Planetenbahnen sind elliptisch

Alfred Roulier

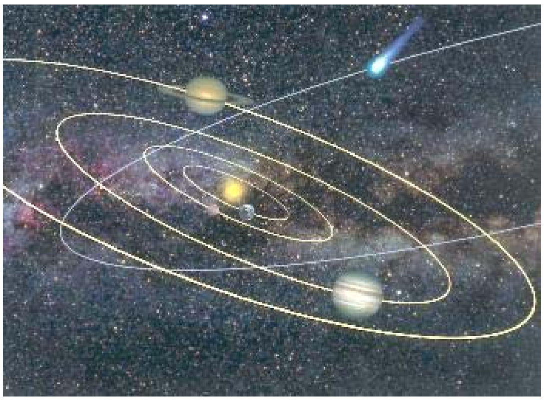

Abb 1: Titelbild von O.Montenbruck, „Grundlagen der Ephemeridenrechnung“

Schülerinnen und Schülern auf Gymnasialstufe wird gezeigt, wie das Gravitationsgesetz unter geeigneten Randbedingungen zu elliptischen Bahnen führt. Dazu wird nach einer Vorlage aus „Feynman, Lectures on Physics“, Band I, Kapitel 9 [1], eine numerische Methode verwendet. Diese ist - dank der im TI-Nspire™ enthaltenen Tabellenkalkulation - einfach umzusetzen und graphisch visualisierbar.

Der physikalische Gehalt dieses Ansatzes ist bedeutend, weil damit und mit dem Werkzeug TI-Nspire™ nun schon auf der Gymnasialstufe eine breite Palette von Aufgaben aus der Dynamik studiert werden kann.

Voraussetzungen für das Folgende sind Basiskenntnisse in der Kinematik ($v = \Delta x/\Delta t$, $a = \Delta v/\Delta t$, $K = m \cdot a$, das Kräfteparallelogramm, das Gravitationsgesetz) und im Umgang mit der Tabellenkalkulation.

Anwendung des Gravitationsgesetzes

„*Planetenbahnen sind elliptisch*“. Das ist die Aussage des 1. Kepler'schen Gesetzes. Kepler hat diese Erkenntnis 1609 auf der Basis der Daten von Tycho Brahe empirisch abgeleitet. Erst 1687 veröffentlichte Newton das Gravitationsgesetz $K = -G \cdot m \cdot M / r^2$.

In dieser Übung wird gezeigt, dass eine rückführende Kraft der Masse M auf die Masse m proportional $1/r^2$ bei entsprechenden Anfangsbedingungen für Ort und Geschwindigkeit zu einer elliptischen Bahn der Masse m führt. Die Masse M (der Sonne) sei sehr viel grösser als die Masse m (des Planeten), so dass M als örtlich fix angenommen werden kann. Wir suchen also die Koordinaten $x(t)$ und $y(t)$ des Planeten m in einem ebenen Koordinatensystem mit der Masse M (Sonne) im Ursprung.

Zuerst zerlegt man die Gravitationskraft, die immer von m auf M gerichtet ist, in ihre Komponenten.

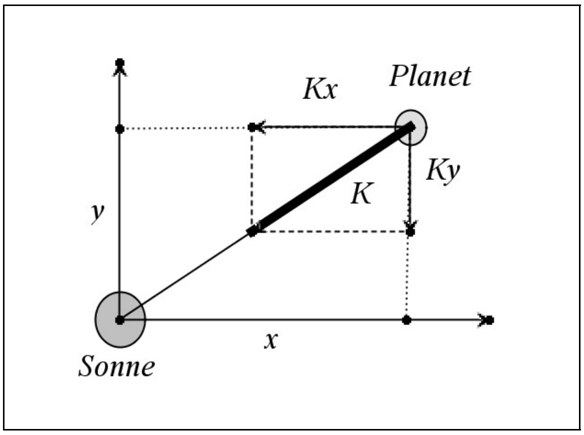

Abb 2: Ableitung der Kraftkomponenten

Aus der Grafik kann man ablesen:

$$K_x / K = x / r \;\Rightarrow\; K_x = -G\, m\, M \cdot x / r^3;\;\; K_y = -G\, m\, M \cdot y / r^3$$

Diese Kraft erzeugt eine Beschleunigung a, welche sich aus dem Newtonschen Grundgesetz berechnen lässt: $m \cdot a_x = K_x$ $\Rightarrow$ $a_x = -G\, M \cdot x / r^3$; $a_y = -G\, M \cdot y / r^3$

Ausser G und M sind alle Grössen Funktionen der Zeit. Um $x(t)$ und $y(t)$ aus $a_x(t)$ und $a_y(t)$ abzuleiten, muss man zwei Differentialgleichungen lösen, was man mit dem TI-Nspire™ ohne weiteres analytisch machen könnte. Wenn man aber dieses Werkzeug noch nicht beherrscht, gelangt man trotzdem mit einem numerischen Verfahren zum Ziel. Das Ergebnis ist vielleicht noch eindrücklicher. Übrigens: dank Computern ist der numerische Ansatz heute die Regel.

Numerisches Verfahren

Von einem Ausgangspunkt mit bekannten oder vorgegebenen Anfangsgeschwindigkeiten v_x und v_y aus berechnet man in kleinen Zeitschritten Δt jeweils die Entwicklung der interessierenden Grössen näherungsweise:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t \cdot v_x(t);\;\; y(t+\Delta t) = y(t) + \Delta t \cdot v_y(t)$$
$$v_x(t+\Delta t) = v_x(t) + \Delta t \cdot a_x(t);\; v_y(t+\Delta t) = v_y(t) + \Delta t \cdot a_y(t)$$

Die Beschleunigungen a_x und a_y folgen aus dem soeben beschriebenen Newton'schen Gesetz

$$a_x(t) = -G\, M \cdot x(t) / r(t)^3;\; a_y(t) = -G\, M \cdot y(t) / r(t)^3$$

Das ist alles. In der Tabellenkalkulation kann man jetzt Zeitschritt für Zeitschritt die Entwicklung von Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung berechnen. Dabei kann man das Verfahren noch mit einem Trick verbessern, was erlaubt, mit grösseren Δt und daher weniger umfangreichen Tabellen auszukommen: Man rechnet nicht mit der Geschwindigkeit am Anfang des Zeitintervalls Δt, sondern mit jener in dessen Mitte. Das bedeutet, dass die Tabelle nicht mit dem vorgegebenen Wert $v_x(0)$ startet, sondern mit dem Wert $v_x(0) + \Delta t/2 \cdot a_x(0)$. Ebenso für v_y.

Es verbleibt, die Anfangswerte einzutragen. Für das System Sonne - Erde eignen sich die Einheiten AE (Astronomische Einheit = mittlerer Abstand Erde - Sonne = 150 Mio km) für die Länge, M_s (Sonnenmasse = $2\ 10^{30}$ kg) für die Masse, d

(Erdtag) für die Zeit. In diesem System nimmt die Gravitationskonstante G den Wert $2.96\ 10^{-4}$ an. (Der Referenzwert im Einheitensystem [m,kg,s] ist $G = 6.67\ 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$. Wenn 1 AE = $1.5\ 10^8$ m beträgt, ist 1 m = $0.66\ 10^{-8}$ AE, $1\ m^3 = 0.287\ 10^{-24}\ AE^3$. Entsprechend gilt: 1 kg = $5\cdot 10^{-31}\ M_s$ und 1 sec = $1.16\ 10^{-5}$ d).

Hier eröffnet sich die Gelegenheit, mit den Lernenden den Wechsel zu anderen Einheiten zu üben, z.B. zu den von Feynman verwendeten (G = M = 1) oder zu den für Erdsatelliten passenden (M_e, 1000 km, Stunden).

Es wird nun ein Streuplot von x(t) und y(t) erstellt, also die Erdbahn in 50 Zeitschritten von 7.3 Tagen für ein Jahr abgebildet. Die Anfangswerte des Ortes sind x(t=0) = 1, y(t=0) = 0. Jene für die Geschwindigkeit sind $v_x(t=0) = 0$, $v_y(t=0) = 0.017$. (Die Erde ist auf ihrer Bahn um die Sonne mit 30 km/s unterwegs. In den hier verwendeten Einheiten sind das 0.017 AE/d (vgl die Umrechnung für G). Es resultiert eine fast kreisförmige Bahn; denn in der Tat ist die Exzentrizität der Erdbahn klein. Durch Variation von Abstand und Geschwindigkeit wird die Bahn elliptischer und die Umlaufdauer grösser oder kleiner, beispielsweise beim Merkur mit x(t=0) = 0.466, $v_y(t=0) = 0.022$, Zeitschritt = 1.76 d.

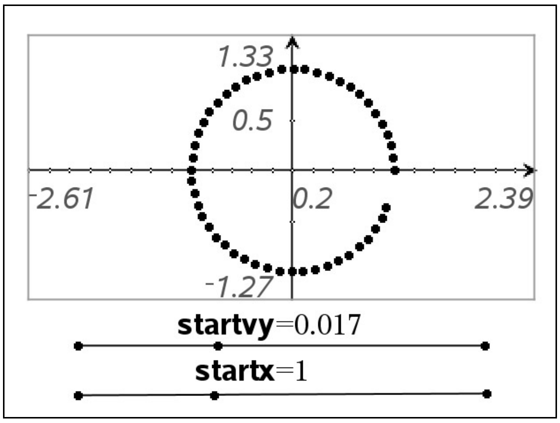

Abb 3 Streuplot

	A	B xx	C	D	E yy	F	G	H	I	J	K
◆											
1	t	x	vx	ax	y	vy	ay	r			
2	0	1.	0	-2.96...	0	.017	0.	1.			
3	7	1.	-.002	-2.9E...	.117	.017	-3.4E-5	1.01	dt	7	Zeitschritt
4	14	.986	-.004	-2.81...	.233	.016	-6.63...	1.01	vx0	0	vx(t=0)
5	21	.958	-.006	-2.69...	.345	.015	-9.68...	1.02	vy0	.017	vy(t=0)
6	28	.917	-.008	-2.54...	.452	.014	-1.25...	1.02	x0	1.	x(t=0)
7	35	.863	-.009	-2.37...	.554	.013	-1.52...	1.03	y0	0	y(t=0)
8	42	.798	-.011	-2.18...	.648	.012	-1.77...	1.03	G	2.9...	Gravitationsk.
9	49	.722	-.012	-1.96...	.733	.011	-1.99...	1.03	M	1	Zentralmasse
10	56	.637	-.013	-1.73...	.809	.009	-2.2E-4	1.03			

Abb 4: Wertetabelle

Die im Streuplot abzubildenden Spalten x und y werden in der obersten Zeile als Variablen xx und yy deklariert. Diese werden dann in der Eingabezeile des Streuplots angewählt.

Mit zwei Schiebereglern kann man die Anfangsgeschwindigkeit $v_y(t=0)$ und die Anfangsdistanz x(t=0) bequem variieren. Die Konstruktion von Schiebereglern ist im Aufsatz „Dynamik dank Variablen und Schiebereglern" von René Hugelshofer [2] beschrieben. Wenn man die Einheiten wechselt, muss man den Gradienten der Schieberegler anpassen.

Die bis dahin beschriebenen Unterlagen eröffnen ein weites Experimentierfeld:

- Nach Wechsel zu den entsprechenden Einheiten und Anpassung der Schieberegler können Aufgaben aus der Satellitenwelt behandelt werden: Umlaufzeiten, Exzentrizitäten, Fluchtgeschwindigkeit, geostationäre Lage, u.s.w.
- Man kann das 2. Keplersche Gesetz demonstrieren, indem in der Tabellenkalkulation in einer weiteren Spalte die in den Zeitschritten überstrichene Sektorfläche f = ½ Δt·r Sqrt(vx2 + vy2) berechnet wird und man feststellt, dass diese Zellenwerte konstant bleiben.
- Eindimensionale Abläufe (z.B. Federoszillator)
- Einbezug von Reibung und Luftwiderstand. In der Tabellenkalkulation bleiben die Spalten für Ort und Geschwindigkeit unverändert. Nur jene für die Beschleunigung müssen angepasst werden, indem die entsprechenden Kräfte (konstant und/oder geschwindigkeitsabhängig) eingesetzt werden. Anwendungsmöglichkeiten sind der schiefe Wurf mit Luftwiderstand oder der Fallschirmabsprung.

Quellen:

[1] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, Vorlesungen über Physik, Oldenbourg 2001, ISBN-13 9786256802 (Taschenbuchausgabe)

[2] René Hugelshofer, Dynamik dank Schiebereglern, TI-Nachrichten Ausgabe 1/08

Autor:

Dr. Alfred Roulier, Neuenegg (CH)
a.roulier@bluewin.ch