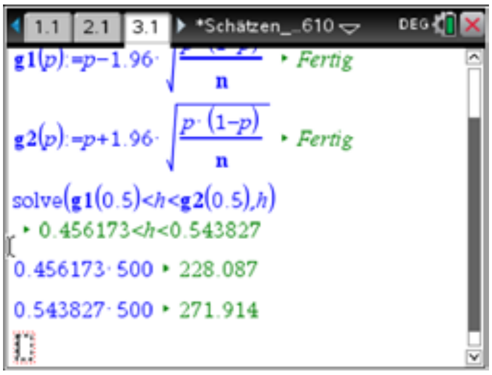


Abb. 2.28 Berechnung Prognoseintervall

Man erkennt, dass man auch mit dieser Berechnungsmethode annähernd das gleiche Ergebnis für die gesuchten Verwerfungsbereiche erhält.

Biehler und Eichler fassen diese Ideen so zusammen: „Die Ermittlung eines solchen Konfidenzintervalls enthält den Hypothesentest quasi als „Abfallprodukt“: Angenommen, man hat zu einem Anteil ein 95% Konfidenzintervall bestimmt. Dann enthält dieses Intervall genau diejenigen Wahrscheinlichkeiten p, die bei einem zweiseitigen Test auf dem 5% Signifikanzniveau nicht verworfen würden, wenn man den Anteil h beobachtet hat.“[26]

[26] Biehler & Eichler (2015, S. 80)

4. Exkurs zur Normalverteilung

Tobias Kellner, Wilfried Zappe

Standardisierung der Normalverteilung

Die Normalverteilung $N(0;\ 1)$ (also $\mu = 0$ und $\sigma = 1$) heißt Standardnormalverteilung. Sie besitzt die Dichte

$$\phi(x) = f_{0;\,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

und die Verteilungsfunktion

$\Phi(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$

Falls eine Zufallsgröße Y eine $N(\mu;\ \sigma)$-verteilte Zufallsgröße ist, so ist $X = \frac{Y-\mu}{\sigma}$ eine $N(0;\ 1)$-verteilte Zufallsgröße:

- Begründung: $E(X) = E\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right) = \frac{E(Y)-\mu}{\sigma} = \frac{\mu-\mu}{\sigma} = 0$

  (Für Schüler) $V(X) = V\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right) = V\left(\frac{Y}{\sigma}\right) = \frac{V(Y)}{\sigma^2} = 1$ [27]
- Beweis: $P(X \leq a) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq a\right) = P(Y \leq \sigma a + \mu) = \int_{-\infty}^{\sigma a+\mu} f_{\mu;\,\sigma}(x)\, dx =$

  (Für Lehrer) $\int_{-\infty}^{\sigma a+\mu} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}\, dx \underbrace{=}_{\substack{Substitution \\ z=\frac{x-\mu}{\sigma}}} \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \Phi(a)$

Es gilt also insbesondere

$$P(Y \leq a) = P(\sigma X + \mu \leq a) = P\left(X \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Das Subtrahieren des Erwartungswerts wird als **Zentrieren**, das Teilen durch die Standardabweichung als **Normieren** bezeichnet. Die Nacheinanderausführung dieser beiden Operationen bezeichnet man als **Standardisieren**.

Auf die Standardnormalverteilung kann mittels der Befehle $\boldsymbol{normCdf(a, b)}$ und $\boldsymbol{invNorm(p)}$ (also jeweils durch Weglassen von $\boldsymbol{\mu}$ und $\boldsymbol{\sigma}$) zugegriffen werden.

Zufällige Abfüllmenge

Bei einem Getränkehersteller von Biobrausen soll die Abfüllmenge in Ein-Liter-Flaschen als normalverteilt betrachtet werden. In 5 % der Flaschen werden produktionsbedingt mehr als 1,02 Liter abgefüllt, in 3 % der Flaschen werden weniger als 0,98 Liter abgefüllt. Bestimmen Sie die erwartete Abfüllmenge und die Standardabweichung davon.

X sei die zufällige Abfüllmenge und $N(\mu;\ \sigma)$ verteilt, dann gilt: $P(X \leq 0{,}98) = 0{,}03$ und $P(X \geq 1{,}02) = 1 - P(X \leq 1{,}02) = 0{,}05$, also $\Phi\left(\frac{0{,}98-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}03 \quad\Rightarrow\quad \frac{0{,}98-\mu}{\sigma} \approx -1.881$ $\Phi\left(\frac{1{,}02-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}95 \quad\Rightarrow\quad \frac{1{,}02-\mu}{\sigma} \approx 1.645$ Das Auflösen des nun entstandenen linearen Gleichungssystems auf der rechten Seite nach μ und σ ergibt: $\mu = 1{,}00134$ $\sigma = 0{,}011345$ Also werden die Flaschen mit einem Erwartungswert mit rund 1,001 Liter gefüllt bei einer Abweichung von rund 0,011 Liter.	invNorm(0.03) -1.88079 invNorm(0.95) 1.64485 $\mathrm{solve}\left(\begin{cases}\frac{0.98-\mu}{\sigma}=-1.8807936097248 \\ \frac{1.02-\mu}{\sigma}=1.6448536259066\end{cases},\sigma,\mu\right)$ σ=0.011345 and μ=1.00134

[27] Hier gelten die von diskreten Zufallsgrößen bekannten Regeln: $E(aX+b) = aE(X)+b, V(aX+b) = a^2V(X)$
Diese lassen sich auch bei Bedarf mithilfe der Integralrechnung nachweisen.

Approximation mittels Normalverteilung
Wie in der Einführung beschrieben, kann eine normalverteilte Zufallsgröße über einen zentralen Grenzwertsatz als Approximation diskreter Zufallsgrößen für große Anzahlen erzeugt werden. Ein in der Schule verwendbarer Grenzwertsatz ist der

Satz von Moivre-Laplace
Es seien $Y_n, n \in N$ binomialverteilte Zufallsgrößen mit Parametern n und (festen) p. Dann gilt für
$Z_n = \frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ und alle $a \in R$ die Beziehung $\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq a) = \Phi(a)$.

Wenn man also die binomialverteilten Zufallsgrößen Y_n standardisiert, so strebt die resultierende Verteilung Z_n für große n gegen die Standardnormalverteilung. Das bedeutet, dass für ein hinreichend großes n die Verteilungsfunktion einer mit n und p binomialverteilten Zufallsgröße näherungsweise durch eine $N(np, \sqrt{np(1-p)})$-Verteilungsfunktion ersetzt werden kann.
Eine Abschätzung, ab wann n hinreichend groß ist, liefert die

Laplace-Bedingung

$$n \cdot p \cdot (1-p) > 9$$

Beispiel Onlineversand
Bei einem Onlinehändler für Tablets sei bekannt, dass sich die Kunden in 40 % aller Fälle unabhängig voneinander für das schwarze Modell entscheiden, ansonsten für das weiße. Bestimmen Sie bei 100 Kaufvorgängen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens 30 schwarze Tablets gekauft werden. Vergleichen Sie die Berechnungen, wenn sie

a) mithilfe einer binomialverteilten Zufallsgröße
b) mithilfe einer normalverteilten Zufallsgröße

durchgeführt werden.

Lösung

X bezeichne die absolute Häufigkeit des Ereignisses „schwarzes Tablet“ bei 100 Käufen. X ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = \frac{2}{5}$. Also gilt $P(X \leq 30) = \sum_{k=0}^{30} \binom{100}{k} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{100-k} \approx 0{,}024783$	binomCdf(100,0.4,0,30) 0.024783
Um X mit der Normalverteilung zu approximieren, testen wir zunächst die Laplace-Bedingung $n \cdot p \cdot (1-p) = 100 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = 24 > 9$, die erfüllt ist. Weiterhin gilt $E(X) = 100 \cdot \frac{2}{5} = 40$ und $\sigma = \sqrt{100 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}} = \sqrt{24} = 2 \cdot \sqrt{6}$. Also ist X näherungsweise $N(40, 2\cdot\sqrt{6})$ verteilt und es gilt $P(X \leq 30) \approx \int_{-\infty}^{30} f_{40,2\cdot\sqrt{6}}(x)\,dx \approx 0{,}020613$	normCdf(-∞,30,40,2·√6) 0.020613

Die Differenz zwischen Approximation mittels Normalverteilung und korrektem Rechnen beträgt also rund $0{,}004$.
Die Approximation können wir im Allgemeinen verbessern, indem wir ausnutzen, dass für diskrete Zufallsgrößen Y, die nur ganzzahlige Werte annehmen können (wie die Binomialverteilung), für alle $a \in Z$ gilt:

$$P(Y = a) = P(a - 0.5 < Y < a + 0.5)$$

Diese Modifikation nennt man

Stetigkeitskorrektur

Es sei X eine binomialverteilte Zufallsgröße mit Parametern n und p, welche die Laplace-Bedingung erfüllt. Dann gilt für alle $a, b \in R, a < b$:

1. $P(X \leq b) \approx P(X < b + 0{,}5) \approx \int_{-\infty}^{b+0{,}5} f_{np,\sqrt{np(1-p)}}(x)\, dx$
2. $P(a \leq X) \approx P(a - 0{,}5 < X) \approx \int_{a-0{,}5}^{\infty} f_{np,\sqrt{np(1-p)}}(x)\, dx$
3. $P(a \leq X \leq b) \approx P(a - 0{,}5 < X < b + 0{,}5\ ) \approx \int_{a-0{,}5}^{b+0{,}5} f_{np,\sqrt{np(1-p)}}(x)\, dx$
4. $P(X = a) \approx P(a - 0{,}5 < X < a + 0{,}5) \approx \int_{a-0{,}5}^{a+0{,}5} f_{np,\sqrt{np(1-p)}}(x)\, dx$

Für die obige Onlineversandaufgabe gilt im Aufgabenteil b) also mit Stetigkeitskorrektur:

$P(X \leq 30) \approx P(X < 30.5) \approx \int_{-\infty}^{30.5} f_{40,2\cdot\sqrt{6}}(x)\, dx \approx 0{,}02624$	normCdf(-∞,30.5,40,2· $\sqrt{6}$) 0.02624

Somit haben wir eine verbesserte Fehlerdifferenz von $0{,}001$.
Phänomenologisch können wir uns die Stetigkeitskorrektur auch so erklären, dass wir die diskrete Binomialverteilung um $-0{,}5$ verschieben, um eine bessere Anpassung an die Normalverteilung zu erhalten, wie folgende Bilder veranschaulichen:

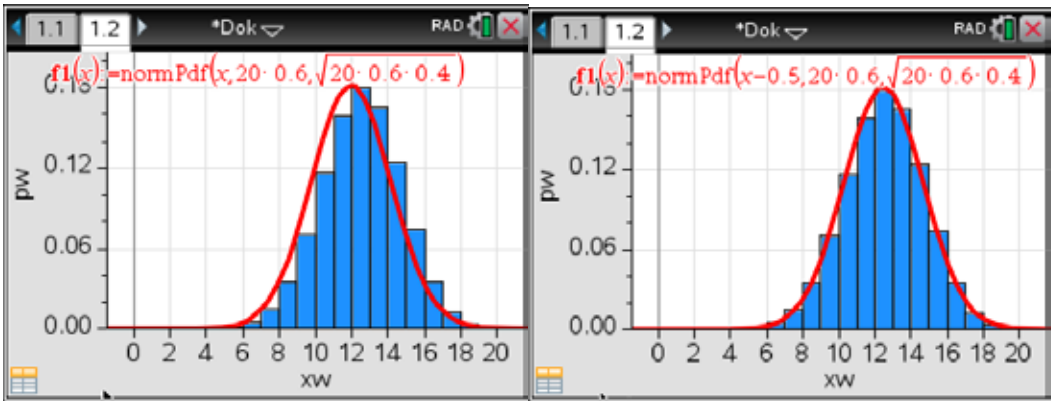


Abb. 4.1 Histogramme mit und ohne Stetigkeitskorrektur

Beispiel Transistoren

Auf dem Xbox One Hauptprozessor sind 5.000.000.000 Transistoren[28] verbaut. Die Ausfallrate von modernen Transistoren wird als **Failure in Time** (Abk.: **FIT**, zu Deutsch: *Ausfälle pro Zeit*) bezeichnet und beträgt 3 Ausfälle pro einer Milliarde Stunden[29]. Um die Stabilität der Konsole zu gewährleisten, müssen gewisse Ausfallszenarien untersucht werden. Bestimmen Sie unter der Annahme, dass die Transistoren unabhängig voneinander ausfallen, die Wahrscheinlichkeiten, dass in einer Stunde

a) höchstens 10 Transistoren ausfallen
b) 10 bis 20 Transistoren ausfallen
c) genau ein Transistor ausfällt.

Abb. 4.2 Xbox One,
Quelle Evan-Amos (Own work) [Public domain], via Wikimedia Commons

Lösung

X bezeichne die absolute Häufigkeit des Ereignisses „Transistor fällt in einer Stunde aus“ bei 5.000.000.000 unabhängigen Transistoren. X ist binomialverteilt mit $n = 5.000.000.000$ und $p = \frac{3}{1000000000}$. Wenn wir die Wahrscheinlichkeit mit **binomCdf(5000000000,3/1000000000,0,10)** berechnen wollen, kommt die Fehlermeldung „Bereichsfehler“, da der Befehl nur für $n < 1.000.000$ ausgelegt ist. Wir müssen also approximieren. Die Laplace-Bedingung ist erfüllt, da $n \cdot p \cdot (1-p) = 5 \cdot 10^9 \frac{3}{10^9} \cdot \left(1 - \frac{3}{10^9}\right) \approx 15 > 9$ Mit $E(X) = 15$ und $\sigma = \frac{\sqrt{5999999982}}{20000} \approx 3{,}873$ ist X näherungsweise $N(15; 3{,}873)$ verteilt und mit Stetigkeitskorrektur gilt: $P(X \leq 10) \approx P(X \leq 10{,}5)$ $\approx \int_{-\infty}^{10.5} f_{15;3,873}(x)\,dx \approx 0.122639$ Also haben wir mit rund 12 % Wahrscheinlichkeit höchstens 10 Ausfälle.	binomCdf$\left(5000000000, \frac{3}{1000000000}, 0, 10\right)$ "Fehler: Bereichsfehler" $mu := \frac{5 \cdot 10^9 \cdot 3}{10^9}$ 15 $sigma := \sqrt{\frac{5 \cdot 10^9 \cdot 3}{10^9} \cdot \left(1 - \frac{3}{10^9}\right)}$ $\frac{\sqrt{5999999982}}{20000}$ normCdf(-∞,10.5,*mu*,*sigma*) 0.122639
$P(10 \leq X \leq 20) \approx P(9.5 \leq X \leq 20{,}5)$ $\approx \int_{9,5}^{20.5} f_{15;3,873}(x)\,dx \approx 0.84442$	normCdf(9.5,20.5,*mu*,*sigma*) 0.84442
$P(X = 1) \approx P(0.5 \leq X \leq 1{,}5)$ $\approx \int_{0,5}^{1.5} f_{15;3,873}(x)\,dx \approx 0.000155$	normCdf(0.5,1.5,*mu*,*sigma*) 0.000155

[28] Dixon, Wayne: Xbox One: From the Original Xbox until Now.: Wayne Dixon
[29] Siemens Standard SN 29500-2: Ausfallraten Bauelemente - Erwartungswerte von integrierten Schaltkreisen; 9/2010

5. Exkurs: Testen bei Normalverteilung

Hubert Langlotz, Andreas Prömmel

Der Stichprobenmittelwert $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ist für genügend große Stichproben näherungsweise eine normalverteilte Zufallsgröße mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2/n. Grundlage dafür ist der Zentrale Grenzwertsatz (Kröpfl et al. 1994, S. 175).[30]
Die zugehörige standardisierte Zufallsgröße Z ist dann durch $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ definiert. Für die normalverteilte Zufallsgröße $\bar{X}$ gilt dann: $\mathrm{P}\left(\mu - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(z) - 1$
und konkret für $z = 1{,}2{,}3$:

$\mathrm{P}\left(\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(1) - 1 \approx 68{,}3\,\%$,

$\mathrm{P}\left(\mu - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(2) - 1 \approx 95{,}5\,\%$,

$\mathrm{P}\left(\mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} \leq \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(3) - 1 \approx 99{,}3\,\%$.

Für Test- und Schätzverfahren gilt es, nun genau dies zu beachten: Der Mittelwert $\bar{X}$ aus einer Stichprobe der Länge *n* ist normalverteilt mit Erwartungswert μ und die Streubreite der Verteilung $2\sigma_{\bar{X}}$ nimmt in Abhängigkeit von *n* proportional mit $1/\sqrt{n}$ ab.
In der nachfolgenden Abbildung ist dies an einem konkreten Beispiel dokumentiert.
Will man die „Schwankungsbreite" halbieren, so muss man den Stichprobenumfang vervierfachen. Diese Faustregel gilt auch für die Genauigkeit von Simulationen.

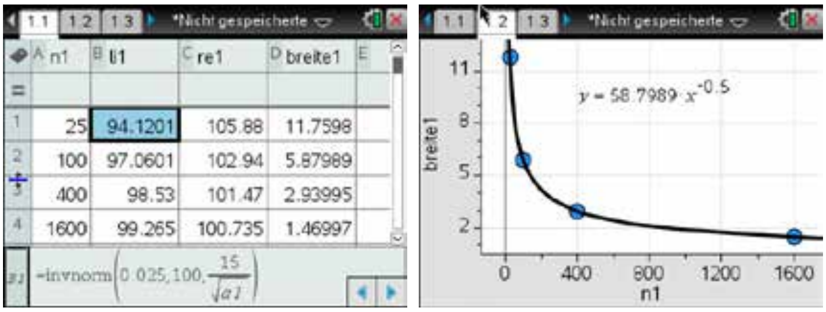


Abb. 5.1 1-durch-Wurzel-n-Gesetz

Typische Intelligenztests sind normiert mit dem Erwartungswert μ100 und der Standardabweichung von 15. Erhebt man eine Stichprobe im Umfang $n = 100$, dann liegt das 95,5 %-Prognoseintervall des Stichprobenmittelwertes zwischen einem IQ von 97 und einem IQ von 103 (Illustration der Sigma-Regeln, siehe Abb. 5.1). Liegt das Stichprobenmittel außerhalb dieses Bereiches, dann würde man den Intelligenztest als schlecht normiert bewerten (mit 95,5%iger Sicherheit). Ebenso könnte man mithilfe des invnorm()-Befehls des TI-Nspire die Grenzen des Nichtverwertungsbereiches direkt ermitteln (siehe im Heft vorn). Bei einem rechtsseitigen Tests (Signifikanzniveau α = 0,05) lässt sich mithilfe des invnorm()-Befehls der Verwerfungsbereich V so berechnen: $V = \left\{\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \middle| v_i > invnorm(0.95, \mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})\right\}$. Das nachfolgende konstruierte Beispiel zeigt exemplarisch das Vorgehen bei solch einem einseitigen Signifikanztest auf:

Beispiel Einseitiger Signifikanztest (σ bekannt)
Weißbiergläser sollen 500 ml (bei bekannter Standardabweichung von 5 ml) fassen. Ein Wirt klagt nun gegen eine Brauerei, da seiner Meinung nach die Füllstriche an den Gläsern zu hoch waren und er jahrelang zu viel Weißbier ausschenkte. Er ermittelte bei den Gläsern folgende Werte: 510, 504, 512, 499, 502, 511, 508, 501, 504, 507. Entwickeln Sie einen Test aus Sicht des Wirts.

[30] Für eine Reihe von beschriebenen Verteilungen (Binomialverteilung, hypergeometrische Verteilung etc.) gilt dieser Zusammenhang auch für die relative Stichprobenhäufigkeit $Y = \frac{H}{n}$.

1. Die Gläser fassen mehr als 500 ml.
2. Einseitiger Test mit H_0: μ ≤ 500 ml H_1: μ > 500 ml (Rechtsseitiger Test)
3. Signifikanzniveau α = 0,05
4. Stichprobenmittel bestimmen: 505,8
5. Bestimmung des Ablehnungsbereichs: μ > 502,601
6. Entscheidung: Da der Stichprobenmittelwert im Ablehnungsbereich liegt, kann der Wirt mit gutem Gewissen seine Klage aufrechterhalten.

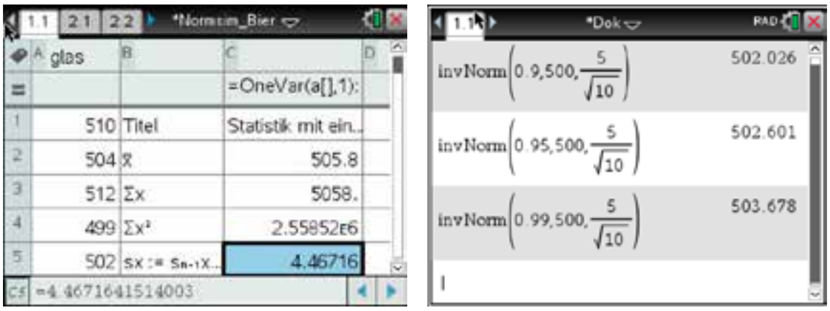


Abb. 5.2 Verwendung des Tools Statistische Berechnungen und Normalquantile

Sowohl mit α = 0,1, α = 0,05 als auch mit α = 0,01 kann der Wirt die Nullhypothese ablehnen und aufgrund des Testergebnisses behaupten, dass die Eichstriche zu hoch sitzen.

Zur Information: Möglich wäre hier auch, aufgrund der Gegebenheiten die Nutzung des Z-Tests mit der Testgröße $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, der im TI-Nspire zur Verfügung steht.

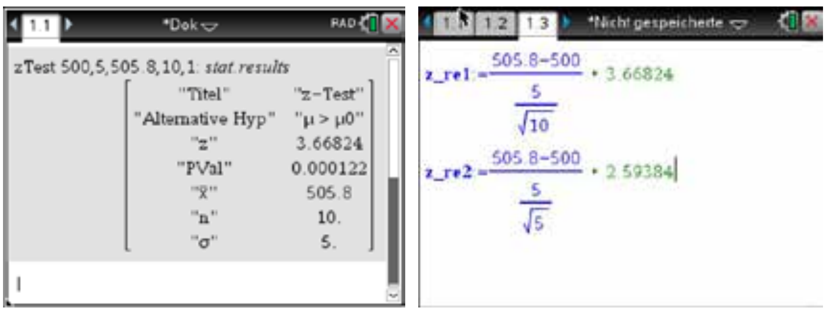


Abb. 5.3 P-Wert-Berechnung mit Z-Test (Einstichproben-Gauß-Test) – links und Berechnung kritischer Werte mit Z-Statistik – rechts

Eine weitere Möglichkeit (Abb. oben rechts) ist die Berechnung von z mithilfe der Z-Statistik und der Vergleich dieses Wertes mit kritischen Werten z* wie in der nachfolgenden Tabelle aufgeführt.

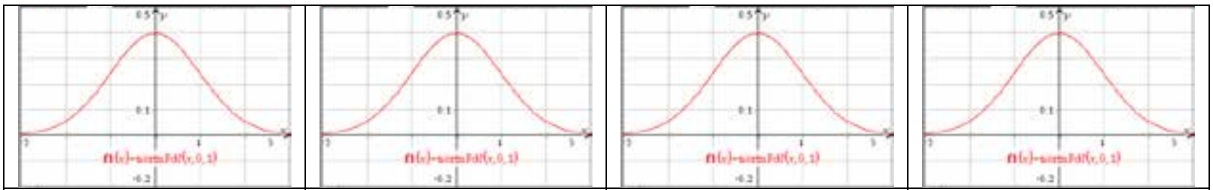
Signifikanzniveau α	z* für einseitige Tests	z* für zweiseitige Tests
0.10	± 1.282	± 1.645
0.05	± 1.645	± 1.96
0.01	± 2.326	± 2.576
0.001	± 3.091	± 3.291

Die Entscheidungsregel lautet dann: Ist $|z| > |z^*|$, verwirf H_0, andernfalls nicht. Für unser Beispiel mit Stichprobengröße n = 10 kann H_0 auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}001$ verworfen werden und für n = 5 auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}01$.
Leider ist in vielen Fällen die Standardabweichung der Grundgesamtheit unbekannt. In diesem Fall muss als Schätzwert für die unbekannte Standardabweichung die etwas größere empirische Standardabweichung s genutzt werden. Dies bedeutet aber auch, dass ein Einstichstichproben-t-Test erforderlich wäre, der mit dem TI-Nspire™ CAS zwar machbar ist, aber in der schulischen Praxis nicht verwendet wird. Daher gehen wir bei den Beispielen immer von einer normalverteilten Grundgesamtheit und von einer bekannten Streuung aus.

6. Aufgaben, die ohne Hilfsmittel zu bearbeiten sind

Annett Fiedler, Ralph Huste

1. Gegeben ist der Graph einer $N(0;1)$ verteilten Zufallsgröße.
   a) Begründen Sie, weshalb für diese Verteilung gilt: $P(X \leq 0) = 0{,}5$.
   b) Kennzeichnen Sie in den grafischen Darstellungen (Abb. 6.1) für die angegebenen Intervalle jeweils die Wahrscheinlichkeit durch die zugehörige Fläche und schätzen Sie die Größe dieser Wahrscheinlichkeiten.



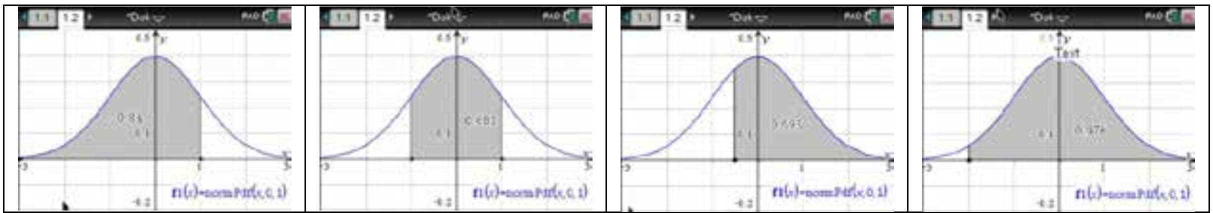
P(X < 1)	P(-1 ≤ X ≤ 1)	P(X > -0,5)	P(-2 < X ≤ 3)

Abb. 6.1 Standardnormalverteilung

Lösungsvorschlag:

a) Der Graph der Standardnormalverteilung ist symmetrisch zum Erwartungswert $\mu = 0$.
Die Fläche unter dem Graphen hat den Flächeninhalt 1. Dieser Zahlenwert entspricht der Wahrscheinlichkeit $\lim_{k\to\infty} P(-k < X < k)$. Deshalb hat die halbe Fläche den Inhalt 0,5.

b)



P(X < 1)	P(-1 ≤ X ≤ 1)	P(X > -0,5)	P(-2 < X ≤ 3)

Abb. 6.2 Lösungen zu Aufgabe 1

2. Gegeben ist für eine Zufallsgröße X ihre Normalverteilung $N(\mu;\ \sigma)$. Erläutern Sie, weshalb für die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten folgende Beziehungen gelten:

a) $P(X \geq \mu) = 0{,}5$ b) $P(X \geq x) = 1 - P(X < x)$

Lösungsvorschlag:

a) Der Graph der Standardnormalverteilung ist symmetrisch zum Erwartungswert μ.
Die Fläche unter dem Graphen hat den Flächeninhalt 1. Dieser Zahlenwert entspricht der Wahrscheinlichkeit $\lim_{k\to\infty} P(-k < X < k)$. Deshalb hat die halbe Fläche den Inhalt 0,5.

b) $P(X \geq x) = 1 - P(X\ < x)$
$P(X \geq x) + P(X < x) = 1$

3. Die Grafik zeigt die Geburtenziffern deutscher und ausländischer Frauen nach Alter der Mütter in Deutschland (je 1.000 Frauen des jeweiligen Alters) der Jahre 1991 und 2010. Untersuchen Sie aus der Anschauung heraus, ob es gerechtfertigt ist, das Merkmal „Alter der Mutter bei der Geburt ihres Kindes in Deutschland“ jeweils durch eine normalverteilte Zufallsgröße zu beschreiben.[31]
   Vergleichen Sie die Angaben.

   Geburten Deutschland 1991: 830.019 Kinder
   2010: 662.685 Kinder[32]

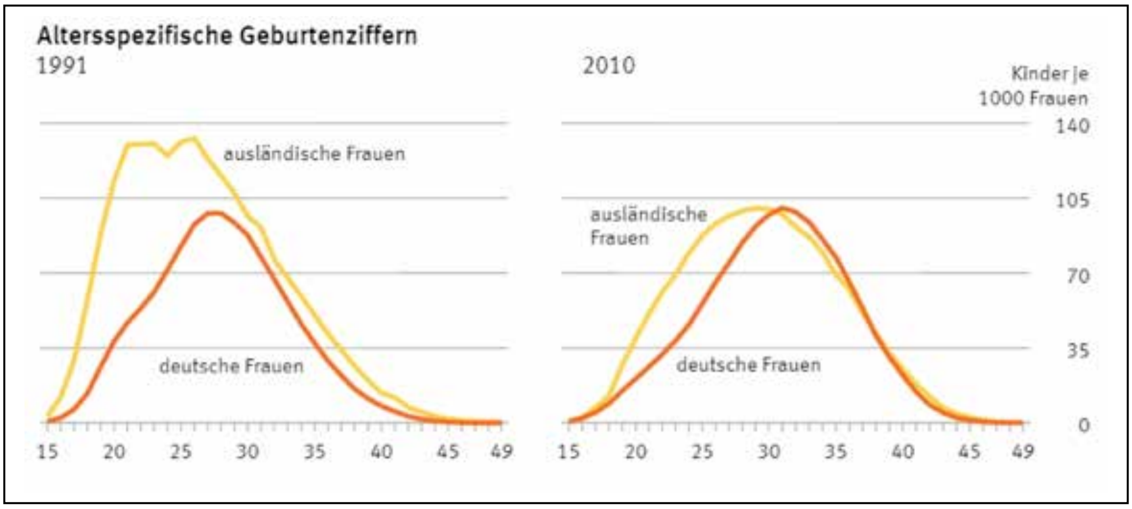


Abb. 6.3 Altersspezifische Geburtenziffern 1991, 2010

Lösungsvorschlag:

- Der Graph „Ausländische Frauen 1991“ zeigt nicht die Form einer Glockenkurve.
  Nein.

- Der Graph „Ausländische Frauen 2010“ kann in Näherung als Glockenkurve aufgefasst werden.
  Vermutlich normalverteilt um den Erwartungswert 30 Jahre.

- Die Graphen „Deutsche Frauen 1991 und 2010“ können als Glockenkurven aufgefasst werden.
  Vermutlich normalverteilt um die Erwartungswerte 27 Jahre und 32 Jahre.

- Für diese drei Graphen ist die maximale Geburtenanzahl in den Maxima ungefähr gleich, aber 1991 bekamen die Frauen durchschnittlich 5 Jahre eher ein Kind.
  Die Verteilung um die Erwartungswerte ist in etwa gleich geblieben.

- Vergleicht man die Graphen „Ausländische Frauen 1991 und 2010“ stellt man fest: die Geburtenziffern sind zum Teil deutlich zurückgegangen, das Alter für eine Geburt ist höher geworden, ist aber noch niedriger als das Alter der deutschen Frauen.

- 1991 wurden (relativ gesehen) in Deutschland wesentlich mehr Kinder von ausländischen Frauen geboren als von deutschen.

- 2011 ist die Differenz der Geburtenzahlen ausländischer und deutscher Frauen kleiner geworden.

[31] https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/GesellschaftStaat/Bevoelkerung/Geburten/Geburten.html
[32] http://de.statista.com/statistik/daten/studie/235/umfrage/anzahl-der-geburten-seit-1993/

4. Die Tabelle zeigt eine Statistik aus dem Jahr 2011 über den Anteil der Familienhaushalte in Deutschland bezogen auf die Anzahl der im Haushalt lebenden Kinder. Begründen Sie, dass hierfür keine Normalverteilung zugrunde gelegt werden kann.[33]

Anzahl Kinder	1	2	3	4	≥5
Prozent	52,5	35,9	9,1	1,8	0,6

Lösungsvorschlag:
- diskrete Verteilung
- keine Symmetrie, keine Glockenkurve

5. Aus früheren Reihenuntersuchungen von deutschen Studienanfängern ist bekannt: Die Höhe ihres systolischen Blutdrucks ist normalverteilt, und zwar mit einem Erwartungswert von 120 mmHg (Millimeter Quecksilbersäule)
sowie einer Standardabweichung von 10 mmHg.
Interpretieren Sie diese Angaben.[34]

Lösungsvorschlag:
Der systolische Blutdruck deutscher Studienanfänger liegt bei etwas weniger als 70 % der Studienanfänger zwischen 110 mmHg und 130 mmHg (1σ-Umgebung).
Für 99,7 % der deutschen Studienanfänger liegt der Blutdruck im Intervall $[90\ mmHg, 150\ mmHg]$ (3σ-Umgebung).
Aufgrund des Modells könnte der Blutdruck auch negative Werte und unwahrscheinlich große Werte annehmen.
Aus physiologischer Sicht gilt das Modell Normalverteilung nur im Bereich $[80\ mmHg, 200\ mmHg]$.

[33] http://www.bpb.de/nachschlagen/zahlen-und-fakten/soziale-situation-in-deutschland/61597/haushalte-nach-zahl-der-kinder
[34] Vgl. Lehrbuch Mathematik Gymnasiale Oberstufe; Qualifikationsphase – Brandenburg, Duden Paetec, Berlin, 2012, S. 448

6. Dargestellt ist die Verteilungsfunktion für eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit $n = 100$ und einer Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}5$.
(Hinweis: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$)

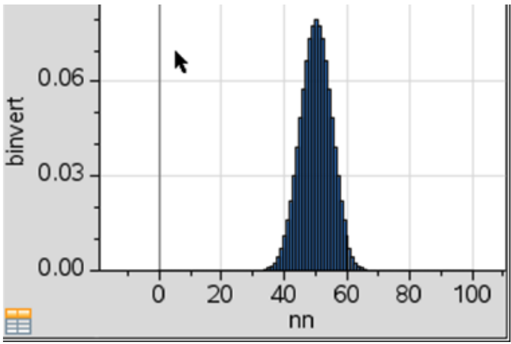


Abb. 6.4 Verteilungsfunktion zu Aufgabe 6

a) Veranschaulichen und erläutern Sie die Begriffe „Erwartungswert“ und „Standardabweichung“.
Geben Sie diese Werte an.

b) Erläutern Sie anhand der grafischen Darstellung die Bedeutung der Sigma-Regeln:

1σ-Intervall [μ-σ ; μ+σ]: $P(\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma) \approx 68{,}3\ \%$.
2σ-Intervall [μ-2σ ; μ+2σ]: $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95{,}4\ \%$.
3σ-Intervall [μ-3σ ; μ+3σ]: $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99{,}7\ \%$.

c) Begründen Sie anhand der Grafik, dass das Ereignis „Genau 20 Mal Erfolg.“ sehr selten eintritt.

Lösungsvorschlag:

a) Der Erwartungswert liegt bei 50.
Bei diesem binomialverteilten Zufallsexperiment $B_{100;0.5}$ ist 50 Mal „Erfolg“ zu erwarten. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Erfolg genau 50 Mal eintritt, ist am größten.

Die Standardabweichung beträgt 5.
Die Standardabweichung ist (bei gleichem Stichprobenumfang) ein Maß dafür, wie breit das Histogramm „auseinanderläuft“. Kleine Standardabweichungen kennzeichnen schlanke und hohe Histogramme, große Standardabweichungen kennzeichnen breite und flachere Histogramme (siehe grafische Darstellung).

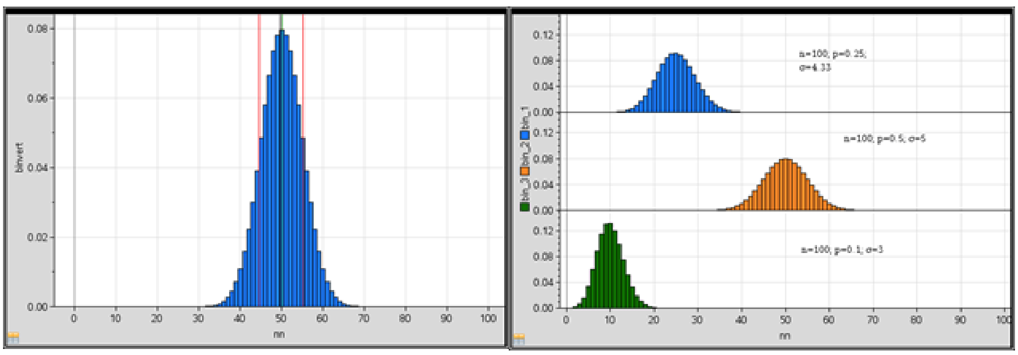


Abb. 6.5 Verteilungsfunktion mit Erwartungswert und Standardabweichung

b)

1σ-Intervall	2σ-Intervall	3σ-Intervall
$P(\mu - 1\sigma \le X \le \mu + 1\sigma)$ $= P(50 - 5 \le X \le 50 + 5)$ $= P(45 \le X \le 55) \approx 68{,}3\,\%$	$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma)$ $= P(50 - 2 \cdot 5 \le X \le 50 + 2 \cdot 5)$ $= P(40 \le X \le 60) \approx 95{,}4\,\%$	$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma)$ $= P(50 - 3 \cdot 5 \le X \le 50 + 3 \cdot 5)$ $= P(35 \le X \le 65) \approx 99{,}7\,\%.$

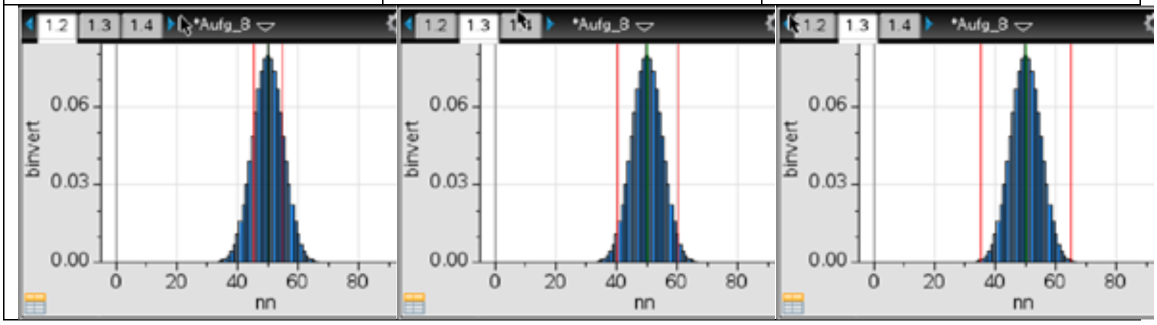


Abb. 6.6 Verteilungsfunktion mit entsprechendem σ-Intervall

c) In der Grafik ist erkennbar, dass die Wahrscheinlichkeit für $k = 20$ sehr klein ist.
Es gilt: $B_{100;0.5}(X = 20) \approx 0$.
Das Stichprobenergebnis $k = 20$ liegt außerhalb der 3σ-Umgebung.
Stichprobenergebnisse, die außerhalb der 2σ-Umgebung um den Erwartungswert liegen, werden in der beurteilenden Statistik als ungewöhnliche Stichprobenergebnisse bezeichnet.

7.[35] Betrachtet man Histogramme binomialverteilter Zufallsgrößen mit großem n, stellt man fest, dass diese Histogramme die Form einer Glockenkurve annehmen. Man könnte also das Histogramm einer Binomialverteilung durch eine stetige Verteilung, z. B. die Normalverteilung approximieren und diese anschließend standardisieren.
Erläutern Sie das Vorgehen bei der Standardisierung einer Binomialverteilung hin zur Normalverteilung.
Nutzen Sie dazu die grafischen Darstellungen.

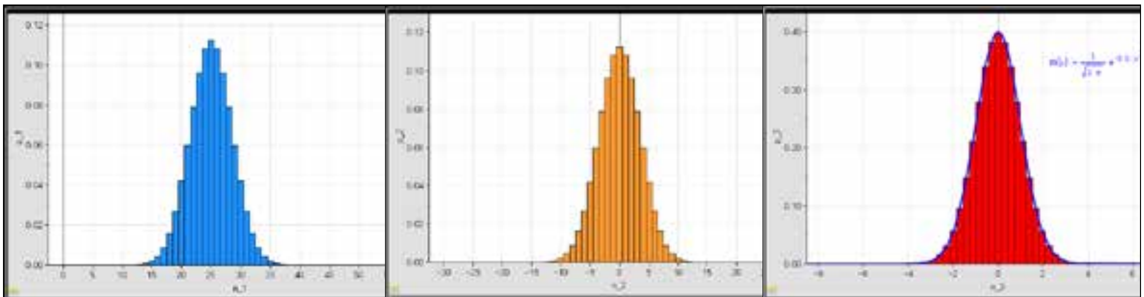


Bild 1	Bild 2	Bild 3

Abb. 6.7 Verteilungsfunktion zu Aufgabe 7

Lösungsvorschlag:
Die Gestalt des Histogramms einer binomialverteilten Zufallsgröße hängt nur von den Parametern n und p ab.
Für Werte von p in der Nähe von 0,5 zeigt das Histogramm einen annähernd symmetrischen Verlauf.
Für große Werte von n nähert sich die Form des Histogramms einer Glockenkurve an.

[35] bei Umsetzung Thüringer Lehrplan 2013 nur Vertiefungsthema

Forderungen an das Histogramm:
- symmetrisch zur y-Achse
- Breite: $-3\sigma \leq x \leq 3\sigma$
- Flächeninhalt unter der Kurve 1

Vorgehen:
- Verschieben des Histogramms, sodass der Erwartungswert auf der y-Achse (Achse der Wahrscheinlichkeiten) zu liegen kommt.
- Normieren der Standardabweichung auf den Wert $\sigma = 1$.
- Ändern der Funktionswerte so, dass der Flächeninhalt unter der Kurve wieder 1 wird.

8. In der Tabelle sind Sachverhalte beschrieben, in denen eine Wahrscheinlichkeit zu ermitteln ist. Dazu stehen verschiedene Modelle und Verfahren, wie z. B. das Modell Binomialverteilung, zur Verfügung.
   Entscheiden Sie sich jeweils für ein geeignetes Modell. Begründen Sie Ihre Entscheidung aus mathematischer Sicht.

Sachverhalt	geeignetes Modell	Begründung
Wahrscheinlichkeit, dass bei 500 Münzwürfen höchstens 200 Mal Kopf fällt.		
Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse mit 30 Schülern zwei Schüler unterschiedlichen Geschlechts zum Klassensprecher bzw. Stellvertreter gewählt werden.		
Wahrscheinlichkeit, dass zwei Schüler a) einer Klasse (max. 30 Schüler) b) einer Schule (ca. 900 Schüler) am 20. Mai Geburtstag haben.		
Für einen Spielautomaten wird „80 % Gewinnausschüttung“ versprochen. Ein Spielautomat schüttet bei 1.000 Testläufen 685 € der eingezahlten 1.000 € aus. Gibt das Ergebnis Anlass, an dem Versprechen zu zweifeln?		
In einer Stichprobe von 100 Bauteilen, für die ein Anteil von 3 % defekten Bauteilen behauptet wird, findet man 5 defekte Bauteile. Ist die Behauptung glaubwürdig?		

Lösungsvorschlag:

Sachverhalt	geeignetes Modell	Begründung
Wahrscheinlichkeit, dass bei 500 Münzwürfen höchstens 200 Mal Kopf fällt.	Binomialverteilung Normalverteilung (nur für Vertiefungsthema)	- zwei Ergebnisse: Kopf und Zahl - für jeden Wurf gilt: P(K) = P(Z) = 0,5 - Aufgrund der Gültigkeit der Laplace-Bedingung ($n \cdot p \cdot (1-p) > 9$), wäre auch eine Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung möglich.

Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse mit maximal 30 Schülern zwei Schüler unterschiedlichen Geschlechts zum Klassensprecher bzw. Stellvertreter gewählt werden.	Ziehen ohne Zurücklegen (Den Begriff: Hypergeometrische Verteilung kennen die Schüler i.d.R. nicht.)	Ziehen von zwei Schülern aus einer Menge von 30 Schülern, wobei der im ersten Zug gezogene Schüler für den zweiten Zug nicht infrage kommt, denn Klassensprecher und Stellvertreter sollen zwei verschiedene Personen sein.
Wahrscheinlichkeit, dass zwei Schüler a) einer Klasse (max. 30 Schüler) b) einer Schule (ca. 900 Schüler) am 20. Mai Geburtstag haben.	a) und b) Ziehen mit Zurücklegen bzw. Binomialverteilung b) Hinweis für Vertiefungsthema	- zwei Ergebnisse: E_1: „Geburtstag am 20.5.“ E_2: „Geburtstag nicht am 20.5.“ - Die Geburtstage der Schüler sind nicht voneinander abhängig (Mehrlinge in der Klasse wären als Sonderfall zu betrachten). Trotz der großen Zahl der Schüler (n = 900) ist die Laplace-Bedingung nicht erfüllt, denn es gilt: $900 \cdot \frac{1}{365} \cdot \frac{364}{365} \approx 900 \cdot \frac{1}{300} \cdot 1 = 3 \ll 9.$
Für einen Spielautomaten wird „80 % Gewinnausschüttung“ versprochen. Ein Spielautomat schüttet bei 1.000 Testläufen 685 € der eingezahlten 1.000 € aus. Gibt das Ergebnis Anlass, an dem Versprechen zu zweifeln?	empirisches Gesetz der großen Zahlen	Nach einer sehr großen Anzahl von Versuchsdurchführungen stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten. Bei 1.000 Wiederholungen des Zufallsexperiments gibt es berechtigten Anlass, daran zu zweifeln, dass der Automat nur etwa 70 % Gewinnausschüttung zeigt.
In einer Stichprobe von 100 Bauteilen, für die ein Anteil von 3 % defekten Bauteilen behauptet wird, findet man 5 defekte Bauteile. Ist die Behauptung glaubwürdig?	Binomialverteilung	- zwei Ergebnisse: E_1: „Bauteil defekt“ E_2: „Bauteil i.O.“ - für jedes geprüfte Bauteil gilt: P(„defekt“) = 0,03 Behauptung könnte mit einem einseitigen Signifikanztest mit $H_0 : p_0 \leq 0{,}03$ getestet werden.

9. Gegeben sind Aussagen zu Hypothesentests.
Entscheiden Sie jeweils den Wahrheitsgehalt. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) Wenn man zweimal hintereinander den gleichen Test durchführt, kann es sein, dass man zu unterschiedlichen Schlussfolgerungen gelangt.

b) Die Wahl einer geeigneten Nullhypothese H_0 ist entscheidend für die Interpretation eines Signifikanztests.

c) Liegt das Ergebnis eines Signifikanztests im Verwerfungsbereich von H_0, so kann man sicher sein, dass H_0 falsch ist.

d) Wird der Nichtverwerfungsbereich eines Hypothesentests vergrößert, so werden auch die Wahrscheinlichkeiten für beide Fehler größer.

e) Die Wahrscheinlichkeiten für den α- und β-Fehler geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit H_0 bzw. H_1 falsch sind.

f) Die Wahrscheinlichkeit für den α-Fehler gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit H_0 unberechtigterweise abgelehnt wird.

g) Alternativtests werden immer unter der Annahme durchgeführt, dass eine der beiden Hypothesen zutrifft.

h) Fällt das Ergebnis eines Signifikanztests in den Nichtverwerfungsbereich (Annahmebereich) von H_0, so
(i) kann man H_0 nicht ablehnen,
(ii) ist H_0 richtig.

i) Wenn man den Stichprobenumfang vergrößert, werden die Testergebnisse genauer.

Lösungsvorschlag:

a) WAHR – Tests beruhen auf Zufallsexperimenten, die, unter den gleichen Bedingungen wiederholt durchgeführt, zu unterschiedlichen Ergebnissen gelangen können.

b) WAHR – Als Nullhypothese wird in der Regel die Behauptung gewählt, die widerlegt werden soll. Ihre Wahl kommt also auf die Sichtweise des Betrachters an.
(Für die Nullhypothese wird über die Größe der Wahrscheinlichkeit des α-Fehlers das Signifikanzniveau festgelegt, d.h. die Größe der Wahrscheinlichkeit des Fehlers, mit dem die Nullhypothese zu Unrecht abgelehnt wird. Der Aufbau des gesamten Signifikanztests ist daher von der Wahl der Nullhypothese abhängig.)

c) FALSCH – Der Verwerfungsbereich für H_0 gibt an, bei welchen Ausgängen des Zufallsexperiments man die Hypothese H_0 verwerfen will. Dass H_0 tatsächlich falsch ist, kann nicht mit Sicherheit gesagt werden.

d) FALSCH – Wird der Nichtverwerfungsbereich (Annahmebereich) $\bar{V}$ für H_0 eines Hypothesentests vergrößert, so wird zugleich der Verwerfungsbereich V für H_0 kleiner. Für binomialverteilte Zufallsgrößen gilt: Wegen $\alpha = \mathrm{B}_{\mathrm{n;p_0}}(\mathrm{V})$ und $\beta = \mathrm{B}_{\mathrm{n;p_1}}(\bar{V})$ wird α bei Vergrößerung des Nichtverwerfungsbereichs für H_0 kleiner und β wird größer.

e) FALSCH – Die Wahrscheinlichkeit für den α-Fehler gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit H_0 für falsch gehalten wird, obwohl H_0 tatsächlich wahr ist. Die Wahrscheinlichkeit für den β-Fehler gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit H_1 für falsch gehalten wird, obwohl H_1 tatsächlich wahr ist. Ob H_0 bzw. H_1 wahr oder falsch sind, kann auch durch einen Test nicht zweifelsfrei entschieden werden.

f) WAHR – Die Wahrscheinlichkeit für den α-Fehler gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit H_0 für falsch gehalten und damit abgelehnt wird, obwohl H_0 tatsächlich wahr ist.

g) WAHR – Darauf basiert die Festlegung des Nichtverwerfungsbereiches für H_0, der zugleich Verwerfungsbereich für H_1 ist.

h) (i) WAHR
(ii) FALSCH – Aufgrund eines Tests kann man nur begründet an die Wahrheit von H_0 glauben, ob H_0 tatsächlich wahr ist, kann nicht zweifelsfrei entschieden werden.

i) WAHR – Eine Vollerhebung würde zu sicheren Ergebnissen führen, ist aber in der Praxis teils unmöglich oder zu teuer.

10. Dargestellt sind die Wahrscheinlichkeiten für den α- und β-Fehler eines Hypothesentests mit den Parametern
$n = 10,\ \ H_0:\ \ p_0 = 0{,}8\ ,\ \ H_1:\ \ p_1 = 0{,}6$.

Interpretieren Sie den Verlauf der dargestellten Graphen.
Schlussfolgern Sie aus diesem Verlauf auf die Gestaltung von Tests.

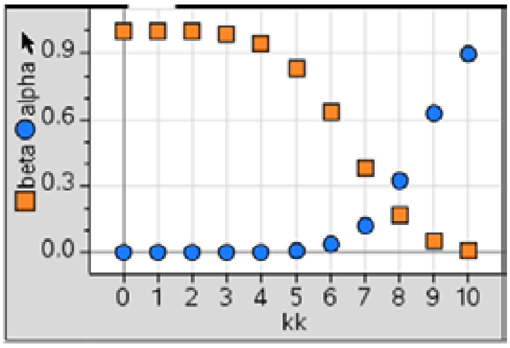


Abb. 6.8 Wahrscheinlichkeiten α- und β-Fehler

Lösungsvorschlag:
Im Bild ist klar der entgegengesetzte Verlauf von α- und β-Fehlern zu erkennen: Ist der α-Fehler klein, ist der β-Fehler groß. Wird der β-Fehler kleiner, steigt der α-Fehler. Beide Fehler gleichzeitig zu minimieren, ist nicht möglich.
Bei der Gestaltung eines Alternativtests muss demnach überlegt werden, welcher Fehler klein gehalten werden soll.
Kommt es darauf an, beide Fehler möglichst gering zu halten, wäre im Beispiel ein Nichtverwerfungsbereich für H_0 von $\bar{V} = \{7;\ 8; 9; 10\}$ oder $\bar{V} = \{8; 9; 10\}$ geeignet.

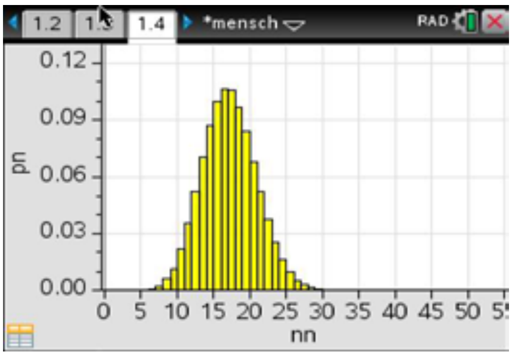


Abb. 6.9 Verteilungsfunktion der Zufallsgröße

11. Beim Mensch-ärgere-dich-nicht-Spiel wartet Thomas schon mehrere Runden auf eine Sechs. Langsam wird er ungeduldig und vermutet, dass der Würfel nicht ideal ist.
(H_0: $p_0 = \frac{1}{6}$ soll widerlegt werden).
Konstruieren Sie einen Hypothesentest, mit dessen Hilfe diese Vermutung überprüft werden könnte.

Interpretieren Sie die Arten der dabei auftretenden Fehler vor dem Hintergrund des Sachverhalts.

Die Abbildung zeigt die Verteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße mit $B_{100;\frac{1}{6}}$.

Zeichnen Sie in den Graphen den Nichtverwerfungsbereiches der Hypothese und den Bereich des α-Fehlers ein.

Lösungsvorschlag:

(1) Zweiseitiger Signifikanztest

mit Stichprobenumfang $n = 100$, $H_0\colon\ p_0 = \frac{1}{6}$, $H_1\colon\ p_1 \neq \frac{1}{6}$.

Der Nichtverwerfungsbereich für H_0 liegt symmetrisch um den Erwartungswert 17[36].

Es könnte $\overline{V} = \{14 \ldots 20\}$ als Nichtverwerfungsbereich von H_0 gewählt werden. Das bedeutet: Thomas würfelt versuchsweise 100 Mal. Fallen dabei mindestens 14 und höchstens 20 Sechsen, so ist er bereit, an einen idealen Würfel zu glauben, anderenfalls an einen gezinkten.

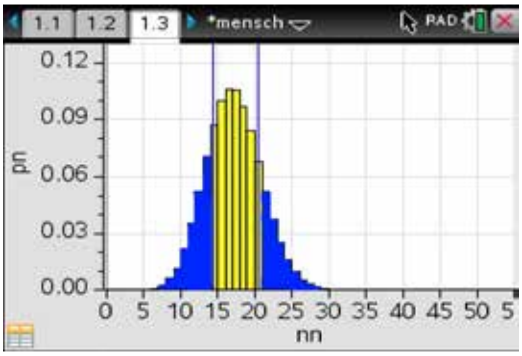


Abb. 6.10 Nichtverwerfungsbereich (gelb)

Der α-Fehler, H_0 wird abgelehnt, obwohl H_0 wahr ist, bedeutet in diesem Zusammenhang: Es fallen höchstens 13 oder mindestens 21 Sechsen, obwohl es sich tatsächlich um einen idealen Würfel handelt.

$\alpha = B_{100;\frac{1}{6}}(X \leq 13) + B_{100;\frac{1}{6}}(X \geq 21)$

Der Bereich außerhalb der blauen Linien ist hier noch relativ groß. Mit hoher Wahrscheinlichkeit würde man hier den Würfel zu Unrecht für gezinkt halten.

Um den β-Fehler zu ermitteln, müsste man eine Alternativhypothese aufstellen, z.B. „Nur jeder 10. Wurf ist eine Sechs.“ $(H_1\colon p_1 = \frac{1}{10})$.

Der β-Fehler, H_0 wird angenommen, obwohl H_0 falsch ist, bedeutet in diesem Zusammenhang: Es fallen mindestens 14 und höchstens 20 Sechsen, obwohl es sich tatsächlich um einen Würfel handelt, der im Mittel nur bei jedem zehnten Wurf eine Sechs würfelt.

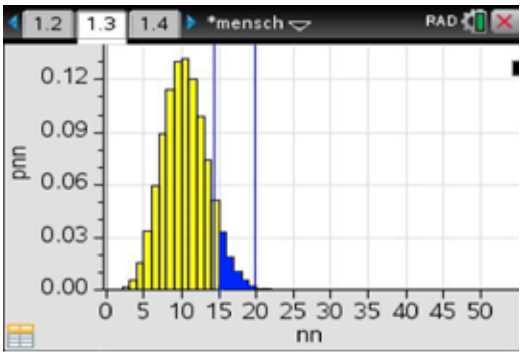


Abb. 6.11 Verwerfungsbereich (blau)

$\beta = B_{100;\frac{1}{10}}(14 \leq X \leq 20)$

Im Bild ist das der Bereich innerhalb der blauen Linien, also hier sehr klein. Die Wahrscheinlichkeit, den Würfel zu Unrecht für ideal zu halten, ist ziemlich gering.

[36] theoretischer Wert E(X)= 100/6, für das Spiel wählen wir als Erwartungswert 17

(2) Einseitiger Signifikanztest

mit Stichprobenumfang n = 100, $H_0: p_0 \geq \frac{1}{6}$; $H_1: p_1 < \frac{1}{6}$. Da für den Spieler nur der Fall unangenehm ist, bei dem weniger als ein Sechstel Sechsen gewürfelt werden, wäre auch ein einseitiger Signifikanztest dem Sachverhalt angemessen, testet aber nicht die Frage nach dem „idealen Würfel". Der Nichtverwerfungsbereich für H_0 liegt dann im Histogramm rechts, also für große Anzahlen gefallener Sechsen. Wegen des Erwartungswertes 17 könnte $A = \{14 \dots 100\}$ als Nichtverwerfungsbereich von H_0 gewählt werden. Das bedeutet: Thomas würfelt versuchsweise 100 Mal. Fallen dabei mindestens 14 Sechsen, so verwirft er die Hypothese „idealer Würfel" nicht, anderenfalls wird sie verworfen.

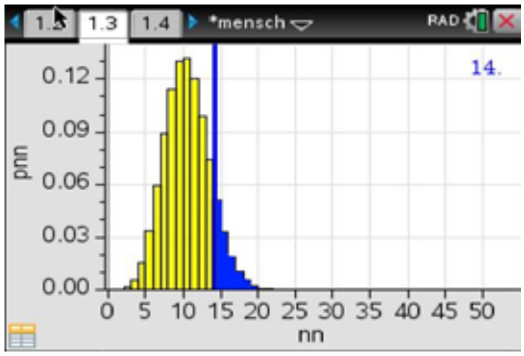


Abb. 6.12 Verwerfungsbereich (blau)

Der α-Fehler, H_0 wird abgelehnt, obwohl H_0 wahr ist, bedeutet in diesem Zusammenhang: Es fallen höchstens 13 Sechsen, obwohl es sich tatsächlich um einen idealen Würfel handelt. $\alpha = B_{100;\frac{1}{6}}(X \leq 13)$

Der Bereich links der blauen Linie ist relativ klein. Mit geringer Wahrscheinlichkeit würde man hier den Würfel zu Unrecht für gezinkt halten.

Um den β-Fehler zu ermitteln, müsste man eine Alternativhypothese aufstellen, z. B. „Nur jeder 10. Wurf ist eine Sechs."

(H_1: $p_1 = \frac{1}{10}$).Der β-Fehler, H_0 wird angenommen, obwohl H_0 falsch ist, bedeutet in diesem Zusammenhang: Es fallen mindestens 14 Sechsen, obwohl es sich tatsächlich um einen Würfel handelt, der im Mittel nur bei jedem zehnten Wurf eine Sechs würfelt.

$\beta = B_{100;\frac{1}{10}}(X \geq 14)$

Der Bereich rechts der blauen Linie ist hier sehr klein. Die Wahrscheinlichkeit, den Würfel zu Unrecht für ideal zu halten, ist ziemlich gering.

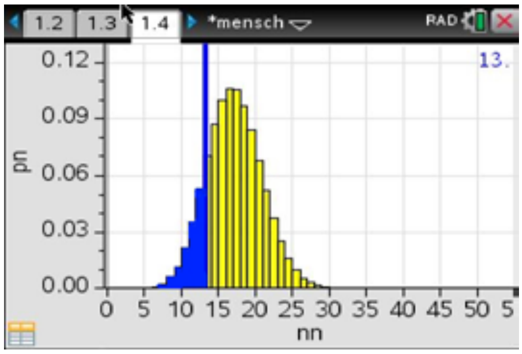


Abb. 6.13 Verwerfungsbereich (blau)

12. Veranschaulichen Sie in den drei Diagrammen einen zweiseitigen bzw. zwei einseitige Tests und beschreiben Sie jeweils die Fehlerarten. Der Stichprobenumfang beträgt n = 40.

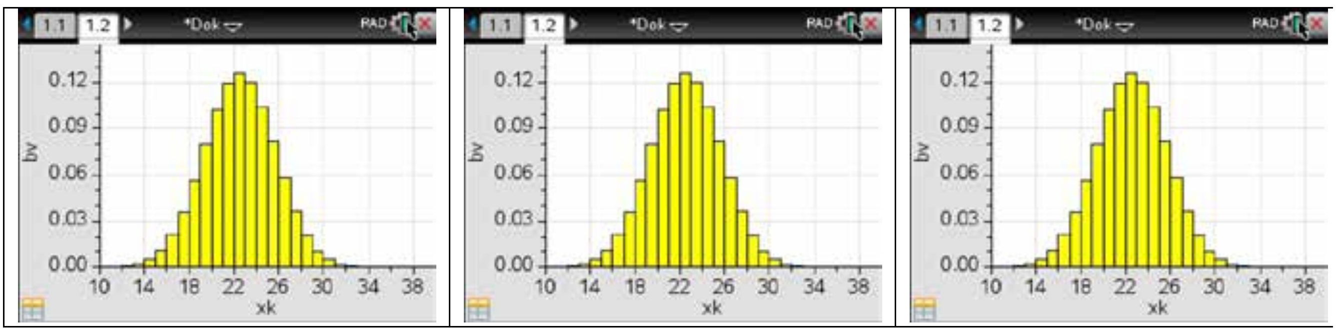


Abb. 6.14 Verteilungen zu Aufgabe 12

Lösungsvorschlag:

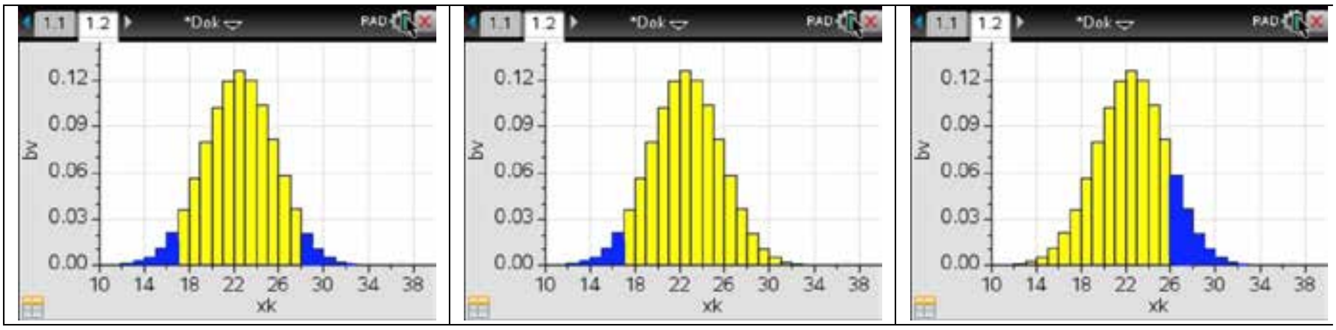


Abb. 6.15 Lösungen zu Aufgabe 12

Ziel eines Tests ist es, aufgrund einer Stichprobe auf bestimmte Merkmale der Grundgesamtheit zu schließen. In der Auswertung des Testergebnisses können aber Schlussfolgerungen gezogen werden, die falsch sind. Diese Fehler möchte man wenn möglich klein halten. Dabei kommt es in vielen Fällen auf die Interessen (Sichtweise) der Person an, die den Test mit seinen Parametern festlegt.
Die den Test veranlassende Person ist natürlich an einer richtigen Entscheidung interessiert, andererseits spielt beim Test der Zufall eine Rolle.
Unter der Annahme, dass für das Auftreten des interessierenden Merkmals die Wahrscheinlichkeit p_0 gilt, wird die Hypothese (Nullhypothese H_0) formuliert und je nach Testparameter ein Verwerfungsbereich und ein Nichtverwerfungsbereich festgelegt. Liegt das Ergebnis der Stichprobe (Testergebnis) im Verwerfungsbereich, will man aufgrund der Stichprobe das interessierende Merkmal ablehnen, ansonsten will man das interessierende Merkmal „anerkennen".
Dabei sind Fehler möglich: Man begeht einen Fehler 1. Art (α-Fehler), wenn das Testergebnis ein Verwerfen der Nullhypothese empfiehlt, obwohl in Wirklichkeit diese richtig ist. Man begeht einen Fehler 2. Art (β-Fehler), wenn das Testergebnis ein Nichtverwerfen der Nullhypothese empfiehlt, obwohl in Wirklichkeit diese falsch ist.

Es sind genau zwei Entscheidungen, folgend aus dem Ergebnis der Stichprobe, möglich: Die Nullhypothese ist zu verwerfen oder die Nullhypothese kann nicht verworfen werden.

a) zweiseitiger Signifikanztest
Beispiel: Ist eine Münze eine ideale Münze?

Testparameter:
Merkmal, Stichprobenumfang n, H_0: p_0 , H_1: $p_1 < p_0 \vee p_1 > p_0$ bzw. $p_1 \neq p_0$.
Die blau markierte Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art.

b) einseitiger (linksseitiger) Signifikanztest
Beispiel: Anzahl der Menschen, die schwimmen können, ist gesunken

Testparameter:
Merkmal, Stichprobenumfang n, H_0: p_0 , H_1: $p_1 < p_0$.
Die blau markierte Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art.

c) einseitiger (rechtsseitiger) Signifikanztest
Beispiel: Geschwindigkeitsüberschreitungen in einer Zone mit Begrenzung haben zugenommen

Testparameter:
Merkmal, Stichprobenumfang n, H_0: p_0 , H_1: $p_1 > p_0$.
Die blau markierte Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art.

Die Darstellungen b) und c) können auch als Veranschaulichung von Alternativtests aufgefasst werden (bei einfachen Hypothesen H_0 p_0 bzw. H_1: p_1)
Beispiel: nicht gekennzeichnete Lieferung von Kisten 1. Wahl und Kisten 2. Wahl

13. Im Zweifel für den Angeklagten[37]
Am 26.11.2008 fällte das Landesarbeitsgericht Berlin-Brandenburg ein Urteil, das auf einem mathematischen Indizienbeweis beruhte. Zum ersten Mal in Deutschland wurde ein Angeklagter (GEMA) aufgrund einer Wahrscheinlichkeitsrechnung verurteilt. Die GEMA (Gesellschaft für musikalische Aufführungs- und mechanische Vervielfältigungsrechte) beschäftigt ca. $2/3$ Frauen und hatte 2006 den Posten des Personaldirektors an einen Mann vergeben. Die Klägerin fühlte sich bei der Vergabe übergangen und ließ deshalb ein mathematisches Gutachten erstellen. Mit dem Ergebnis: Nimmt man an, dass die GEMA rein zufällig alle Direktorenposten mit Männern besetzen würde, beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür weniger als 1 %. Das Bundesarbeitsgericht entschied dann aber am 22.07.2010 gegen die Klägerin.

a) Wie könnten die Richter am Bundesarbeitsgericht argumentiert haben?
b) Bei einem Indizienurteil werden Gerichtsurteile aufgrund von Indizien, ohne klare Beweise getroffen.
Beschreiben Sie eine Hypothese, auf der ein solches Urteil beruht und diskutieren Sie die Fehler 1. und 2. Art.

Lösungsvorschlag:
a) Der Anteil der Frauen an der Gesamtbelegschaft lässt keinen Schluss auf die Verteilung auf das Geschlecht der Führungskräfte zu.

b) Die Staatsanwaltschaft möchte mit ihrer Hypothese den Angeklagten überführen. Die Verteidigung möchte diese Hypothese widerlegen.

Es liegen keine klaren Beweise für die Schuld des Angeklagten vor, nur Indizien (Anzeichen, Verdachtsmomente).

[37] http://raheinemann.de/diskriminierung-per-mathematik/

H_0: Der Angeklagte ist unschuldig – solange eine Schuld nicht nachgewiesen, gilt die Unschuldsvermutung

Wirklichkeit / Indizien	H_0 beschreibt die Wirklichkeit: der Angeklagte ist unschuldig	H_1 beschreibt die Wirklichkeit: der Angeklagte ist schuldig
Indizien legen Schuld nahe	Hier begeht man einen Fehler 1. Art: ***der Angeklagte wird irrtümlich schuldig gesprochen***	ok, Schuldspruch
Indizien legen Unschuld nahe	ok, Freispruch	Hier begeht man einen Fehler 2. Art: der Angeklagte wird irrtümlich freigesprochen

Einen Unschuldigen als schuldig zu verurteilen, darf nicht gestattet sein.
Es ist „schlimmer“ einen Unschuldigen zu verurteilen, als einen Schuldigen freizusprechen.

H_0: Der Angeklagte ist schuldig – Vorverurteilung

Wirklichkeit / Indizien	H_0 beschreibt die Wirklichkeit: der Angeklagte ist schuldig	H_1 beschreibt die Wirklichkeit: der Angeklagte ist unschuldig
Indizien legen Schuld nahe	ok, Schuldspruch	Hier begeht man einen Fehler 2. Art: ***der Angeklagte wird irrtümlich schuldig gesprochen***
Indizien legen Unschuld nahe	Hier begeht man einen Fehler 1. Art: der Angeklagte wird irrtümlich freigesprochen	ok, Freispruch

14. Ein Pharmaunternehmen möchte ein neues Medikament gegen Ebola auf den Markt bringen, von dem es behauptet, dass es in mindestens 70 % der Fälle zur Heilung führt.

    Erstellen Sie einen Test aus Sicht der Gesundheitsbehörde.
    Diskutieren Sie beide möglichen Fehler und deren Bedeutsamkeit.

Lösungsvorschlag:
Der Vertreter der Gesundheitsbehörde schlägt einen einseitigen Signifikanztest vor.
Testmerkmal: Medikament bringt Heilung
Stichprobenumfang:100 mit dem Medikament behandelte Infizierte (ausreichend große Anzahl)

Die Nullhypothese H_0 ist in der Prüfstatistik die Hypothese, die verworfen werden soll (resultiert aus einem gewissen Sicherheitsdenken). Die „Wahl" hängt vom Betrachter ab: hier Gesundheitsbehörde. Allerdings sollte die Gesundheit der Menschen im Vordergrund stehen. Der Fehler, den man begeht, wenn man aufgrund des Stichprobenergebnisses die Nullhypothese irrtümlich ablehnt, sollte klein sein.

Nullhypothese: Annahme, das Medikament wirkt bei mindesten 70 % der behandelten Erkrankten $H_0: p_0 \geq 0,7$

Alternativhypothese: $H_1:\ p_1 < 0,7$

Entscheidungsregel: Festlegen des Verwerfungsbereiches

Fehler 1. Art: Annahme, dass das Medikament bei mindestens 70 % der Fälle Heilung bringt.
Das Ergebnis der Stichprobe liefert aber: Das Medikament bringt bei weniger als 70 % der Erkrankten Heilung.
So verwirft man irrtümlich die Nullhypothese. Das bedeutet, man verwendet das Medikament nicht, obwohl es größere Heilungschancen verspricht.

Fehler 2. Art: Annahme, dass das Medikament nicht bei mindestens 70 % der Fälle Heilung bringt.
Das Ergebnis der Stichprobe liefert aber: Das Medikament bringt bei mindestens 70 % der Erkrankten Heilung.
So bleibt man irrtümlich bei der Nullhypothese. Das bedeutet, man verwendet das Medikament, obwohl es nicht das Versprochene hält.

15. Peter ist ein Spieler, der gerne Münzen wirft. Um seine Siegchancen zu vergrößern, hat er sich drei 1 €-Münzen besorgt, bei denen die Wahrscheinlichkeit, Wappen zu werfen, kleiner als 0,4 ist.
    Für das Anfertigen dieser Münzen musste Peter einen größeren Geldbetrag investieren.
    Eines Tages lässt er diese Münzen auf dem Tisch liegen. Peters Frau freut sich und steckt die drei Münzen in ihr Portemonnaie, in welchem sich schon eine Reihe von 1 €-Münzen befinden. Peter ist nun verärgert und möchte die drei Münzen wiederfinden.

Konstruieren und erläutern Sie einen Test und diskutieren Sie die dabei auftretenden Fehler.
Welchen Fehler würden Sie klein halten?

Lösungsvorschlag:
Peter wählt eine Münze und wirft diese.

Testmerkmal: Münze ist gezinkt, Werfen von Zahl ist wahrscheinlicher
Stichprobenumfang: 20 (ausreichend große Anzahl)

Nullhypothese: Münze ist gezinkt, Werfen von Zahl ist wahrscheinlicher H_0: $p_0 \geq 0{,}6$

Alternativhypothese: H_1: $p_1 < 0{,}6$

Entscheidungsregel: Festlegen des Verwerfungsbereiches

H_0: Münze ist gezinkt

Wirklichkeit / Testergebnis	H_0 beschreibt die Wirklichkeit: Münze gezinkt	H_1 beschreibt die Wirklichkeit: reguläres Geldstück
Ergebnis liegt im Verwerfungsbereich	Hier begeht man einen Fehler 1. Art: ***gezinkte Münze wird als reguläres Zahlungsmittel eingestuft***	ok, reguläre Münze
Ergebnis liegt außerhalb des Verwerfungsbereiches	ok, Münze gezinkt	Hier begeht man einen Fehler 2. Art: ***reguläre Münze als gezinkt eingestuft***

Wird eine gezinkte Münze irrtümlich (aufgrund des Testergebnisses) als reguläres Geldstück eingestuft, begeht man einen Fehler 1. Art.
Wird eine reguläre Münze irrtümlich (aufgrund des Testergebnisses) als gezinktes Geldstück eingestuft, begeht man einen Fehler 2. Art.
Da die gezinkten Münzen in der Anschaffung viel Geld gekostet haben, sollte die Wahrscheinlichkeit, diese Münzen irrtümlich als reguläres Geldstück anzuerkennen, klein gehalten werden.
Oder:
Da mit den gezinkten Münzen in Zukunft noch viel Geld verdient werden soll (leider nicht auf ehrliche Weise!), sollte die Wahrscheinlichkeit, diese eine reguläre Münze irrtümlich als gezinkte Münze anzuerkennen, klein gehalten werden.

7. Aufgabensammlung mit Hilfsmitteln

Hubert Langlotz, Andreas Prömmel

Beispiel 1

Jemand behauptet, dass 20 % der Bevölkerung Brillenträger sind. Um diese Behauptung zu testen, wird eine statistische Erhebung durchgeführt. Dabei werden unter 1.000 Personen 158 Brillenträger festgestellt. Kann man hieraus mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % schließen, dass die Behauptung zutrifft?
Wir lösen diese Aufgabe nach der skizzierten Schrittfolge zunächst unter Nutzung des Modells der Binomialverteilung:

1. Hypothese: 20 % der Bevölkerung sind Brillenträger
2. H_0: p = 0,2 H_1: p ≠ 0,2
3. Signifikanzniveau α = 0,05
4. Stichprobenumfang: n = 1000
5. Ermittelter Wert in der Stichprobe (Testgröße): 158 Brillenträger

Wir halten es für einen besonderen Vorzug des Umgangs mit digitalen Werkzeugen, dass man sich den Sachverhalt mithilfe einer simulierten Häufigkeitsverteilung darstellen kann (Abb. 7.1). Wiederholt man mit Ctrl+R die Simulation, dann erkennt man, dass unter der Bedingung H_0: p = 0,2 Abweichungen vom Erwartungswert 200 um ± 42 oder mehr äußerst selten vorkommen. In Anknüpfung an das P-Wert-Testen könnte man formulieren, dass der P-Wert sehr klein ist und es damit eine sehr starke Evidenz gegen die Nullhypothese H_0 gibt.

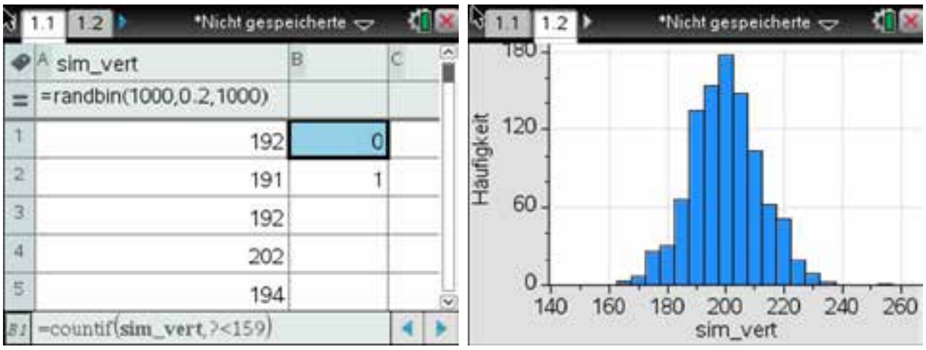
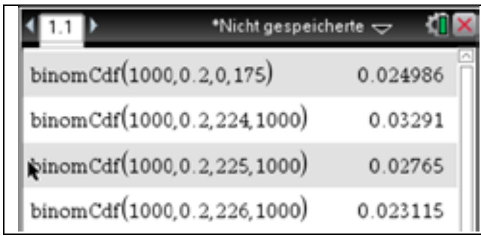


Abb. 7.1 Simulation von Häufigkeitsverteilungen für p = 0.2, n = 1000 und N = 1000

Rechnerisch ergeben sich für ein Signifikanzniveau von 5 % die Verwerfungs- bzw. Nichtverwerfungsbereiche für die Nullhypothese H_0 wie in Abbildung 7.2 dargestellt.



Verwerfungsbereich H_0

$$V = \{0,\ldots,175\} \cup \{226,\ldots,1000\}$$

Nichtverwerfungsbereich H_0

$$\overline{V} = \{176,\ldots,225\}$$

Abb. 7.2 Berechnen von Intervallwahrscheinlichkeiten und Angabe des Verwerfungs- bzw. Nichtverwerfungsbereiches für H_0.

Da 158 im Verwerfungsbereich liegt, kann die Nullhypothese verworfen werden und man kann auf dem 5 %-Signifikanzniveau behaupten, dass nicht genau 20 % der Bevölkerung Brillenträger sind.
Alternativ wäre auch die näherungsweise Berechnung des 95 %-Prognoseintervalls der Verteilung für H_0: p = 0,2 über die 2-Sigma-Umgebung möglich oder die exakte

Ermittlung des Nichtverwerfungsbereiches von H_0 über das Lösen einer Gleichung – quasi als Ersatz für die Quantile der Binomialverteilung (Abb. 7.3).

Abb. 7.3 Zwei Alternative Berechnungsmöglichkeiten für den Verwerfungs- bzw. den Nichtverwerfungsbereich von H_0

Der große Stichprobenumfang rechtfertigt auch eine Bearbeitung der Aufgabe mit dem Modell der Normalverteilung. Auch hier sind verschiedene Vorgehensweisen möglich (Abb. 7.4).

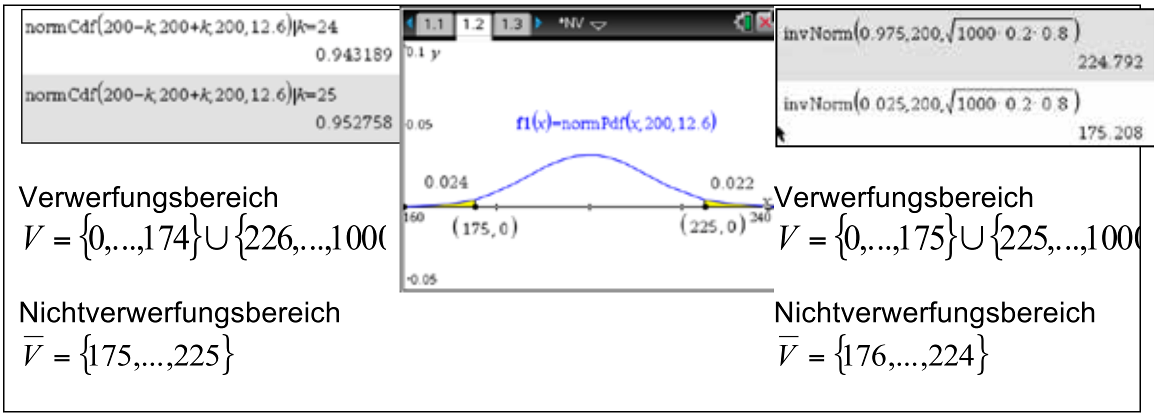


Abb. 7.4 Von TI-Nspire unterstützte Vorgehensweisen bei der Nutzung der Normalverteilung

So erhält man im ersten Fall eine symmetrische Verteilung um den Erwartungswert E(X) = 200 und im zweiten Fall (invNorm()-Befehl) einen leicht schiefen Nichtverwerfungsbereich. Rundet man allerdings die Ergebnisse (wie in mancher Literatur vorgeschlagen wird), dann erhält man den gleichen Nichtverwerfungsbereich wie bei der Nutzung des Binomialverteilungsmodells. In jedem Fall liegt das Testergebnis von H = 158 Brillenträgern im Verwerfungsbereich von H_0 und die Nullhypothese („Der Anteil der Brillenträger an der Gesamtbevölkerung beträgt 20 %".) kann auf dem vereinbarten Signifikanzniveau von α = 5 % verworfen werden. Diese Aussage ist relativ schwach, da sie nichts darüber aussagt, welcher Anteil dann infrage käme. Für die weitere Untersuchung bieten sich zwei Möglichkeiten: (1) Man legt einen festen Anteil zugrunde (z. B. p_1 = 0,16) und berechnet dafür den Fehler 2. Art – also praktisch ein Vorgehen wie beim bekannten Alternativtest. Oder (2) man nimmt die relative Häufigkeit aus der Stichprobe als Grundlage für die approximative **Berechnung** eines Intervalls, in dem in 95 von 100 Fällen der wahre Populationsanteil p liegen würde (Abb. 7.5). Dieses Intervall bezeichnet man als Konfidenzintervall (oder Vertrauensintervall), welches dazu dient, Angaben über die Güte der Schätzwerte aufzustellen.

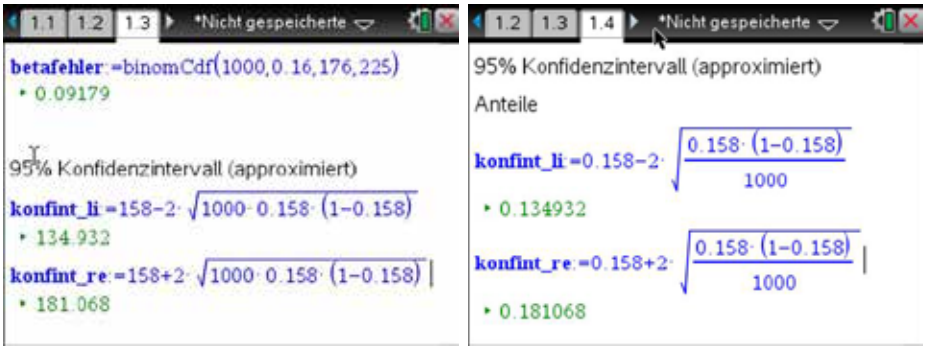


Abb. 7.5 Fehler 2. Art und Konfidenzintervall (Anzahl und Anteil)

Beispiel 2

Ein Smartphone-Hersteller behauptet, dass mindestens 40 % aller Smartphones, die in Deutschland verkauft werden, Produkte dieser Firma sind. Unter 200 zufällig befragten Smartphone-Besitzern hatten 90 ein Smartphone dieser Firma. Entwerfen Sie einen Signifikanztest aus Sicht der Firma und aus Sicht eines anderen Unternehmens, welche die Aussage der ersten Firma widerlegen möchte.

Lösungsskizzen

a) Sicht der Firma: H_0: $p \leq 0{,}4$ H_1: $p > 0{,}4$ $\alpha = 0{,}05$ $n = 200$ rechtseitiger Test

Abb. 7.5 rechtsseitiger Test

Der Verwerfungsbereich wäre demzufolge $V = [92; \ldots; 200]$. Da nur 90 der Befragten angaben, ein solches Smartphone zu haben, kann die Firma ihre Nullhypothese nicht verwerfen.

b) Sicht des anderen Unternehmens: H_0: $p \geq 0{,}4$ H_1: $p < 0{,}4$ $\alpha = 0{,}05$ $n = 200$ linksseitiger Test

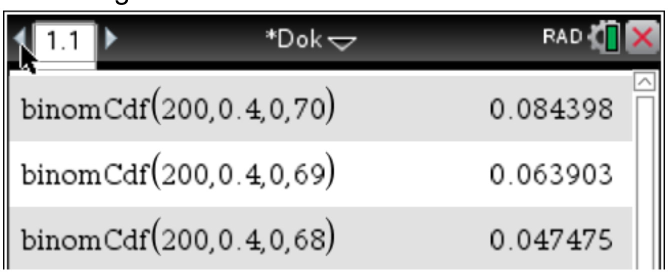


Abb. 7.6 linksseitiger Test

Der Verwerfungsbereich wäre hier $V = \{0; \ldots; 68\}$. Da aber 90 der Befragten angaben, ein solches Smartphone zu haben, kann die gegnerische Firma ihre Nullhypothese auch nicht verwerfen.

Beispiel 3

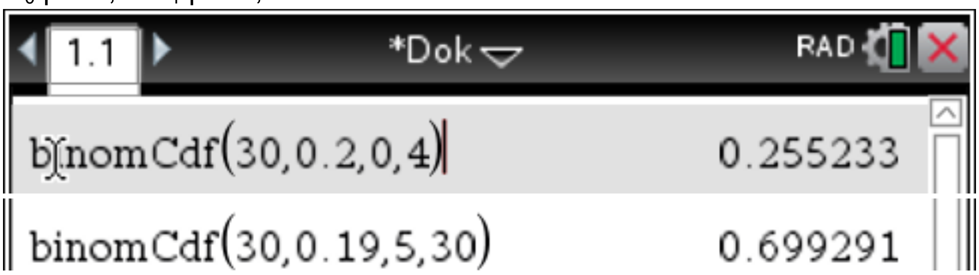
Tim behauptet, dass ein Glücksrad angeblich in mindestens 20 % der Drehungen auf Rot zum Stehen kommt. Max will die Behauptung verwerfen, wenn bei dreißig Versuchen weniger als 5 Mal Rot erscheint.

a) Wie lautet hier sinnvollerweise die Nullhypothese?
b) Berechnen Sie den Fehler 1. Art.
c) Berechnen Sie für die angenommene Wahrscheinlichkeit für Rot mit p = 0,19 den Fehler 2. Art.

Abb. 7.7 Glücksrad (rot unten)

Lösungsskizzen

a) H_0:p ≥ 0,2 H_1:p < 0,2 n = 30



b)
c)

Abb. 7.8 linksseitiger Test

Beispiel 4

Ein Bananenlieferant gibt an, dass höchstens 2 % der Lieferung nicht genutzt werden können. In einer Lieferung von 1.200 Bananen waren 20 verfault.

a) Bewerten Sie die Aussage des Lieferanten: „Damit ist ja meine Aussage bewiesen, denn 20 von 1.200 ist kleiner als 2 %".
b) Entwerfen Sie einen Test aus Sicht des Lieferanten, der seine Aussage stützen soll.
c) Entwerfen Sie einen Test aus Sicht des Abnehmers, der die Aussage des Lieferanten mit einem entsprechenden Signifikanzniveau widerlegt.
d) Wie könnte die Verhandlung weitergehen?

Lösungsskizzen

a) Nur mit diesem einen „Schätzwert" kann man nicht sicher sein, dass die Aussage stimmt. Betrachtet man z. B. das 95 %-Vertrauensintervall (welches man mit dem TI-Nspire mit dem Befehl zIntervall_1Prop bestimmen kann), so erkennt man, dass bei diesen Werten durchaus auch die Möglichkeit bestände, dass mehr als 2 % der Bananen nicht mehr genutzt werden können (das ermittelte Vertrauensintervall ist hier [0,0094; 0,0239]).

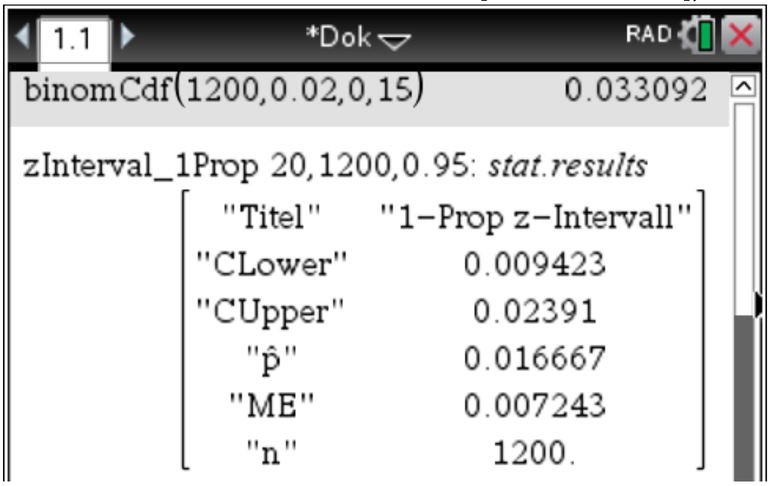


Abb. 7.9 1-Prop z-Intervall

b) Sicht des Lieferanten: H_0: $p \geq 0{,}02$ H_1: $p < 0{,}02$ $\alpha = 0{,}05$ $n = 1200$ linksseitiger Test

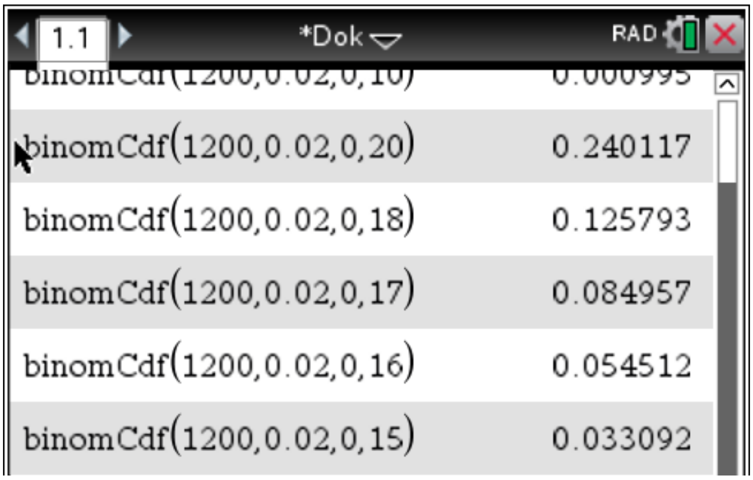


Abb. 7.10 linksseitiger Test

Der Verwerfungsbereich wäre hier $V = \{0; \ldots; 15\}$. Mit dem vorliegenden Testergebnis könnte der Lieferant seine Aussage nicht signifikant absichern.

c) Sicht des Abnehmers: H_0: $p \leq 0{,}02$ H_1: $p > 0{,}02$ $\alpha = 0{,}05$ $n = 1200$ rechtsseitiger Test

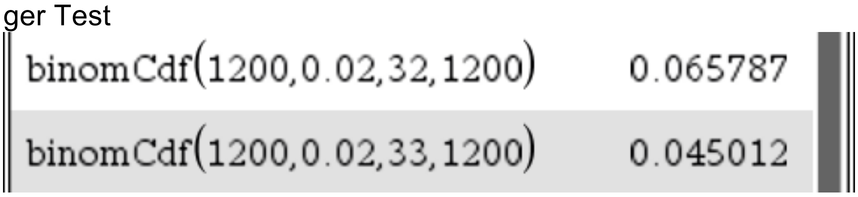


Abb. 7.11 rechtsseitiger Test

Der Verwerfungsbereich wäre hier $V = \{33; \ldots; 1200\}$.

d) Eine Möglichkeit wäre, einen weiteren Test durchzuführen, eventuell mit einer Erhöhung der Stichprobengröße.

Beispiel 5

Auf der Homepage einer Schule wird der Anteil der Schüler, die mit öffentlichen Verkehrsmitteln zur Schule kommen, mit 40 % angegeben. Der Schulleiter glaubt, dass diese Angabe veraltet ist und plant dies durch einen Test zu belegen, bei dem 100 Schüler diesbezüglich befragt werden sollen. Formulieren Sie eine Entscheidungsregel für eine Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5 %.

Lösungsskizze:

H_0: p =0,4 H_1: p ≠ 0,4 α = 0,05 n = 100 zweiseitiger Test

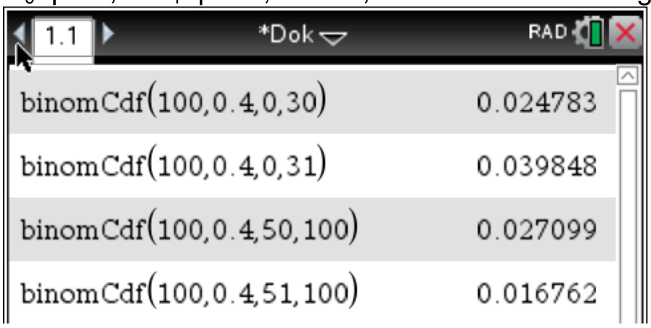


Abb. 7.12 zweiseitiger Test

Verwerfungsbereich $V = \{0,\ldots,30\} \cup \{50,\ldots,100\}$

Beispiel 6

Man vermutet, dass beim Boxkampf des Jahrtausends die Einschaltquoten zwischen 60 % und 80 % liegen werden. Um entsprechende Werbeverträge abschließen zu können, soll diese Aussage auf dem 5 %-Signifikanzniveau unter 500 repräsentativ ausgewählten Personen bestätigt werden.
Entwickeln Sie das entsprechende Testverfahren.
Lösungsskizzen

H_0: p < 0,6   oder p > 0,8
H_1: p ≥ 0,6 oder p ≤ 0,8   n = 500 α = 0,05
V_1: {322; 500} V_2: {0; 381}
Wenn mindestens 322 und höchstens 381 den Boxkampf sehen wollen, kann die Nullhypothese widerlegt (verworfen) und die Behauptung damit bestätigt werden.

Beispiel 7

Studieren Sie den folgenden Text und entwerfen Sie einen Signifikanztest zur Bestätigung oder Widerlegung der Aussage des Wissenschaftlers.

contrAtom

Informationsnetzwerk gegen Atomenergie

Startseite | Nachrichten | Hintergrund / Standorte | Themen | Über uns

Weniger Mädchen: Auffällige Geburtenrate bei Gorleben

23. Februar 2011

Rund um das Zwischenlager im niedersächsischen Gorleben hat sich das Geschlechterverhältnis bei Geburten verschoben. Im Umfeld des Atomzwischenlagers in Gorleben im Landkreis Lüchow-Dannenberg werden deutlich weniger Mädchen geboren als früher: Seit Inbetriebnahme des Lagers 1996 kamen nach einer der Nachrichtenagentur dpa vorliegenden Untersuchung von Wissenschaftlern des Helmholtz-Zentrums München "signifikant" weniger weibliche Kinder zur Welt.

In der Zeit seit Beginn der Einlagerung hätten in den an das Zwischenlager grenzenden Gemeinden Gorleben, Höhbeck und Trebel 120 Jungen und 111 Mädchen das Licht der Welt erblickt – ein Verhältnis von eins zu 1,081, sagte Ralf Kusmierz, einer der Autoren der Studie. Dieses liegt zwar noch relativ nahe am Bundesdurchschnitt von 1,055 – allerdings wurden in den drei Gemeinden zwischen 1971 und 1995 sogar mehr Mädchen als Jungen geboren, so dass sich das Verhältnis umgekehrt hat. Zudem verschiebe sich die Verteilung umso mehr, je näher sich die Wohnung der Mutter am Lagerbehälterhaus befinde.

> „Im Ergebnis kann man als gesichert betrachten, dass seit Inbetriebnahme des Transportbehälterlagers in Gorleben in der Region signifikant weniger Mädchen geboren werden als zuvor,und zwar umso mehr, je näher sich die Wohnung der Mütter am Lagerbehälterhaus befindet", so Wissenschaftler Kusmierz. "Ich halte dies nicht für einen Zufall", sagte Kusmierz. Er gehe davon aus, "dass sich fruchtschädigende Einflüsse in der frühen Schwangerschaft geschlechtsspezifisch auswirken und insbesondere weibliche Embryos absterben lassen, wodurch bei den Lebendgeborenen der Jungenanteil steigt".

Kusmierz hatte im vergangenen Jahr bereits festgestellt, dass in der Gemeinde Remlingen rund um das marode Atommülllager Asse der Jungenanteil unter den Geborenen ebenfalls extrem überhöht sei. Da in der Asse radioaktive Emmissionen wie Gase bekannt seien, sei hier die Ursache erkennbar, sagte Kusmierz. "In Gorleben sind mir die Ursachen jedoch nicht klar."

> "Die Zahlen sind äußerst besorgniserregend", sagte der umweltpolitische Sprecher der Linksfraktion, Kurt Herzog. Die schwarz-gelbe Landesregierung müsse daher schnell handeln: "Ich erwarte, dass jetzt sofort das kleinräumige Monitoring in Angriff genommen wird, das Sozialministerin Aygül Özkan (CDU) aus Anlass der Krebsfälle in der Asse angekündigt hatte".

Abb. 7.13 Quelle (Auszug): ndr.de, 23.02.2011

Lösungsskizzen:

Einseitiger Signifikanztest
H_0: $p \leq 0{,}513382$ H_1: $p > 0{,}513382$ $n = 231$ $\alpha = 0{,}05$

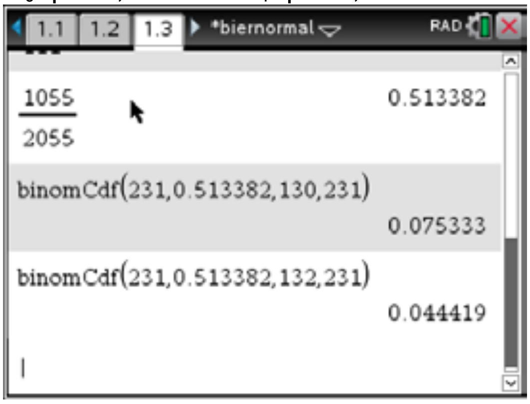


Abb. 7.14 rechtsseitiger Test

Verwerfungsbereich: V = {132,…,231}. Da 120 < 132 ist, kann die Nullhypothese nicht verworfen werden (allerdings wird nirgendwo im Text auf das Signifikanzniveau verwiesen).

Einseitiger Signifikanztest (aus Sicht der Regierung bringt auch keine Aussage)
H_0: $p \geq 0{,}513382$ H_1: $p < 0{,}513382$ $n = 231$ $\alpha = 0{,}05$

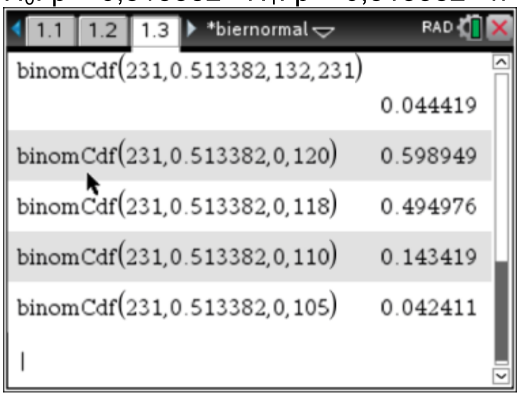


Abb. 7.15 linksseitiger Test

Zumindest diese Zahlen können die Aussage nicht belegen. So hat auch z. B. W. Krämer massive Kritik am Design dieser Studie geübt.

Beispiel 8

Nicht alles ist binomialverteilt.

Meine Oma behauptet, dass sie ihren Spezialkaffee immer herausschmeckt.
Ich bezweifele dies und wir einigen uns auf einen Test. In 10 Tassen befindet sich fünfmal der Spezialkaffee und fünfmal nicht. Sie wählt zufällig 4 Tassen aus. Meine Oma meint, wenn sie dabei dreimal richtig liegt, dann kann sie ihren Kaffee wirklich herausschmecken.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein solches oder ein noch besseres Ergebnis nur durch Zufall zu erzielen? (Wir fragen hier also nach dem P-Wert für dieses Experiment.)

Lösung:

Wir müssen hier von der sogenannten hypergeometrischen Verteilung ausgehen (Ziehen ohne Zurücklegen).
Da im TI-Nspire keine vordefinierte Funktion für die hypergeometrische Verteilung vorhanden ist, muss man sich diese Funktion definieren. (Die Parameter stehen für: x – Trefferzahl, n – Grundgesamtheit, m – Anzahl der betrachteten Eigenschaft in n, u – Stichprobengröße)

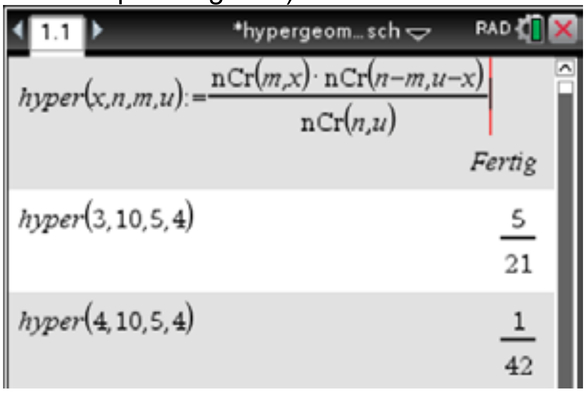


Abb. 7.16 Hypergeometrische Wahrscheinlichkeit

Es ergibt sich hier ein P-Wert von ca. 26,2 %, also weit entfernt von etwaiger Signifikanz.
Erst bei 4 „Treffern“ würde man unter die allgemein übliche 5 %-Grenze kommen. (Hätte man hier mit der Binomialverteilung (n = 4, p = 0,5) gerechnet, wäre man auf 31,25 % gekommen.)

Eine Simulation dieses Problems wäre mithilfe des randSamp-Befehls denkbar.

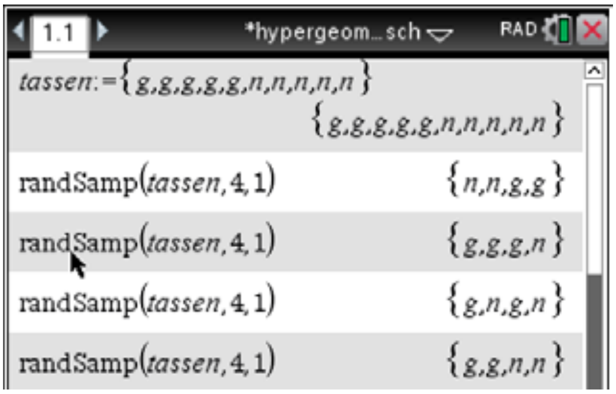


Abb. 7.17 Simulation mit randSamp()

Verknüpft man dies mit dem countif-Befehl, so kann man den Vorgang z. B. 100 Mal simulieren.

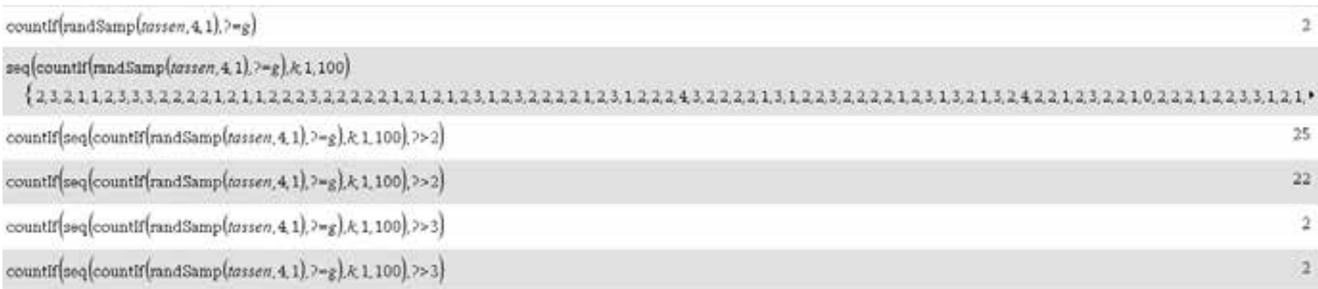


Abb. 7.18 Verschachtelte Simulation mit seq()-Befehl und Auswerten mit countIf()

Beispiel 9

Eine neue Wurstsorte hat angeblich nur 10 g Fett pro Verpackungseinheit. Wir gehen davon aus, dass die Fettmenge mit einer Standardabweichung von 0,9 g normalverteilt ist. Eine zufällige Probe von 100 Packungen ergibt einen Mittelwert von 10,3 g Eiweiß. Untersuchen Sie, ob der tatsächliche Fettgehalt kleiner oder gleich 10 g pro Verpackungseinheit ist, das heißt, ob μ ≤ 10 g mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit von 10 % ist.

Lösungsansatz

$$\text{invNorm}\left(0.9, 10, \frac{0.9}{\sqrt{100}}\right) \qquad 10.1153$$

10,3 liegt im Verwerfungsbereich, also kann die Nullhypothese μ ≤ 10 g verworfen werden.

Beispiel 10

Lust zum Aufhören? Die Pille gegen das Rauchen im Praxistest
Die Wirksamkeit von Zyban, der ersten nikotinfreien Tablette gegen das Rauchen, ist in einer offenen Kleinstudie ohne Vergleichsgruppe getestet worden. Die 100 teilnehmenden Testpersonen (stark abhängige männliche Raucher im mittleren Alter ohne besondere Auffälligkeiten) wurden im Untersuchungszeitraum von ihrem Hausarzt mit Zyban versorgt und mussten sich täglich beim Hausarzt melden. Nach sieben Wochen hatten 31 von 100 Testpersonen mit dem Rauchen aufgehört. Bei vergleichbaren Therapien mit Kaugummi oder Nikotinpflaster liegt die Erfolgsquote bei 0,2. (vgl. www.teachersnews.net)
Kann man aus dieser Studie statistisch signifikant (α = 0,05) schließen, dass Zyban eine höhere Erfolgsquote im Vergleich zu den anderen Methoden hat? Wie hoch wäre der statistische Effekt?

Lösungsansatz mit dem Testobjekt (1-Prop z-Test)

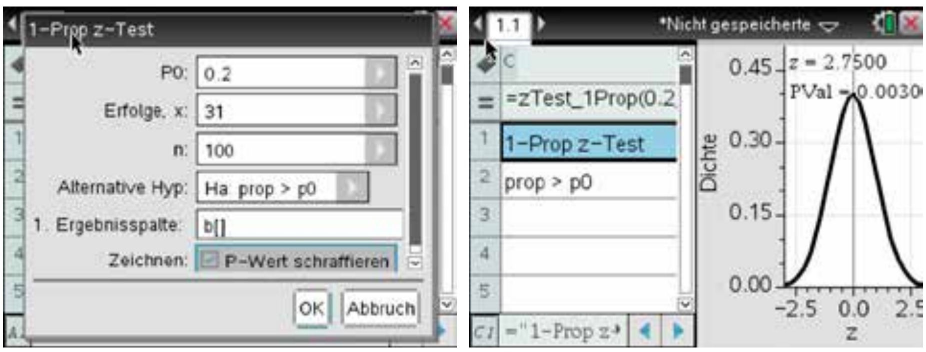


Abb. 7.19 1-Prop z-Test

H_0 lässt sich auf Signifikanzniveau α = 0.01 verwerfen.

Lösungsansatz mit dem Schätzobjekt (1-Prop z-Intervall)

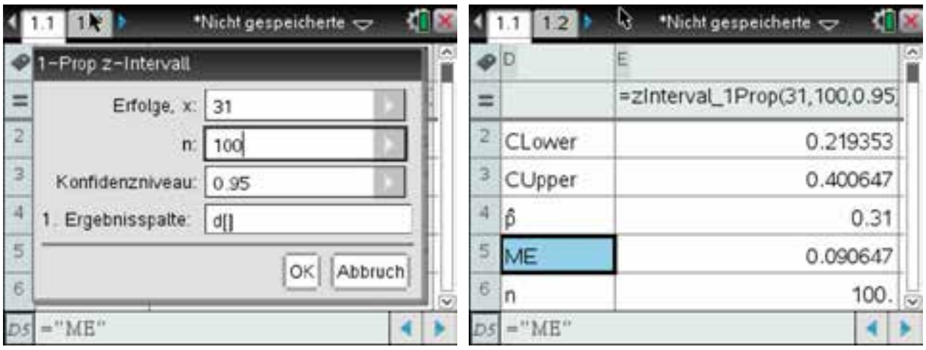


Abb. 7.20 1-Prop z-Intervall

Das 95 %-Vertrauensintervall liegt zwischen 0,22 und 0,4. Der statistische Effekt (Effektgröße) liegt demnach zwischen 10 % bzw. 100 % (im besten Fall Verdoppelung der Wirksamkeit).

Beispiel 11

Die Inzidenz der Frühgeburten hat trotz der Fortschritte in der Geburtsmedizin in den letzten Jahrzehnten in Deutschland nicht wesentlich abgenommen. Hierzulande werden ca. 7 % aller Kinder vor vollendeter 37. SSW und ca. 1 % vor vollendeter 32. SSW geboren. Die perinatale Mortalität[38] ist gerade bei Frühgeburten immer noch ein schwieriges Problem. Eine Schwangerschaftsverlängerung zur Verbesserung der Überlebenschancen des Frühgeborenen ist deshalb entscheidend. Die breite Anwendung von Fenoterol hat in der Mehrzahl der placebo-kontrollierten Studien nur zu einer kurzzeitigen Verlängerung der Schwangerschaft geführt. Angesichts unerwünschter Nebenwirkungen ist man seit Langem auf der Suche nach geeigneten Alternativen. Bereits 1994 wurde in Großbritannien erstmals der erfolgreiche therapeutische Einsatz von Nitroglycerin zur Wehenhemmung beschrieben. Bei einer klinischen Studie in Thüringen wurde im Ergebnis bei der Behandlung mit Nitroglycerin mit 264 Tagen eine Verlängerung Schwangerschaft um 9 Tage im Mittel gegenüber der herkömmlichen Methode beobachtet. An der Studie nahmen 60 Personen teil. Die Standardabweichung beträgt 20 Tage.
Untersuchen Sie, ob das beobachtete Ergebnis statistisch signifikant ist.

[38] Die perinatale Mortalität oder perinatale Sterblichkeit gibt die Anzahl der kindlichen Todesfälle in der Perinatalperiode an, umfasst also Totgeburten und Todesfälle bis zum 7. Tag nach der Geburt. Diese Zahl wird dabei auf die Gesamtzahl von 1.000 Lebend- und Totgeborenen bezogen. (de.wikipedia.org, Aufruf 26.08.2015)

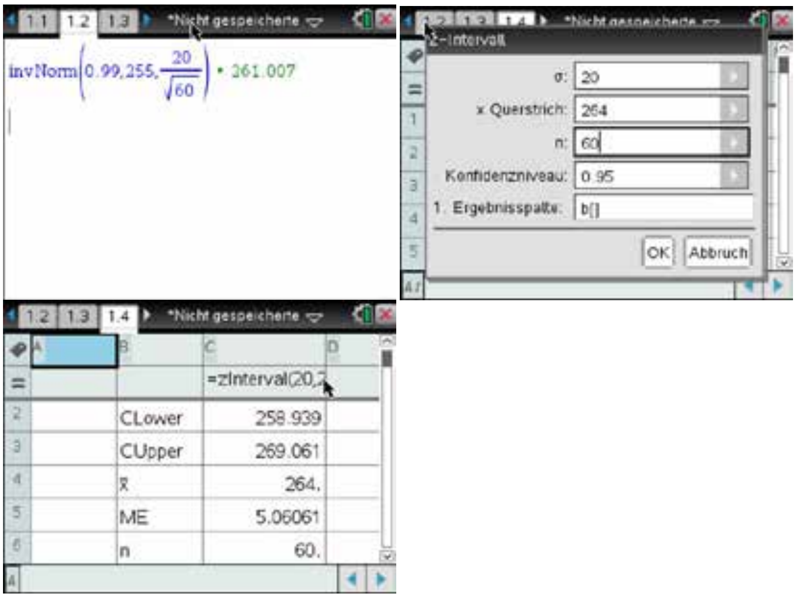


Abb. 7.21 2 Lösungsansätze

264 Tage liegen im Verwerfungsbereich, also kann die Nullhypothese $\mu \leq 255$ verworfen werden. Das 95 %-Vertrauensintervall (z-Intervall) liegt zwischen 259 und 269 Tagen.

8. Literatur

Biehler et al. (2011). *Daten und Zufall mit Fathom. Unterrichtsideen für die Sekundarstufen 1 und 2*. Hannover: Schroedel.

Biehler, R. & Eichler, A. (2015) Die Leitidee Daten und Zufall. In W. Blum, S. Vogel, C. Drüke-Noe, A. Roppelt (Hrsg.), Bildungsstandards aktuell: Mathematik in der Sekundarstufe II (S. 72-82). Hannover: Schroedel.

Böer, H. (2013) *Normalverteilung*, Nottuln-Appelhüsen: MUED, Schriftenreihe Einführungen.

Büchter, A. & Henn, H.-W. (2005) *Elementare Stochastik. Eine Einführung in die Mathematik der Daten und des Zufalls.* Wiesbaden: Springer.

Dreeßen-Meyer, G. (2011). Konfidenzintervalle und Notes. *TI-Nachrichten 2*/11. Online-Medium: www.ti-unterrichtsmaterialien.net

Humphrey, P. (2014). Was ist eigentlich ein P-Wert, *SiS 34*(3),19-22.

Kröpfl, B. et al. (1994). *Angewandte Statistik: eine Einführung für Wirtschaftswissenschaftler und Informatiker (mit 9 Tabellen)*. München, Wien. Hanser.

Lehn, J. & Wegmann, H. (2013). *Einführung in die Statistik*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer.

Marohn, F. (2015) Der p-Wert: Standardisierte Zufallsvariable, Überschreitungswahrscheinlichkeit oder Grenzniveau des Ablehnens, *SiS 35*(2), 21-29.

Meyfarth, T. (2006). *Ein computergestütztes Kurskonzept für den Stochastik-Leistungskurs mit kontinuierlicher Verwendung der Software Fathom – Didaktisch kommentierte Unterrichtsmaterialien.* Kasseler Online-Schriften zur Didaktik der Stochastik (KaDiSto), Bd. 2. Kassel: Universität Kassel. Online-Medium: http://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/bitstream/urn:nbn:de:hebis:34-2006092214683/4/KaDiSto2.pdf

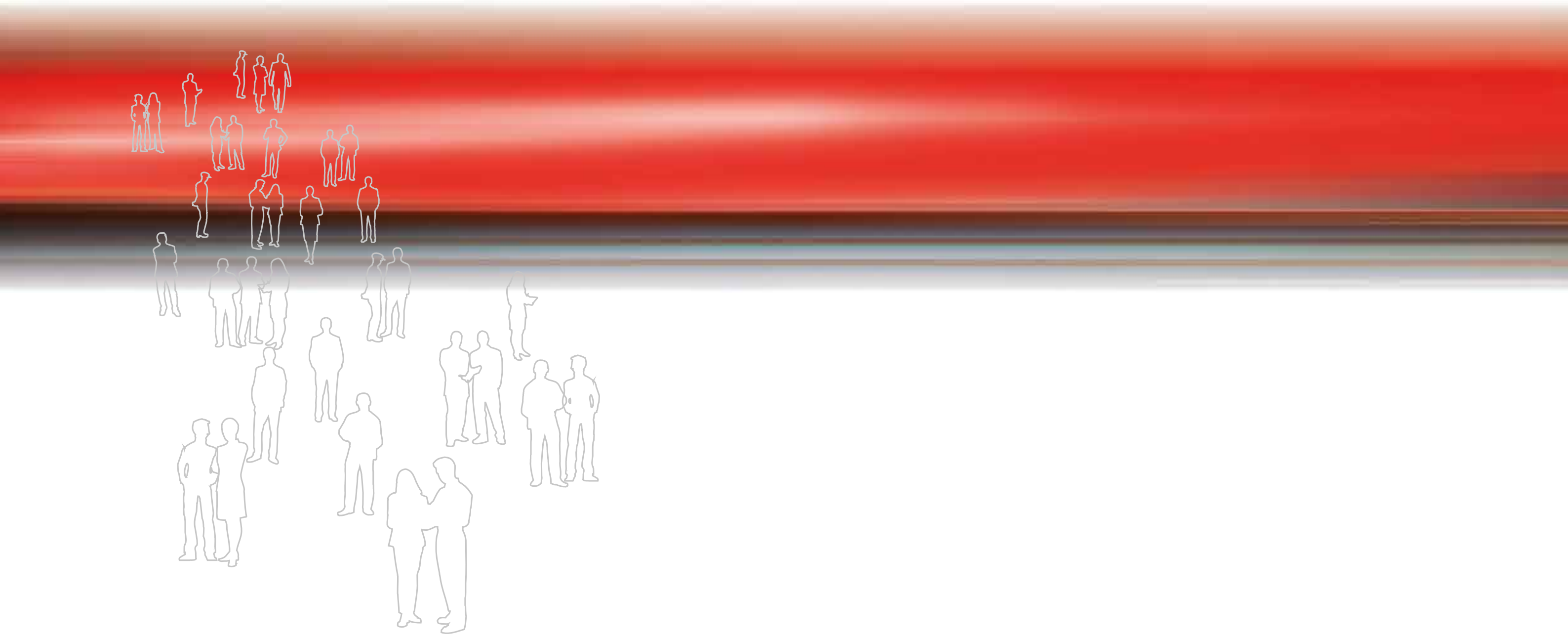
Schmid, A. (2005). *Verständnis lehren, Handbuch Mathematik der gymnasialen Oberstufe.* Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Thüringer Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur (2013). *Lehrplan für den Erwerb der allgemeinen Hochschulreife Mathematik.* Online-Medium: https://www.schulportal-thueringen.de/media/detail?tspi=4470.

Vehling, R. (2015). Konfidenzintervalle mit dem TI-Nspire™ CAS. *TI-Nachrichten 1*/15. Online-Medium: www.ti-unterrichtsmaterialien.net

Walter, G. (2009). *Statistik II für Studierende der Soziologie und Nebenfachstudierende.* Online-Medium: http://www.statistik.lmu.de/~walter/lehre/Stat2Soz_09/material/Stat2Soz_09_Skript-Teil3.pdf

Quelle: Jürgen Steinke (Rechte liegen beim Herausgeber)



T3- MATHEMATIK

Zur Behandlung der Normalverteilung und beurteilenden Statistik mit einem digitalen Werkzeug

bearbeitet für TI-Nspire™ CX CAS 4.0

Hubert Langlotz (Hrsg.)

T3 DEUTSCHLAND

www.t3deutschland.de

education.ti.com

Weitere Materialien finden Sie unter:
www.ti-unterrichtsmaterialien.net