Quadratische Regression mit dem TI-30X Plus MathPrint

Der Anhalteweg beim Bremsvorgang setzt sich zusammen aus dem Reaktionsweg und dem Bremsweg. Der Reaktionsweg entsteht als gleichförmige Bewegung aus dem Abschnitt vom Erkennen des Bremsanlasses und dem Treten des Bremspedals. Der eigentliche Bremsweg beginnt mit dem Betätigen des Bremspedals und endet mit dem Stillstand des Fahrzeugs. Wenn in einer Gefahrensituation gebremst werden muss, dann wird das Bremspedal zügiger durchgetreten und der Anhalteweg wird kürzer. Der Anhalteweg hängt natürlich auch von anderen Faktoren ab, z. B. vom Zustand der Straße.

Bei der nachfolgenden Tabelle handelt es sich beim Bremsweg sowohl bei der „normalen" Bremsung als auch bei der Gefahrenbremsung jeweils um gleichmäßig beschleunigte Bewegungen mit einer bestimmten negativen Beschleunigung.
Die Tabelle zeigt den Anhalteweg eines PKW[1] in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit auf trockener Straße.

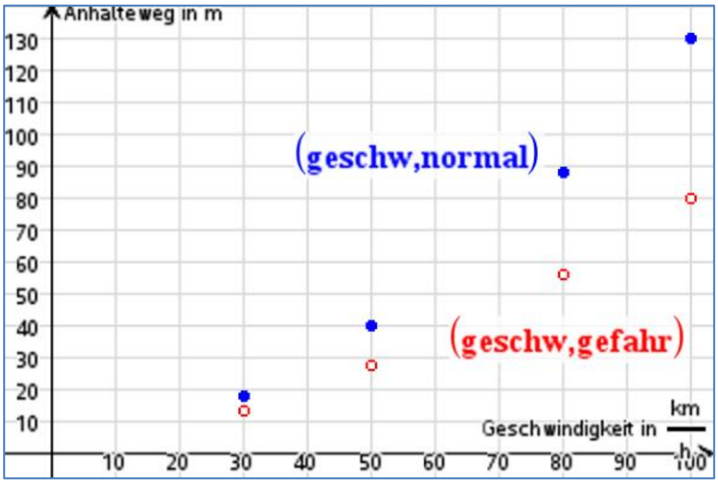
Geschwindigkeit v in km/h	Anhalteweg aw in m	
	normal	bei Gefahr
30	18	13,5
50	40	27,5
80	88	56,0
100	130	80,0

a) Zeichnen Sie zu den Werten der Tabelle je ein Diagramm, das die Zusammenhänge von Geschwindigkeit und Anhalteweg veranschaulicht.
b) Begründen Sie, dass kein linearer Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit v und Anhalteweg s bei normales Bremsung besteht, obwohl eine lineare Regression ein gar nicht so schlechtes Ergebnis liefert.
c) Ermitteln Sie eine Gleichung für den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Anhalteweg bei normaler Bremsung durch eine geeignete andere Regression.
d) Berechnen Sie mit dieser Gleichung die Anhaltewege für Geschwindigkeiten von 10 km/h und von 150 km/h bei normaler Bremsung.
e) Für welche Geschwindigkeit beträgt der Anhalteweg bei normaler Bremsung 250 m?
f) Bearbeiten Sie die Teilaufgaben b bis e für den Fall einer Gefahrenbremsung.
g) Leiten Sie unter Beachtung physikalischer Gesetzmäßigkeiten der geradlinig gleichförmigen und der geradlinig beschleunigten Bewegung eine Gleichung für den Anhalteweg her.

[1] Grafik: https://thumbs.dreamstime.com/b/autounfallkarikatur-28047495.jpg

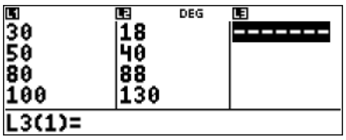
Lösungen

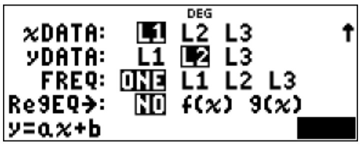
a) Diagramm (erstellt als Streudiagramm mit dem TI-Nspire CX CAS):

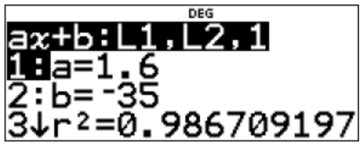


b) Der Lage der Punkte zu den Wertepaaren (Geschwindigkeit; Anhalteweg) = (v; aw) kann man nicht deutlich entnehmen, dass der Zusammenhang nicht linear ist. Die Punkte für beide Vorgänge könnten näherungsweise auf jeweils einer Geraden liegen.
Wir schauen, was eine lineare Regression mit dem WTR TI-30X Plus MathPrint™ für die gegebenen Werte liefert:

Die Daten für normale Bremsung werden in die Listen L1 bzw. L2 mit [data] eingetragen. Mit *stat-reg/distr* wird eine lineare Regression (*LinReg ax + b*) veranlasst.
([2nd] [data] ⏷⏷⏷ [enter] ⏷⏷⏷⏷ [enter]).





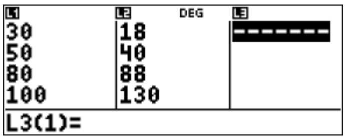


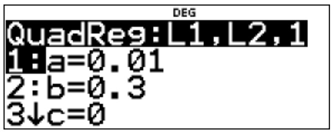
Wir erhalten eine Regressionsgleichung y = 1,6x – 35 mit einem Regressionskoeffizienten $r \approx 0{,}9933$. Der Wert für r liegt nahe bei 1 und könnte zu der Annahme verleiten, dass eine lineare Funktion als Modell geeignet wäre.
Aber:
Der Durchgang der zugehörigen Geraden durch die Ordinatenachse wäre bei n = - 35. Bei dem untersuchten Sachverhalt wäre es aber sinnvoll, für v = 0 km/h einen Anhalteweg von 0 m zu erhalten.
Außerdem:
Wäre der Zusammenhang linear, dann müssten die Quotienten $\frac{\Delta aw}{\Delta v}$ (die Anstiege) überall gleich groß sein. Aus den Tabellenwerten lassen sich z. B. die folgenden Quotienten bilden:

$\frac{40-18}{50-30} = 1{,}1$ $\frac{88-18}{80-30} = 1{,}4$ $\frac{130-18}{100-30} = 1{,}6$

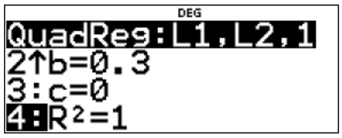
Das sind ziemlich unterschiedliche Differenzenquotienten, und das spricht deutlich gegen die Annahme, dass zwischen Geschwindigkeit und Anhalteweg ein linearer Zusammenhang besteht.

c) Naheliegend ist es nun, eine quadratische Regression (*QuadraticReg*) durchzuführen. Das Vorgehen ist analog dem oben beschriebenen Verfahren ([2nd] [data] ▼▼▼▼▼▼). Im Unterschied zu obigem Vorgehen, wird die Regressionsfunktion unter f(x) abgespeichert.





Der Regressionskoeffizient ist genau r = 1, besser geht es nicht.
Außerdem liefert die Regressionsgleichung $y = 0{,}01x^2 + 0{,}3x$, ein Ergebnis, dass für x = 0 auch y = 0 ergibt, also wie erwünscht, einen Bremsweg von 0 m bei einer Geschwindigkeit von 0 km/h.



Als Gleichung für den Anhalteweg verwenden wir $aw = 0{,}01 \cdot v^2 + 0{,}3 \cdot v$ mit aw in Meter und v in km/h.

d) Anhaltewege für v = 10 km/h bzw. v = 150 km/h können der unter f(x) gespeicherten Funktion über [table] entnommen werden.

[table] [2] [1] [0] [enter] [table] [2] [1] [5] [0] [enter]

Für v = 10 km/h beträgt der Anhalteweg 4 m.
Für v = 150 km/h beträgt der Anhalteweg 270 m.

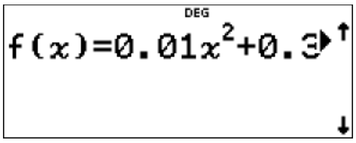
e) Einen Anhalteweg von 250 m ergibt sich für eine Geschwindigkeit von ca. 143,8 km/h.
Man kann dazu die Gleichung nach v lösen:

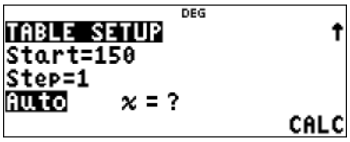
$$250 = 0{,}01 \cdot v^2 + 0{,}3 \cdot v \mid \cdot 100$$

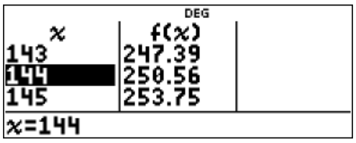
$$v^2 + 30 \cdot v - 25\,000 = 0$$

$$v_{1,2} = -15 \pm \sqrt{225 + 40\,000}$$

Die positive Lösung lautet $v \approx 143{,}8$, die negative Lösung ist hier nicht von Interesse.
Alternative: Ein weiterer Lösungsweg ist durch systematisches Probieren mit der unter f(x) gespeicherten Regressionsfunktion gegeben. Mit [table] [1] wird die Funktion f(x) aktiviert. Im *TABLE SETUP* wird 150 als Startwert festgelegt, für den man den Anhalteweg von 270 m bereits kennt. Dann kann die Wertetabelle „durchgeblättert" werden, bis man auf einen Anhalteweg möglichst nahe bei 250 m ankommt. Man erhält eine Geschwindigkeit von ca. 144 km/h. Ggf. kann mit verkleinerter Schrittweite die Suche verfeinert werden.



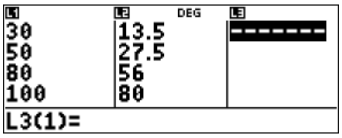


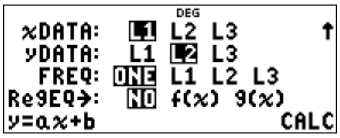


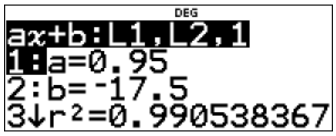
[table] [1] [enter] [enter] [1] [5] [0] [enter] [enter] [enter] [enter] ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ▽ ....

f) Lösungen in Kurzfassung:

Teilaufgabe b







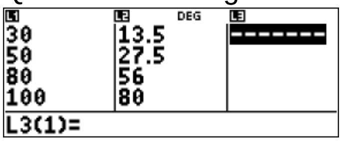
Regressionsgleichung: y = 0,95x – 17,5; r = 0,9953

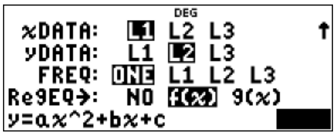
Aber n < 0 passt nicht, außerdem gibt es ungleiche Differenzenquotienten:

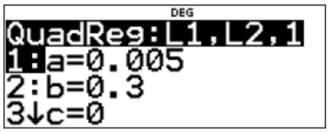
$\frac{27{,}5-13{,}5}{50-30}=0{,}7$ $\frac{56-13{,}5}{80-30}=0{,}85$ $\frac{80-13{,}5}{100-30}=0{,}95$

Teilaufgabe c

Quadratische Regression:







Regressionsgleichung (unter f(x) speichern): y = 0,005x² + 0,3x; r = 1

Als Gleichung für den Anhalteweg bei Gefahrenbremsung wird

$aw=0{,}005\cdot v^2+0{,}3\cdot v$ mit aw in Meter und v in km/h verwendet.

Teilaufgabe d

Anhaltewege für v = 10 km/h bzw. v = 150 km/h können der unter f(x) gespeicherten Funktion über [table] entnommen werden.

Für v = 10 km/h beträgt der Anhalteweg 3,5 m.

Für v = 150 km/h beträgt der Anhalteweg 157,5 m.

Teilaufgabe e

Einen Anhalteweg von 250 m ergibt sich für eine Geschwindigkeit von ca. 195,6 km/h.

Man kann dazu die Gleichung nach v lösen:

$250=0{,}005\cdot v^2+0{,}3\cdot v \;|:0{,}005$

$v^2+60\cdot v-50\,000=0$

$v_{1,2}=-30\pm\sqrt{900+50\,000}$

Die positive Lösung lautet $v\approx 195{,}6$, die negative Lösung ist hier nicht von Interesse.

Systematisches Probieren:

x	f(x)
195	248.625
196	250.88
197	253.145

x=196

g) Für den Reaktionsweg s_R gilt wegen der angenommenen geradlinig gleichförmigen Bewegung für eine Geschwindigkeit v und eine Reaktionszeit t_R die Beziehung $s_R = v \cdot t_R$.

Für den Bremsweg können wegen des Modells der geradlinig beschleunigten Bewegung mit s_B (Bremsweg) und a (negative, konstante Bremsbeschleunigung), v_0 (Anfangsgeschwindigkeit), v (Geschwindigkeit nach dem Abbremsen) sowie t_B (Bremszeit) folgende Gleichungen angesetzt werden:
Aus (1) $s_B = \frac{1}{2} a \cdot t_B^2 + v_0 \cdot t_B$ und (2) $v = a \cdot t_B + v_0$ folgt durch Einsetzen von
$t_B = \frac{v-v_0}{a}$
in (1): $s_B = \frac{v^2-v_0^2}{2a}$
Für $v = 0\ \frac{m}{s}$ erhält man für den Bremsweg: $s_B = \frac{-v_0^2}{2a}$.
Mit a < 0 folgt daraus $s_B = \frac{v_0^2}{2a}$.
Der Anhalteweg s_a ist die Summe der beiden Wege:
$s_a = s_B + s_R = \frac{v^2}{2a} + v \cdot t_R$.   (*)
Es handelt sich wie bei der Regressionsgleichung um eine gemischt quadratische Gleichung mit dem Absolutglied c = 0.
Damit bei (*) der Anhalteweg in m berechnet werden kann, müssten für (*) die Geschwindigkeit in m/s, die Beschleunigung in m/s² und die Reaktionszeit in s angegeben werden.

Autor:
Dr. Wilfried Zappe