Betrachtung zu einer Fehlerquelle bei trigonometrischen Berechnungen

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen a = 6,0 cm, b = 3,0 cm und c = 7,0 cm. Gesucht sind die Größen der Innenwinkel.

Angegeben wird folgender Lösungsweg:

(1) Es wird einer der Innenwinkel mit dem Kosinussatz berechnet:

$$cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c} = \frac{3^2+7^2-6^2}{2\cdot 3\cdot 7} = \frac{11}{21} \Rightarrow \alpha \approx 58{,}4°$$

(2) Der zweite Winkel wird mit dem Sinussatz berechnet:

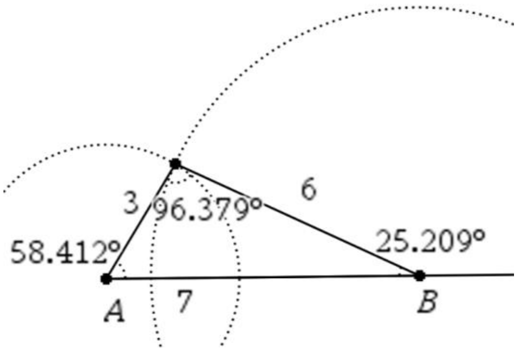
$$\frac{c}{\sin(\gamma)} = \frac{a}{\sin(\alpha)} \Rightarrow \sin(\gamma) = \frac{c}{a}\cdot\sin(\alpha) \Rightarrow \sin(\gamma) = \frac{7}{6}\cdot\sin(58{,}4°) \approx 0{,}9937 \Rightarrow \gamma \approx 83{,}6°$$

(3) Der dritte Winkel wird mit dem Innenwinkelsatz berechnet:

$$\beta = 180° - (\alpha+\gamma) = 180° - (58{,}4° + 83{,}6°) = 38°$$

Ergebnisse: $\alpha \approx 58{,}4°, \beta \approx 38{,}0°, \gamma \approx 83{,}6°$

Leider ist diese Lösung falsch, wie eine maßstabgerechte Zeichnung zeigt:



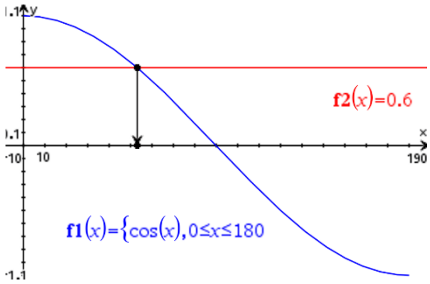
Der entscheidende Fehler wird am Ende des zweiten Lösungsschrittes gemacht:
Die Gleichung $\sin(\gamma) = 0{,}9937$ besitzt im Intervall [0°; 180°] nicht nur eine, sondern zwei Lösungen $\gamma_1 \approx 83{,}6°$ und $\gamma_2 \approx 180° - 83{,}6° = 96{,}4°$. Man muss sich für eine dieser Lösungen entscheiden. Oft hilft dabei der Satz „In einem Dreieck liegt der größeren Seite auch immer der größere Winkel gegenüber." Leider ist er in diesem Fall keine große Hilfe, denn beide Winkel, die der größeren Seite c gegenüber liegen, $\gamma_1 \approx 83{,}6°$ und $\gamma_2 \approx 96{,}4°$, sind größer als $\alpha \approx 58{,}4°$, also der Winkel, welcher der kleineren Seite a gegenüberliegt.

Im Folgenden wird zum einen darauf eingegangen, weshalb es bei der Anwendung des Sinussatzes zu zwei möglichen Fällen kommen kann und weshalb bei der Anwendung des Kosinussatzes nur genau eine Lösung auftaucht. Zum anderen wird daran erinnert, wie der CAS-Rechner bei solchen trigonometrischen Berechnungen zweckmäßig eingesetzt werden kann.

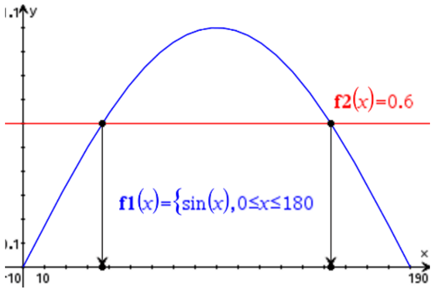
Entscheidungshilfen beim Lösen trigonometrischer Aufgaben

(1) Warum kann es bei trigonometrischen Berechnungen an Dreiecken mit dem Sinussatz zu nicht eindeutigen Lösungen kommen?

Die **Anwendung des Kosinussatzes** führt auf eine Gleichung cos(x) = c. Für 0 < c < 1 ergibt sich dann genau eine Lösung im Intervall 0° < x < 90°, also genau ein spitzer Winkel.
Für -1 < c < 0 ergibt sich genau ein stumpfer Winkel.
Für c = 0 ist das Ergebnis ein rechter Winkel.



Bei Berechnungen eines Innenwinkels eines Dreiecks führt der **Ansatz mit dem Sinussatz** hingegen auf eine Gleichung der Form sin(x) = c. Gilt 0 < c < 1, dann hat diese Gleichung im Intervall 0° < x < 180° stets zwei mögliche Lösungen. Das Dreieck kann spitz- oder stumpfwinklig sein.



Ist in sin(x) = c der Wert von c außerhalb des Intervalls $0 \le c \le 1$, dann liegt kein Dreieck vor.
Für c = 0 ist x = 0° (es liegt kein Dreieck vor) und für c = 1 ist x = 90° (es liegt ein rechtwinkliges Dreieck vor).

Verwendet man bei der Berechnung von Dreieckswinkeln den Sinussatz, so muss man also bei Vorliegen einer Gleichung der Form sin(x) = c mit 0 < c < 1 entscheiden, welche der beiden möglichen Lösungen aus dem Intervall 0° < x < 180° zutreffend ist. Als wichtigste Entscheidungshilfe dient der Satz: In einem Dreieck liegt der größeren Seite auch immer der größere Winkel gegenüber.

Tipp: Man sollte bei der Berechnung von Dreieckswinkeln soweit wie möglich mit dem Kosinussatz arbeiten, weil man hier eindeutige Lösungen erhält. Bei geeigneter Verwendung des CAS-Rechners ist der rechnerische Aufwand auch nicht sehr groß.

(2) Zum Einsatz des CAS-Rechners

Zur Vereinfachung der Rechnung empfiehlt sich die Verwendung des CAS-Rechners mit dem solve-Befehl und der Bedingung $|0 \le x \le 180$ bei der Berechnung von Winkeln und x > 0 bei der Berechnung von Seitenlängen mit dem Kosinussatz.

Sinussatz:

$$\text{solve}\left(\frac{3}{\sin(16°)}=\frac{4}{\sin(x)},x\right)|0\le x\le 180$$
$$x=21.5625 \text{ or } x=158.437$$

$$\text{solve}\left(\frac{44}{\sin(50°)}=\frac{c}{\sin(60°)},c\right)|0\le c\le 180$$
$$c=49.7427$$

Kosinussatz:

$$\text{solve}\left(a^2=44^2+35^2-2\cdot 44\cdot 35\cdot \cos(65°),a\right)\mid a\geq 0 \qquad a=43.12$$

$$\text{solve}\left(44^2=(43.12)^2+35^2-2\cdot 43.12\cdot 35\cdot \cos(x),x\right)\mid 0\leq x\leq 180 \qquad x=67.6388$$

(3) Lösungsstrategien bei Verwendung des CAS-Rechners

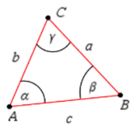
1. Skizziere den Sachverhalt, hebe die gegebenen Stücke farbig hervor. Kontrolliere die gegebenen Maßeinheiten und wandle, wenn nötig, auf eine einheitliche Maßeinheit um.

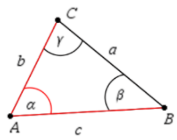
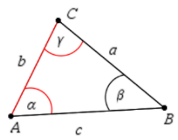
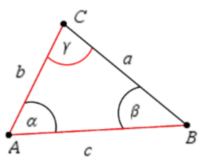
2. Stelle fest, welcher der Kongruenzsätze sss, sws, wsw oder WsS auf die gegebenen Stücke passt, oder ob der Fall wSs *(Der gegebene Winkel liegt der kleineren der beiden gegebenen Seiten gegenüber.)* vorliegt.

3. Rechne mit dem CAS-Rechner und dem solve-Befehl, dann entfällt das Umstellen der Gleichungen. Schränke den Lösungsbereich ein.

4. Runde die Ergebnisse sinnvoll und gib sie mit den Einheiten an.

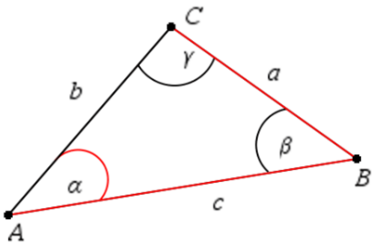
5. Falls genügend Zeit vorhanden ist: Kontrolliere die Rechnung durch eine maßstabgerechte Konstruktion.

sss Achtung: Die Dreiecksungleichungen müssen erfüllt sein: a + b > c, a + c > b, b + c > a.  Berechne zwei Winkel mit dem Kosinussatz, den dritten Winkel über die Innenwinkelsumme. Hinweis: Wenn doch der Sinussatz im zweiten Schritt verwendet wird, ist es zweckmäßig, immer zuerst den Winkel zu berechnen, der der größten Seite gegenüber liegt.	a = 4,3 cm, b = 5,2 cm, c = 67 mm Einheiten: 67 mm = 6,7 cm Die Dreiecksungleichungen sind erfüllt: 4,3 + 5,2 > 6,7; 4,3 + 6,7 > 5,2;5,2 + 6,7 > 4,3 $\text{solve}\left((6.7)^2=(5.2)^2+(4.3)^2-2\cdot 5.2\cdot 4.3\cdot\cos(x),x\right)\mid 0<x<180$ $\blacktriangleright\ x=89.18$ $\text{solve}\left((5.2)^2=(6.7)^2+(4.3)^2-2\cdot 6.7\cdot 4.3\cdot\cos(x),x\right)\mid 0<x<180$ $\blacktriangleright\ x=50.8994$ $180-89.2-50.9 \ \blacktriangleright\ 39.9$ $\gamma \approx 89{,}2°, \beta \approx 50{,}9°, \alpha \approx 39{,}9°$

SWS Berechne die dritte Seite mit dem Kosinussatz. Berechne einen zweiten Winkel mit dem Kosinussatz, den dritten Winkel über die Innenwinkelsumme. 	b = 44 m, c = 35 m, $\alpha = 65°$ $\text{solve}(x^2=44^2+35^2-2\cdot 44\cdot 35.\cdot\cos(65°),x)\mid x>0 ▸ x=43.12$ $\text{solve}(44^2=(43.12)^2+35^2-2\cdot 43.12\cdot 35\cdot\cos(x),x)\mid 0<x<180$ $▸ x=67.6388$ $180-65-67.6 ▸ 47.4$ $\beta \approx 67{,}6°;\ \gamma \approx 47{,}4°; a \approx 43{,}12\ m$
WSW Berechne den dritten Winkel mit dem Satz über die Innenwinkelsumme. Berechne die fehlenden Seiten mit dem Sinussatz. 	b = 44 m, $\alpha = 70°;\ \gamma = 60°$ $180-70-60 ▸ 50$ $\text{solve}\left(\frac{44.}{\sin(50°)}=\frac{x}{\sin(60°)},x\right) ▸ x=49.7427$ $\text{solve}\left(\frac{44.}{\sin(50°)}=\frac{x}{\sin(70°)},x\right) ▸ x=53.974$ $\beta = 50°; c \approx 50\ m;\ a \approx 54\ m$
WsS Berechne den der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel mit dem Sinussatz. Werden zwei Winkelgrößen angezeigt, so entscheide mithilfe des folgenden Satzes, welcher von beiden in Frage kommt: *In einem Dreieck liegt der größeren Seite auch immer der größere Winkel gegenüber.* Berechne den dritten Winkel mit dem Satz über die Innenwinkelsumme. Berechne die fehlenden Seite mit dem Sinussatz. 	c = 2,2 dm, b = 1,7 dm, $\gamma = 25{,}0°$ $\text{solve}\left(\frac{2.2}{\sin(25°)}=\frac{1.7}{\sin(x)},x\right)\mid 0\le x\le 180$ $x=19.0606 \text{ or } x=160.939$ Wegen 2,2 > 1,7 und $\gamma = 25{,}0°$gilt $\beta \approx 19{,}1°$. $\text{solve}\left(\frac{2.2}{\sin(25°)}=\frac{x}{\sin(135.9°)},x\right)$ $x=3.62267$ $\beta \approx 19{,}1°;\ \alpha \approx 135{,}9°; a \approx 3{,}6\ dm$

<table>
<tr>
<td>

wSs
(Der gegebene Winkel liegt der kleineren der beiden gegebenen Seiten gegenüber.)
Verwende für die Berechnung des der größeren Seite gegenüberliegenden Winkels den Sinussatz.
Bringt dieser Ansatz keine Lösung, so existiert kein Dreieck mit den gegebenen Stücken.
Erhält man zwei Lösungen, so gibt es auch zwei Dreiecke mit den gegebenen Stücken. Berechne in diesem Falle den jeweils dritten Winkel mit dem Satz über die Innenwinkelsumme und die fehlende Seite mit dem Sinussatz.

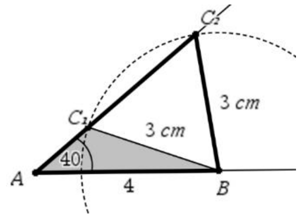


</td>
<td>

Beispiel 1:
$\alpha = 40{,}0°; a = 3{,}0\ cm; c = 4{,}0\ cm$

$\text{solve}\left(\frac{3.}{\sin(40°)}=\frac{4.}{\sin(x)},x\right)|0<x<180$
$\blacktriangleright\ x=58.987 \text{ or } x=121.013$

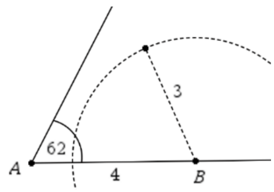
Da der gegebene Winkel der kleineren Seite gegenüberliegt, gibt es zwei Dreiecke mit
a = 3,0 cm, c = 4,0 cm und $\alpha = 40°$:
(i) $\gamma \approx 59{,}0°; \beta \approx 81{,}0°; b \approx 4{,}6\ cm$
(ii) $\gamma \approx 121{,}0°; \beta \approx 19{,}0°; b \approx 1{,}5\ cm$



Beispiel 2:
$\alpha = 62{,}0°; a = 3{,}0\ cm; c = 4{,}0\ cm$

$\text{solve}\left(\frac{3.}{\sin(62°)}=\frac{4.}{\sin(x)},x\right)|0<x<180 \ \blacktriangleright\ \text{false}$

Es gibt kein Dreieck mit diesen Abmessungen.



</td>
</tr>
</table>

Aufgaben

1. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen a = 8,0 cm, b = 6,0 cm und c = 9,0 cm. Gesucht sind die Größen der Innenwinkel.

   Kommentieren und beurteilen Sie folgenden Lösungsweg:

   $\text{solve}\left(8^2=9^2+(6.)^2-2\cdot 9\cdot 6\cdot \cos(x),x\right)|0<x<180$
   $\blacktriangleright\ x=60.6107$

   $\text{solve}\left(\frac{9}{\sin(x)}=\frac{8}{\sin(60.6)},x\right)|0<x<180$
   $\blacktriangleright\ x=78.555 \text{ or } x=101.445$

   $180-101.4-60.6 \ \blacktriangleright\ 18.$

   Ergebnisse: $\alpha \approx 60{,}6°, \beta \approx 18°, \gamma \approx 101{,}4°$

2. Was ist bei dieser Dreiecksberechnung falsch gelaufen?

$\text{solve}\left((5.3)^2=(2.7)^2+(8.1)^2-2\cdot 2.7\cdot 8.1\cdot \cos(x),x\right)|0<x<180$
▸ false

3. Bei der Betrachtung der Beispiele 1 und 2 zum Fall sSw auf den Seiten 5 und 6 gab es einmal zwei Dreiecke und einmal kein Dreieck als Lösung. Das ist abhängig von der Größe des Winkels α.
   Untersuchen Sie, ob man die Größe des Winkels α auch so wählen kann, dass es für die Seitenlängen $a = 3{,}0\ cm$ und $c = 4{,}0\ cm$ genau ein Dreieck als Lösung gibt.
   Falls Sie ein solches Dreieck finden, so geben Sie die Größen aller Innenwinkel und die Seitenlänge b an.

4. Gegeben ist ein Dreieck ABC mit a = 5,5 cm; b = 0,55 dm und $\gamma = 40°$.
   Gesucht sind die Länge der Seite c sowie die Größen der Winkel α und β.
   Kommentieren und beurteilen Sie folgenden Lösungsweg:

$\alpha:=\frac{180-40}{2}$	70
$c:=2\cdot 5.5\cdot \sin(20°)$	3.76222

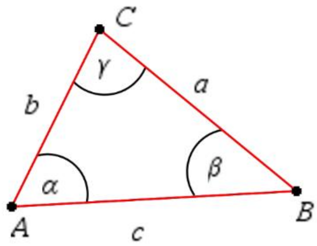
5. Erläutern Sie, wie man ohne große Rechnung auf die fehlenden Winkel und Seiten im Dreieck PQR mit $|\overline{PQ}| = |\overline{PR}| = 123\ mm$ und $\measuredangle RPQ = 60°$ schließen kann.

Weitere Aufgaben zur Thematik findet man in fast jedem Schulbuch, das einen Abschnitt zur Trigonometrie enthält.

Lösungen

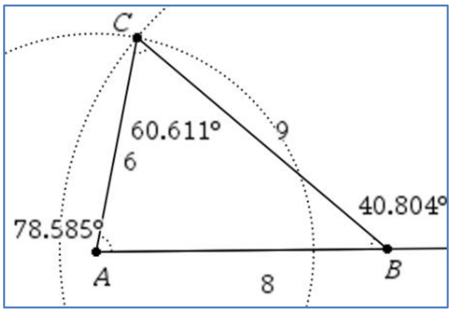
Zu 1:

Zunächst wird der der Seite a = 8,0 cm gegenüberliegende Winkel α mithilfe des Kosinussatzes berechnet. Die Lösung ist eindeutig und richtig. Es gilt $\alpha \approx 60{,}6°$.
Dann wird mithilfe des Sinussatzes der Winkel γ, welcher der Seite c = 9,0 cm gegenüberliegt, berechnet. Die Lösung ist nicht eindeutig, es gibt zwei mögliche Winkel $\gamma_1 \approx 78{,}6°$ und $\gamma_2 \approx 101{,}4°$.



Wegen des bei den gegebenen Stücken zugrunde liegenden Kongruenzsatzes sss muss es aber eine eindeutige Lösung geben. Es müsste also eine der beiden Lösungen ausgeschlossen werden.
Offensichtlich wurde $\gamma_2 \approx 78{,}6°$ ausgeschlossen, denn die Berechnung des dritten Winkels $\beta \approx 40{,}8°$ erfolgte über die Innenwinkelsumme mithilfe von $\alpha \approx 60{,}6°$ und $\gamma_1 \approx 101{,}4°$.
Es bleibt zunächst unklar, ob die Entscheidung für $\gamma_1 \approx 101{,}4°$ richtig war. Auch der Satz „In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten immer der größere Winkel gegenüber." hilft hier nicht weiter, denn sowohl $\gamma_1 \approx 78{,}6°$ und $\gamma_2 \approx 101{,}4°$ liegen der größten Seite im Dreieck gegenüber.

Es bleibt zunächst unklar, ob die Entscheidung für $\gamma_1 \approx 101{,}4°$ richtig war. Auch der Satz „In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten immer der größere Winkel gegenüber.“ hilft hier nicht weiter, denn sowohl $\gamma_1 \approx 78{,}6°$ und $\gamma_2 \approx 101{,}4°$ liegen der größten Seite im Dreieck gegenüber.
Eine maßstabgerechte Konstruktion kann helfen, die richtige Lösung zu finden:



Es ist klar zu erkennen, dass $\gamma_2 \approx 78{,}6°$ die richtige Wahl gewesen wäre.

Der Irrweg kann auf zwei Wegen vermieden werden:

1. Man berechnet auch den zweiten Winkel mit dem Kosinussatz.

$$\text{solve}\left(9^2=8^2+(6.)^2-2\cdot 8\cdot 6\cdot \cos(x),x\right)|0<x<180$$
$$\blacktriangleright\ x=78.5848$$

Der dritte Winkel kann entweder ebenfalls mit dem Kosinussatz oder über die Innenwinkelsumme berechnet werden:

$$\text{solve}\left(6^2=8^2+(9.)^2-2\cdot 8\cdot 9\cdot \cos(x),x\right)|0<x<180$$
$$\blacktriangleright\ x=40.8044$$

2. Man beginnt mit der Berechnung des Winkels, der der größten Seite gegenüberliegt, mithilfe des Kosinussatzes und kann dann mit dem Sinussatz weiterrechnen, bei dessen Lösungen nun eine Entscheidung mit dem Satz „In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten immer der größere Winkel gegenüber.“ möglich wird.

$$\text{solve}\left(9^2=8^2+6^2-2\cdot 8\cdot 6.\cdot \cos(x),x\right)|0<x<180 \quad \blacktriangleright\ x=78.5848$$
$$\text{solve}\left(\frac{9}{\sin(78.6)}=\frac{8}{\sin(x)},x\right)|0<x<180$$
$$\blacktriangleright\ x=60.6162 \text{ or } x=119.384$$
$$180-78.6-60.6 \quad \blacktriangleright\ 40.8$$

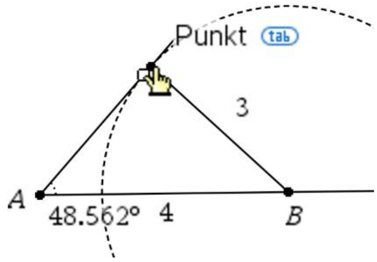
Die richtigen Ergebnisse sind: $\alpha \approx 60{,}6°, \beta \approx 40{,}8°, \gamma \approx 78{,}6°$

Zu 2:

$$\text{solve}\left((5.3)^2=(2.7)^2+(8.1)^2-2\cdot 2.7\cdot 8.1\cdot \cos(x),x\right)|0<x<180$$
$$\blacktriangleright\ \text{false}$$

Ein Dreieck mit den Seitenlängen 5,3; 2,7 und 8,1 existiert nicht, weil die Dreiecksungleichung nicht erfüllt ist: 5,3 + 2,7 = 8,0 < 8,1

Zu 3:
Man kann die Lösung durch inhaltliche Überlegungen gewinnen:
Der Kreis um B mit dem Radius r = 4,0 cm schneidet für $\alpha = 40°$ den freien Schenkel dieses Winkels in zwei Punkten C_1 und C_2 (siehe Beispiel 1 von Seite 5). Wird der Winkel α vergrößert, so rücken diese beiden Punkte enger zusammen, bis es einen Situation gibt, in der sie zusammenfallen. Der freie Schenkel des Winkels α berührt in diesem Fall den Kreis mit dem Radius r = 3 cm um den Punkt B. Der freie Schenkel wird zur Tangente an den Kreis. Da der Berührungsradius senkrecht auf der Tangente an den Kreis steht, gilt $\gamma \approx 90°$. Außerdem gilt dann $\alpha \approx 48{,}59°;\ \beta \approx 41{,}41°$. Weil das Dreieck rechtwinklig ist, ist c die Hypotenuse und es gilt $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7} \approx 2{,}65\ cm$.



Bei weiterer Vergrößerung des Winkels α gibt es dann keinen Schnittpunkt mehr.
Die Größe von α für das Zusammenfallen lässt auch durch systematisches Probieren näherungsweise bestimmen.

Zu 4:
Das Dreieck ABC ist gleichschenklig mit a = b = 5,5 cm. Deshalb sind die Basiswinkel α und β gleich groß. Wegen der Innenwinkelsumme gilt $\alpha + \beta + 40° = 180°$. Mit $\beta = \alpha$ folgt $\alpha = \frac{180°-40°}{2} = 70°$. Also ist $\beta = \alpha = 70°$. Teilt man das gleichschenklige Dreieck ABC durch die Höhe auf der Basis c in zwei zueinander kongruente rechtwinklige Dreiecke, so lässt sich der Ansatz finden: $sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{c/2}{a}$.
Daraus ergibt sich $c = 2a \cdot sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2 \cdot 5{,}5\ cm \cdot \sin(20°) \approx 3{,}8\ cm$.

Zu 5:
Aus $|\overline{PQ}| = |\overline{PR}| = 123\ mm$ und $\measuredangle RPQ = 60°$ folgt, dass das Dreieck gleichschenklig mit dem eingeschlossenen Winkel von 60° ist. Demzufolge sind auch die Basiswinkel jeweils 60° groß, das Dreieck ist gleichseitig, also gilt $|\overline{QR}| = 123\ mm$.

Autor:
Wilfried Zappe

Info:
Wilfried Zappe ist im Ruhestand und hat an der Goetheschule Ilmenau Mathematik unterrichtet.

Zielgruppe des Materials
Schülerinnen und Schüler der Sek I, Lehrer

Langbeschreibung
Der Beitrag geht darauf ein, weshalb es bei trigonometrischen Berechnungen unter der Anwendung des Sinussatzes zu zwei möglichen Lösungen kommen kann und weshalb bei der Anwendung des Kosinussatzes nur genau eine Lösung auftaucht. Zum anderen wird dargestellt, wie der CAS-Rechner bei solchen trigonometrischen Berechnungen zweckmäßig eingesetzt werden kann.

