

Die e-Funktion ist für Überraschungen gut

Im Artikel wird am Beispiel der Funktion $f(x) = e^x - x^e$ thematisiert, auf welche Probleme man stoßen kann, wenn man Funktionen bzw. Gleichungen betrachtet, in denen Potenzen mit rationalen bzw. irrationale Exponenten auftreten.

Für Berechnungen im Zusammenhang mit der Funktion $f(x) = e^x - x^e$ wird zunächst der wissenschaftlich-technische Schultaschenrechner (WTR) TI-30X Plus verwendet. Eine besondere Bedeutung kommt hier der Anwendung von Näherungsverfahren beim Lösen von Gleichungen mit diesem WTR zu. Es werden verschiedene Möglichkeiten dazu erläutert, und es wird auch auf Grenzen dieses Hilfsmittels eingegangen.



Des Weiteren wird gezeigt, welche Probleme sich im Zusammenhang mit diesem Sachverhalt bei Nutzung eines CAS ergeben (können).

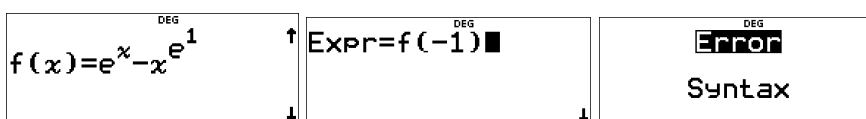
Am Ende des Artikels wird der Versuch unternommen, die KI ChatGPT zum Lösen der Problemstellung „zu bewegen“. Das ist auch deswegen spannend, weil die künstliche Intelligenz offensichtlich (noch) ihre Grenzen hat und die Mathematiklehrkraft nicht entbehrlich macht..

1. Definitionsbereich und Graph

- a) Berechnen Sie mit dem WTR Näherungswerte der Funktionswerte auf Zehntel gerundet von $f(x) = e^x - x^e$ (e: Eulersche Zahl) für die in der Tabelle angegebenen x-Werte.

x	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
f(x)≈									

- b) Erklären Sie, weshalb der WTR für die Berechnung von $f(-1)$ eine Fehlermeldung zurückgibt.



Hinweis: Beachten Sie, dass e eine irrationale Zahl ist, der WTR aber nur rationale Näherungswerte von e verarbeiten kann. Betrachten Sie in diesem Zusammenhang auch Näherungswerte für die Eulersche Zahl wie $(1 + \frac{1}{2})^2$ und $(1 + \frac{1}{3})^3$.

- c) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich von f an.
d) Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $0 \leq x \leq 4$.

2. Nullstellen und lokale Extrema

- a) Weisen Sie nach, dass die Zahl $x_0 = e$ sowohl eine Nullstelle als auch eine lokale Minimumstelle der Funktion $f(x) = e^x - x^e$ ist.

- b) Entnehmen Sie der grafischen Darstellung eine Vermutung über die lokale Maximumstelle von f und untersuchen Sie Ihre Vermutung rechnerisch. Geben Sie die Koordinaten des lokalen Maximums an.

3. Wendepunkt

- a) Zeigen Sie, dass $x = 2$ nicht die Wendestelle x_w von f ist, obwohl dies die grafische Darstellung von f vermuten lassen könnte.
- b) Bestimmen Sie mithilfe eines Näherungsverfahrens einen Näherungswert auf Hundertstel gerundet für die Wendestelle x_w .
- c) Es wird behauptet, dass im Intervall $0,1 < x < 0,2$ eine weiterer Wendepunkt von f liegt. Untersuchen Sie, ob diese Behauptung stimmt.
- d) Geben Sie näherungsweise die Koordinaten vorhandener Wendepunkte von f an.

4. Flächeninhalt

Der Graph von f schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche.

Lösung Aufgabe 1

- a) Durch Tabellieren von Funktionswerten wird eine Voraussetzung für die grafische Darstellung geschaffen. Diese wiederum dient dazu, Vermutungen über weitere Eigenschaften von f zu formulieren.

DEG $f(x) = e^x - x e^1$	DEG TABLE SETUP Start=0 Step=0.5 Auto $x = ?$	DEG TABLE x f(x) 0 1 0.5 1.496766 1 1.718282 x=0
-----------------------------	---	--

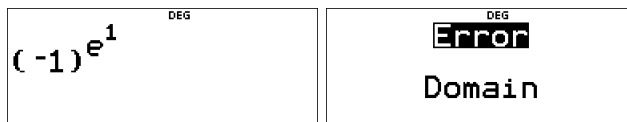
x	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
f(x)≈	1,0	1,5	1,7	1,5	0,8	0,1	0,3	3,0	1,3

- b) Für $x = -1$ ist zwar der Term $e^{-x} = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,37$ definiert, nicht aber der Term $x^e = (-1)^e$.

Die Eulersche Zahl e ist eine irrationale Zahl, also ein unendlicher, nichtperiodischer Dezimalbruch. Der WTR kann nur Näherungswerte solcher irrationalen Zahlen verarbeiten. Dabei handelt es sich um endliche Dezimalbrüche, die auch in der Form $\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ geschrieben werden können. Wird e durch einen solchen Bruch angenähert, bei dem p eine ungerade ganze Zahl ist, dann gilt $(-1)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(-1)^p} = \sqrt[q]{-1}$. Diese Wurzel ist aber im Bereich der reellen Zahlen nicht definiert.¹

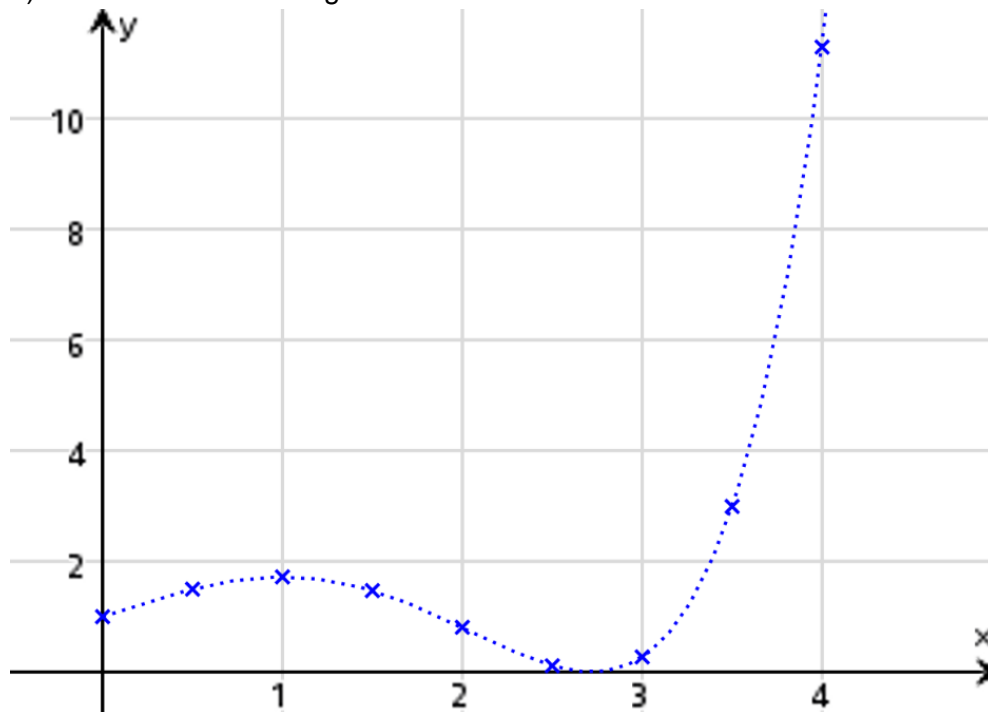
¹ Es ist anzunehmen, dass die Vorgänge im Rechner komplexer ablaufen. Die hier gegebene Erklärung soll das Ganze plausibel machen, sodass es auch Schülerinnen und Schüler nachvollziehen können.

Beispiel: Es gilt $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Deshalb ist für $n = 2$ die Zahl $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ ein (grober) Näherungswert für e . Möchte man z. B. diesen verwenden, um $(-1)^e$ näherungsweise zu berechnen, ergäbe sich $(-1)^{\frac{9}{4}} = \sqrt[4]{(-1)^9} = \sqrt[4]{-1}$. Diese Zahl ist im Bereich der reellen Zahlen nicht definiert. Für $n = 3$ ist die Zahl $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$ ein (etwas besserer) Näherungswert für e . Möchte man z. B. diesen verwenden, um $(-1)^e$ näherungsweise zu berechnen, ergäbe sich $(-1)^{\frac{64}{27}} = \sqrt[27]{(-1)^{64}} = \sqrt[27]{1} = 1$. Diese Zahl ist im Bereich der reellen Zahlen definiert. Um Eindeutigkeit zu erreichen und Fälle wie $\sqrt[4]{-1}$ auszuschließen, gibt der WTR eine Fehlermeldung für $(-1)^e$ zurück.



- c) Definitionsbereich: Der Summand e^x ist für alle reellen Zahlen definiert. Der Summand x^e ist wegen des nicht ganzzahligen, irrationalen Exponenten nur für nichtnegative Zahlen definiert. Also ist der maximale Definitionsbereich von f $x \in \mathbb{R}; x \geq 0$.

- d) Grafische Darstellung:



(Zeichnung erstellt mit TI-Nspire)

Lösung Aufgabe 2

- a) Nachweis der Nullstelle: Es ist $f(e) = e^e - e^e = 0$, also ist die Zahl $x_0 = e$ Nullstelle von f .

Nachweis des lokalen Minimums:

Ableitungen von $f(x) = e^x - x^e$:

$$f'(x) = e^x - e \cdot x^{e-1};$$

$$f''(x) = e^x - e \cdot (e-1) \cdot x^{e-2};$$

$$f'''(x) = e^x - e \cdot (e-1) \cdot (e-2) \cdot x^{e-3} = e^x - (e^2 - e) \cdot (e-2) \cdot x^{e-3}$$

Notwendige Bedingung für lokale Extrema an der Stelle $x = e$:

$$f'(e) = e^e - e \cdot e^{e-1} = e^e - e^e = 0$$

Hinreichende Bedingung für lokale Extrema an der Stelle $x = e$:

$$f''(e) = e^e - e \cdot (e-1) \cdot e^{e-2} = e^e - (e-1) \cdot e^{e-1} = e^e - e^e + e^{e-1} = e^{e-1} > 0$$

Damit ist gezeigt, dass der Punkt $(e|0)$ sowohl Nullstelle als auch lokales Minimum von f ist.

- b) Vermutung: An der Stelle $x = 1$ könnte das lokale Maximum liegen.

Notwendige Bedingung für lokale Extrema an der Stelle $x = 1$:

$$f'(1) = e^1 - e \cdot 1^{e-1} = e - e = 0$$

Hinreichende Bedingung für lokale Extrema an der Stelle $x = 1$:

$$f''(1) = e^1 - e \cdot (e-1) \cdot 1^{e-2} = e - e^2 + e = 2e - e^2 \approx -1,95 < 0;$$

Calculator screenshot showing the calculation of $2 \cdot e^1 - e^2$, resulting in -1.952492442 .

Calculator screenshot showing the calculation of $e^1 - 1 \cdot e^1$, resulting in 1.718281828 .

Funktionswert an der Stelle $x = 1$:

$$f(1) = e^1 - 1^e = e - 1 \approx 1,72$$

Der lokale Hochpunkt hat die Koordinaten $(1|e-1)$.

Lösung Aufgabe 3

- a) Die notwendige Bedingung für eine Wendestelle bei $x = 2$ ist nicht erfüllt:

$$f''(2) = e^2 - e \cdot (e-1) \cdot 2^{e-2} = e^2 - (e^2 - e) \cdot 2^{e-2} \approx -0,3 \neq 0$$

Calculator screenshot showing the calculation of $e^2 - (e^2 - e^1) \cdot 2^{e^1-2}$, resulting in -0.295402142 .

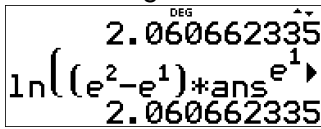
- b) Bestimmung eines Näherungswertes von x_w mit dem allgemeinen Iterationsverfahren. Es muss eine Nullstelle der 2. Ableitungsfunktion ermittelt werden. Dazu wird die Gleichung $0 = e^x - e \cdot (e-1) \cdot x^{e-2}$ in die Form $x = \varphi(x)$ gebracht.

$$e^x = e \cdot (e-1) \cdot x^{e-2} \Rightarrow x = \ln((e^2 - e) \cdot x^{e-2}).$$

Als Startwert kann $x = 2$ gewählt werden (vgl. Graph). Anstelle von x wird in der rechten Seite der Gleichung ANS (answer) eingegeben.

Calculator screenshot showing the calculation of $\ln((e^2 - e^1) \cdot \text{ans} \cdot e^1)$, resulting in 2.039199879 .

Nach wenigen Iterationsschritten ändert sich die Anzeige nicht mehr.

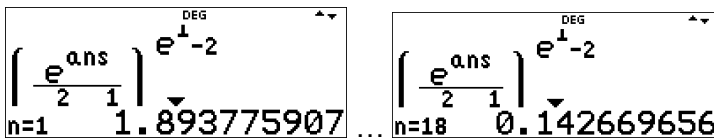


Ein auf Hundertstel gerundeter Näherungswert für die Wendestelle ist $x_w \approx 2,06$.

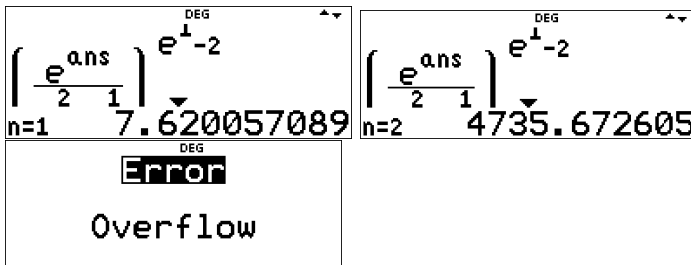
Alternative 1: Die Gleichung $0 = e^x - e \cdot (e - 1) \cdot x^{e-2}$ kann auch anders in die Form $x = \varphi(x)$ gebracht werden:

$$0 = e^x - e \cdot (e - 1) \cdot x^{e-2} \Leftrightarrow e^x = (e^2 - e) \cdot x^{e-2} \Leftrightarrow x = \left(\frac{e^x}{e^2 - e}\right)^{\frac{1}{e-2}}$$

Wird diese Iterationsgleichung mit dem Startwert 2 genutzt, so ergibt sich ein anderer Näherungswert für die Nullstelle von f'' :



Das hier wirklich noch ein Wendepunkt vorliegt, wird in Teilaufgabe 3c gezeigt. Wird nun versucht, mit einem anderen Startwert, z. B. $x = 3$ den Wendepunkt $x_w \approx 2,06$ zu bestimmen, stellt man fest, dass die Folge der Iterationszahlen nicht konvergiert, sondern immer größer wird, bis es schon im dritten Schritt zu einem Überlauf kommt.



Alternative 2: Verfeinerung des Intervalls, in dem die Nullstelle liegt. Dieses Intervall wird gefunden, indem man nach dem Vorzeichenwechsel der Funktionswerte in immer kleiner werdenden Intervallen sucht.

TABLE SETUP		DEG		
$g(x) = e^x - (e^2 - e^1)$	Start=2	x	f(x)	g(x)
	Step=0.01	2.05	0.730135	-0.05407
	AUTO	2.06	0.714492	-0.00339
	x = ?	2.07	0.698848	0.048117
		CALC x=2.07		

Die Nullstelle liegt im Intervall $[2,06; 2,07]$.

Intervalllänge weiter verfeinern (Schrittweite 0,001):

TABLE SETUP		DEG		
Start=2.06	Step=0.001	x	f(x)	g(x)
	AUTO	2.06	0.714492	-0.00339
		2.061	0.712927	0.001727
		2.062	0.711363	0.006849
		CALC x=2.06		

Die Nullstelle $x_w \approx 2,06$ liegt im Intervall $[2,060; 2,061]$.

Dieses Verfahren hat den Vorteil, dass sich aus dem Vorzeichenwechsel der 2. Ableitung die hinreichende Bedingung für die Existenz des Wendepunktes ergibt. Aus der Art des Vorzeichenwechsels (von minus nach plus) kann überdies auf die Art des Wendepunktes (R-L-WP) geschlossen werden.

Alternative 3: Newtonverfahren $x_{n+1} = x_n - \frac{f''(x_n)}{f'''(x_n)}$ mit Startwert x_0

Mit $x_0 = 2$ ergibt sich $x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - e \cdot (e-1) \cdot x_n^{e-2}}{e^{x_n} - e \cdot (e-1) \cdot (e-2) \cdot x_n^{e-3}}$.

Diese Formel ist zu umfangreich. Sie lässt sich nicht mit dem TI-30X Plus realisieren. Der Term darf bei der Eingabe in den Rechner maximal 44 Zeichen umfassen. Diese Zahl wird hier überschritten, auch dadurch bedingt, dass bei der Eingabe von e stets der Exponent mit einzugeben ist.

- c) Aus der grafischen Darstellung von f lässt sich in diesem Falle kaum eine Vermutung auf eine Wendestelle von f gewinnen, weil „mit bloßem Auge“ kein Krümmungswechsel des Graphen von f erkennbar ist. In der Alternative 2 der Teilaufgabe 3b wurde bereits durch ein allgemeines Iterationsverfahren gezeigt, dass bei $x \approx 0,14$ eine weitere Nullstelle von f“ liegt. Auch durch Intervallverfeinerung kann diese Stelle näherungsweise bestimmt werden.

Wegen der Stetigkeit von f'' kann ein Vorzeichenwechsel von f'' im Intervall $0,1 < x < 0,2$ als Indiz für die Existenz einer Wendestelle interpretiert werden. Durch Tabellieren von Funktionswerten von f'' mit immer kleiner werdender Schrittweite kann im Falle des Vorzeichenwechsels von f'' ein Näherungswert für die zweite Wendestelle x_{w2} ermittelt werden.

DEG	DEG	DEG												
$g(x) = (e^1 - e^2) \cdot x^{e^1}$	TABLE SETUP Start=0.1 Step=0.1 AUTO x = ?	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> <th>g(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0.1</td> <td>1.103258</td> <td>0.211645</td> </tr> <tr> <td>0.2</td> <td>1.208813</td> <td>-0.24864</td> </tr> <tr> <td>0.3</td> <td>1.311956</td> <td>-0.61719</td> </tr> </tbody> </table>	x	f(x)	g(x)	0.1	1.103258	0.211645	0.2	1.208813	-0.24864	0.3	1.311956	-0.61719
x	f(x)	g(x)												
0.1	1.103258	0.211645												
0.2	1.208813	-0.24864												
0.3	1.311956	-0.61719												
		x=0.1												

Eine weitere Nullstelle von f'' liegt im Intervall $[0,1; 0,2]$.

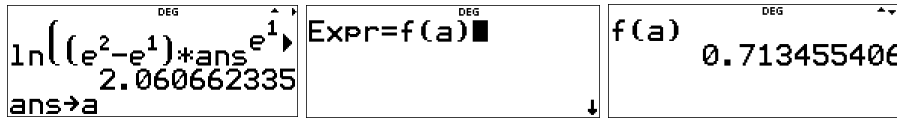
Schrittweise weiter verfeinern bis z. B. ...

DEG	DEG												
TABLE SETUP Start=0.14266 Step=0.000001 AUTO x = ?	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>f(x)</th> <th>g(x)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0.142668</td> <td>1.148321</td> <td>7.705E-6</td> </tr> <tr> <td>0.142669</td> <td>1.148322</td> <td>3.052E-6</td> </tr> <tr> <td>0.14267</td> <td>1.148323</td> <td>-1.6E-6</td> </tr> </tbody> </table>	x	f(x)	g(x)	0.142668	1.148321	7.705E-6	0.142669	1.148322	3.052E-6	0.14267	1.148323	-1.6E-6
x	f(x)	g(x)											
0.142668	1.148321	7.705E-6											
0.142669	1.148322	3.052E-6											
0.14267	1.148323	-1.6E-6											
CALC	g(x)=-0.00000160163												

Eine Nullstelle von f'' liegt im Intervall $[0,142669; 0,142670]$. Auf Hundertstel gerundet gilt $x_{w2} \approx 0,14$. Der Vorzeichenwechsel von f'' in diesem Intervall kann wegen der Stetigkeit von f'' als hinreichende Bedingung für die Existenz des Wendepunktes interpretiert werden.

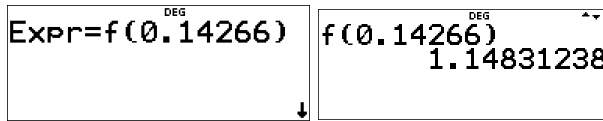
d) Koordinaten der Wendepunkte:

Wurde der Näherungswert für x_w z. B. mit dem allgemeinen Iterationsverfahren bestimmt, dann kann dieser Näherungswert unter einer Variablen (hier Variable a) gespeichert und mit dem Funktionsterm $f(a)$ über *expr-eval* berechnet werden.



$W_1(2,06|0,71)$

Der Näherungswert für die Wendestelle $x_{w2} \approx 0,14$ kann ebenfalls mit *expr-eval* bestimmt werden:



$W_2(0,14|1,15)$

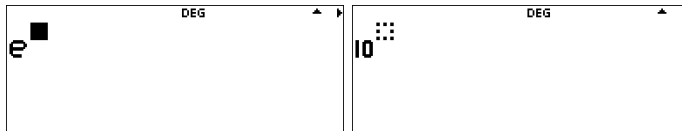
Lösung Aufgabe 4

$$A = \int_0^e (e^x - x^e) dx = \int_0^e e^x dx - \int_0^e x^e dx = [e^x]_0^e - \frac{1}{e+1} \cdot [x^{e+1}]_0^e = e^e - 1 - \frac{1}{e+1} \cdot (e^{e+1} - 0)$$

$$A = e^e - 1 - \frac{e^{e+1}}{e+1} = 3,08 \text{ FE}$$

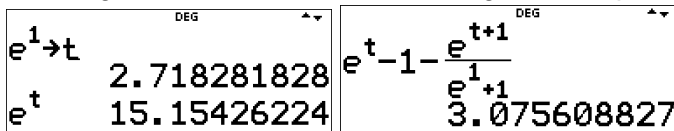
Problem: Wie gibt man e^e ein?

Drückt man die Taste $[e^{10^0}]$ das erste Mal, so erscheint die Vorlage zur Eingabe des Exponenten:



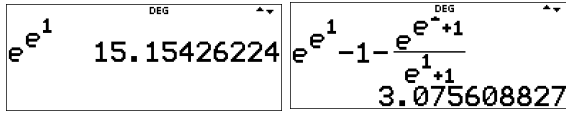
Drückt man die Taste $[e^{10^0}]$ das zweite Mal, um nun den Exponenten e einzugeben, so erscheint die Vorlage zur Eingabe einer Zehnerpotenz.

Man kann sich folgendermaßen behelfen: Man gibt zunächst die Potenz e^1 ein und speichert sie unter einer Variablen, z. B. t. Dann öffnet man nochmals mit der Taste $[e^{10^0}]$ die Vorlage zur Eingabe einer Potenz von e und gibt als Exponenten die Variable t ein.



Für die Berechnung des Terms $A = e^e - 1 - \frac{e^{e+1}}{e+1}$ ergibt sich dann mit dem unter t gespeichertem Wert von e: $A \approx 3,08$.

Alternative zur Eingabe von e^e : Man drückt die Taste $[e^{10^0}]$ und anschließend die Kursortaste $[\rightarrow]$. Dann drückt man die Taste $[e^{10^0}]$ ein zweites Mal und gibt den Exponenten 1 ein, gefolgt von $[enter]$.

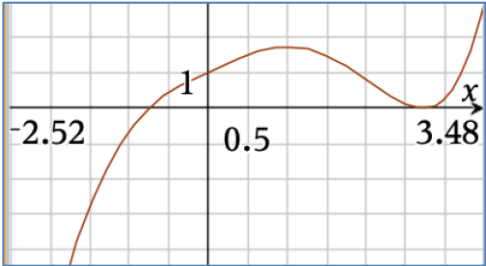


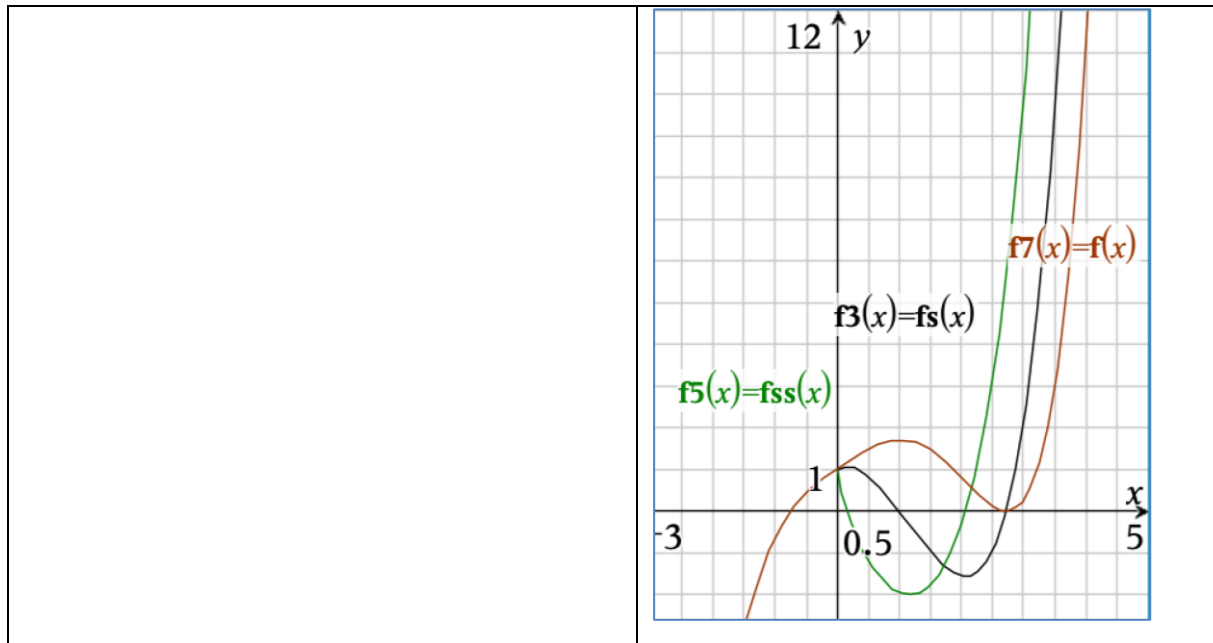
Ergänzende Betrachtung bei Nutzung anderer digitaler Werkzeuge

Nutzung eines CAS zur Lösung der Gleichung $e^x = x^e$

<p>Lösen der Gleichung</p> $e^x = x^e$ <p>Es wird eine Lösung gefunden, allerdings nicht exakt, sondern nur als Näherungswert, was daraufhin deutet, dass das CAS zur Lösung einen Algorithmus zum näherungsweise Berechnen nutzt.</p> <p>Offensichtlich ist die Lösung aber exakt e.</p> <p>Bevor wir den Vorschlägen des CAS folgen, schauen wir uns doch einmal eine Grafik an.</p>	
<p>In der Grafik sind zwei Schnittpunkte zu erkennen, aber der Schnittpunkt im 2. Quadranten ist problematisch, da ja, wie oben dargestellt für x^e der Definitionsbereich $x \geq 0$ gilt.</p> <p>Die Anwendung des domain()-Befehls liefert allerdings auch nur „fast“ das richtige Ergebnis.</p>	

```
domain(x^e, x) ▶ 0 < x < ∞
0^e ▶ 0
```


<p>Erstaunliches passiert auch hier:</p> <p>Obwohl der Definitionsbereich „fast“ richtig angegeben wird, ist sowohl in der Grafik als auch durch Rechnung eine zweite Nullstelle erkennbar. Auch hier erklärt sich dies vermutlich über den Umgang des Rechners mit Exponenten mit rationalen und irrationalen Zahlen.</p>	$f(x) := e^x - x^e \quad \triangleright \text{Fertig}$ $\text{solve}(f(x)=0, x) \quad \triangleright x=2.71828 \quad \triangleleft$ $\text{nSolve}(f(x)=0, x=-1) \quad \triangleright -0.756945 \quad \triangleleft$ $\text{domain}(f(x), x) \quad \triangleright 0 < x < \infty$ 
<p>Auch interessant ist, wie das CAS hier arbeitet:</p> <p>In der ersten Zeile wird im exakten Modus gearbeitet, in der zweiten im Näherungsmodus.</p>	$f(-1)$ <p>\triangleright Fehler: Nicht-reelles Ergebnis</p> $f(-1) \quad \triangleright -0.632121$
<p>Auch die weiteren Berechnungen mit dem WTR lassen sich hier schnell mit dem CAS nachvollziehen.</p> <p>Überraschend ist auch hier, dass der Graph von f über den eigentlichen Definitionsbereich hinaus gezeichnet wird und dass man eine zweite Wendestelle vermuten kann.</p> <p>Unverständlich ist dann allerdings, warum bei den Graphen der 1. und 2. Ableitung der Definitionsbereich richtig beachtet wird.</p>	$fs(x) := \frac{d}{dx}(f(x)) \quad \triangleright \text{Fertig}$ $fs(x) \quad \triangleright e^x - e \cdot x^{e-1} \quad \triangleleft$ $\frac{d}{dx}(fs(x)) \quad \triangleright (e - e^2) \cdot x^{e-2} + e^x \quad \triangleleft$ $fss(x) := \frac{d}{dx}(fs(x)) \quad \triangleright \text{Fertig}$ $\text{zeros}(fs(x), x) \quad \triangleright \{1, 2.71828\} \quad \triangleleft$ $\text{zeros}(fss(x), x) \quad \triangleright \{0.14267, 2.06066\} \quad \triangleleft$ <div style="border: 1px solid black; width: 20px; height: 20px; display: inline-block;"></div>



Nutzung von ChatGPT zur Lösung der Gleichung $e^x = x^e$

HL Solve the equation $x^{\exp(1)} = \exp(1)^x$


The equation $x^{\exp(1)} = \exp(1)^x$ can be rewritten as $x^e = e^x$, where e is the mathematical constant approximately equal to 2.71828. However, there is no known closed-form solution for this equation. Numerical methods such as Newton's method or bisection method can be used to approximate a solution, but finding an exact solution is a difficult problem in mathematics.

So findet ChatGPT keine Lösung.

Versuchen wir es noch einmal, indem wir den Chatbot zwingen schrittweise vorzugehen. Die Idee ist z. B. bei Professor Weitz¹ zu sehen.

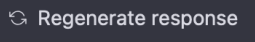
¹ https://www.youtube.com/watch?v=5cYYeuwYF_0

HL Thanks can you do it step by step

 I'm sorry, but as I mentioned earlier, there is no known closed-form solution for the equation $x^e = e^x$. Numerical methods such as Newton's method or bisection method can be used to approximate a solution, but finding an exact solution is a difficult problem in mathematics.


Newton's method is an iterative method that starts with an initial guess and then uses the derivative of the function to refine the guess in each iteration until a desired level of accuracy is reached. Here's a step-by-step explanation of how Newton's method works for this equation:

1. Start with an initial guess for the solution, x_0 .
2. Calculate the value of the function $f(x) = x^e - e^x$ at x_0 .
3. Calculate the derivative of the function, $f'(x) = e * x^{(e-1)} - e^x$.
4. Use the following formula to calculate the next guess: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

 the solution: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Nun versucht das System einen Approximationsmodus anzuwenden, kommt aber nicht weiter. Also ein zweiter Denkanstoß von uns.

HL I think $\exp(1)$ is the only solution.

 Yes, you are correct! e^1 is indeed the only solution to the equation $x^e = e^x$.

The exponential function has the property that e^x is its own derivative, meaning that if $y = e^x$, then $y' = e^x$. Using this property, it can be shown that the only solution to the equation $x^e = e^x$ is $x = e^1 = e$.

Also hilft ChatGPT hier wohl auch nicht viel weiter.

Eine Woche später ein zweiter Versuch mit überraschendem Ausgang:

HL

solve the equation $x^e = e^x$ 

To solve the equation $x^e = e^x$, we can take the natural logarithm of both sides:



$$\ln(x^e) = \ln(e^x)$$

Using the property that $\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$, we can simplify the equation to:

$$e \cdot \ln(x) = x$$

We can rearrange this equation to get:

$$\ln(x) = x/e$$

Now, we can use the Lambert W function to solve for x. Recall that the Lambert W function, denoted as $W(z)$, is the inverse function of $f(z) =$

$z \exp(z)$. In other words, if $y = W(z)$, then $z = y \exp(y)$.

Let $y = W(1/e)$. Then, we have:

$$1/e = y \cdot \exp(y)$$

Multiplying both sides by e, we get:

$$1 = y \cdot \exp(y+1)$$

Using the definition of the Lambert W function, we can write y in terms of $W(y)$:

$$y = W(1/e) = -W(-1/e)$$

Substituting this into the equation, we get:

$$1 = -W(-1/e) \cdot \exp(-1/e)$$

Multiplying both sides by -1, we get:

$$-W(-1/e) = -1/\exp(1)$$

Using the definition of the Lambert W function again, we can write $-W(-1/e)$ in terms of $W(z)$:

$$-W(-1/e) = -W(-1/e \exp(-1/e)) = -W(-1/e 1/e)$$

Substituting this into the equation, we get:

$$-W(-1/e * 1/e) = -1/\exp(1)$$

Multiplying both sides by -1 , we get:

$$W(-1/e * 1/e) = 1/\exp(1)$$


Therefore, the solution to the equation $x^e = e^x$ is:

$$x = e * W(1/e * 1/e) \approx 1.444667861$$

Nun findet der Chatbot eine falsche Lösung.

Also helfen wir auch wieder nach:

HL I think you are wrong the only solution is e

 You are correct, I apologize for my mistake. I made an error in my calculations, and I appreciate you pointing it out. Let me provide a corrected solution:

Taking the natural logarithm of both sides, we get:

$$e \ln(x) = x$$

Rearranging, we get:

$$\ln(x) = x/e$$

Since the function $f(x) = \ln(x) - x/e$ is decreasing for $x > e$, and increasing for $x < e$, we can see that there is only one solution.



We can then see that $x = e$ satisfies the equation:

$$e^e = e^e$$

So the only solution to the equation $x^e = e^x$ is $x = e$.

Thank you for bringing this to my attention, and I apologize for any confusion I may have caused.

Es ist spannend, dass der Chatbot nun auch wieder einen anderen Lösungsweg anbietet, nachdem wir einen Lösungsvorschlag gemacht haben.



Programmieren mit Python.

Ein letzter Versuch in deutscher Sprache (wenn auch empfohlen wird, im Englischen zu bleiben, da dort die Datenbasis größer ist), führt in diese neue Richtung.

HL

Finde alle Nullstellen der Funktion $f(x) = e^x - x^e$



Leider gibt es keine geschlossene Formel, um die Nullstellen von $f(x) = e^x - x^e$ analytisch zu finden. Wir können jedoch versuchen, sie numerisch mit einer geeigneten Methode zu approximieren, zum Beispiel mit dem Newton-Verfahren oder dem Bisektionsverfahren.  

Hier ist ein Beispiel für die Verwendung des Newton-Verfahrens, um eine Nullstelle von $f(x) = e^x - x^e$ zu approximieren:

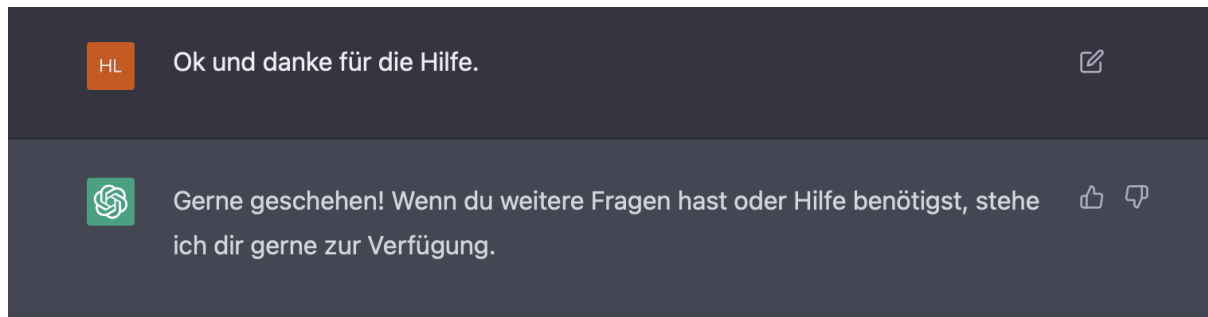
1. Wir wählen einen Startwert x_0 .
2. Wir verwenden die folgende Iterationsformel, um den nächsten Näherungswert x_n zu berechnen: $x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) / f'(x_{n-1})$, wobei $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$ ist.
3. Wir wiederholen Schritt 2, bis die Differenz zwischen aufeinanderfolgenden Näherungswerten kleiner als eine vorgegebene

Toleranz ist.

Hier ist der Python-Code, um die Nullstelle von $f(x) = e^x - x^e$ mit dem Newton-Verfahren zu approximieren:

```
python Copy code  
  
import math  
  
def f(x):  
    return math.exp(x) - x**math.e  
  
def f_prime(x):  
    return math.exp(x) - math.e * x**(math.e-1)  
  
def newton_method(x0, tol=1e-6, max_iter=100):  
    x = x0  
    for i in range(max_iter):  
        fx = f(x)  
        if abs(fx) < tol:  
            return x  
        fp = f_prime(x)  
        if fp == 0:  
            break  
        x = x - fx / fp  
    return None  
  
# Beispielaufruf mit x_0 = 1  
root = newton_method(1)  
if root is not None:  
    print("Eine Nullstelle von f(x) ist ungefähr:", root)  
else:  
    print("Das Newton-Verfahren hat keine Nullstelle gefunden.")
```

Je nach Startwert kann das Verfahren zu verschiedenen Nullstellen von $f(x)$ konvergieren oder auch gar nicht konvergieren. Um alle Nullstellen von $f(x)$ zu finden, müsste man das Verfahren mit verschiedenen Startwerten wiederholen oder andere numerische Methoden ausprobieren.



Wir sehen, ohne menschliche Unterstützung ist der Chatbot ziemlich hilflos, liefert oft keine Ergebnisse oder falsche. Unser eigenes Denken ist also unerlässlich.

Zusammenfassende Gedanken zu den Lösungsmethoden

Bei Aufgaben mit Potenzfunktionen mit rationalen bzw. irrationalen Exponenten gilt es, sich zunächst Gedanken zum Definitionsbereich zu machen. Zumindest in der deutschen Schulmathematik wird vorausgesetzt, dass für $x^{\frac{m}{n}}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ bzw. x^r mit r als irrationale Zahl der Definitionsbereich $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ gilt, um eine Eindeutigkeit zu erzielen.

Dies ist z. B. aus folgendem Grund sinnvoll:

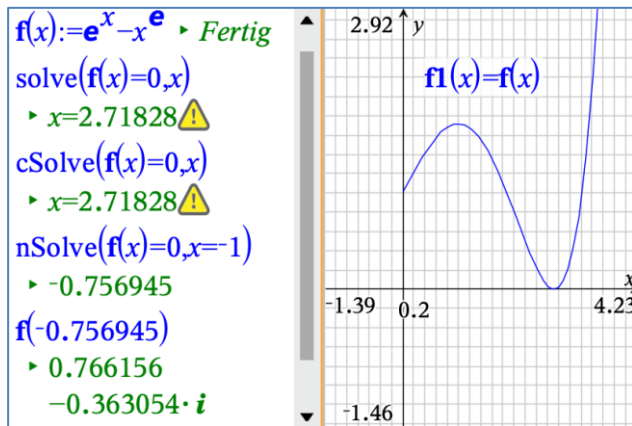
$$-2 = \sqrt[3]{-8} \neq \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = +2$$

Die Probleme ergeben sich, da die am häufigsten genutzten digitalen Hilfsmittel hier jedoch im Hintergrund z. B. die Gleichung $y = \sqrt[3]{x}$ lösen und dabei natürlich z. B. für $x = -8$ die Lösung $y = -2$ finden. Leider wird dies dann auch auf die grafische Darstellung übertragen.

TI-Nspire	ClassPad	GeoGebra

Ergänzung:

Wechselt man in den Einstellungen auf *Format komplexe Zahlen* in der Dokumenteinstellung, wird der Graph richtig dargestellt und es wird auch entsprechend gerechnet. Allerdings werden i.d.R. in unserem Mathematikunterricht komplexe Zahlen, wenn überhaupt nur in Wahlbereichen (vgl. Bundesland Sachsen Klasse 10) thematisiert.



Noch eine kleine Betrachtung zum Schluss.

Ist der Rechner auf Modus reell eingestellt, ergibt sich:

Als Näherungswert berechnet: $(-1)e^1$ ▶ 1.
 Exakt berechnet: $(-1)e^1$ ▶ $(-1)e$ ⚠

Die Fehlermeldung hilft hier auch nicht weiter.

Achtung
 Nicht-reelle Berechnung
 OK

Aber mit der Einstellung auf komplexe Zahlen ergibt sich

$(-1)e$ $\cos(e \cdot \pi) + \sin(e \cdot \pi) \cdot i$
 $(-1)e$ $-0.633256 + 0.773943 \cdot i$

Dies ist im Zahlbereich der komplexen Zahlen auch verständlich, da die Beziehung $e^{i \cdot x} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$ gilt.

Autoren:

Dr. Hubert Langlotz

Dr. Wilfried Zappe