T^3-MATHEMATIK
Zentrales Mathematikabitur mit digitalen Hilfsmitteln

Kritische Betrachtung und Ausblick an ausgewählten Aufgaben

2. digitale Auflage 2025

Herausgeber: Hubert Langlotz, Helmut Springstein

T³ DEUTSCHLAND

Teachers Teaching with Technology™

Herausgeber:
Hubert Langlotz, Helmut Springstein

Autoren:
Ralph Huste, Hubert Langlotz, Sebastian Rauh, Helmut Springstein, Sibylle Stachniss-Carp, Oliver Wagener

Dieses und weiteres Material steht Ihnen zum pdf-Download bereit: **www.t3deutschland.de** sowie unter **www.ti-unterrichtsmaterialien.net**

Dieses Werk wurde in der Absicht erarbeitet, Lehrerinnen und Lehrern geeignete Materialien für den Unterricht in die Hand zu geben.
Die Anfertigung einer notwendigen Anzahl von Fotokopien für den Einsatz in der Klasse, einer Lehrerfortbildung oder einem Seminar ist daher gestattet. Hierbei ist auf das Copyright von T³-Deutschland hinzuweisen. Jede Verwertung in anderen als den genannten oder den gesetzlich zugelassenen Fällen ist ohne schriftliche Genehmigung von T³ nicht zulässig.

© 2025 T³ Deutschland

Einleitung (1. Auflage 2021)

Die Kultusministerkonferenz beschloss im Jahr 2012, für die Fächer Deutsch und Mathematik sowie ausgewählte Fremdsprachen auf Basis der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife ländergemeinsame Abituraufgabenpools zu entwickeln. Im gleichen Jahr wurde das Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) als wissenschaftliche Einrichtung von der Kultusministerkonferenz mit der Koordination der Entwicklung eines ländergemeinsamen Aufgabenpools für ausgewählte Fächer, darunter das Fach Mathematik, auf der Basis der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife beauftragt. Ziel dieser Entwicklung war und ist, die mit den Abiturprüfungen der Länder verbundenen Anforderungen anzugleichen und die Qualität dieser Prüfungen zu sichern. Für das Prüfungsjahr 2017 standen die Aufgabenpools für Mathematik und ausgewählter Fächer den Ländern erstmalig zur Verfügung.

Diese Aufgabenvorschläge werden von einer länderübergreifenden Arbeitsgruppe von 15 Bundesländern erarbeitet und den Ländern in einem gemeinsamen Aufgabenpool zur Verfügung gestellt. Von diesen Aufgabenvorschlägen wählen die Bundesländer Aufgaben aus und überarbeiteten sie mehr oder weniger, um sie an ihre länderspezifischen Eigenheiten anzupassen. Teilweise werden sie durch eigene Aufgaben bzw. Teilaufgaben ergänzt. Nur Hamburg hat die ausgewählten Aufgaben unverändert übernommen. Die Absicht, wonach ab dem Abiturjahrgang 2021 die Aufgaben in allen Ländern nur noch unverändert übernommen werden dürfen, sofern in den Ländern die Voraussetzungen dafür geschaffen wurden, besteht weiterhin. Inwieweit die Länder diese vor dem Hintergrund der Auswirkungen von COVID-19 auf Unterricht und Prüfungsvorbereitung konsequent umsetzen können, ist derzeit nicht zuverlässig abzuschätzen.

Beginnend mit den 2015 vom IQB zur Verfügung gestellten Orientierungsaufgaben gab und gibt es erhebliche Kritik.
Abituraufgaben nehmen aufgrund der Außenwirkung eine zentrale Position in der öffentlichen Diskussion über Mathematikunterricht ein. Außerdem werden sie von sehr, sehr vielen Schülerinnen und Schülern als Vorbereitung auf eine Abiturklausur durchgerechnet, sodass sie eine erhebliche Rückwirkung auf den Unterricht haben.

Anlässlich dieser Diskussionen hat sich die Arbeitsgruppe Mathematik von T^3 Deutschland zusammengefunden, um Vorschläge zur Verbesserung der Aufgabenkultur zu unterbreiten. Diese Arbeitsgruppe besteht aus Lehrerinnen und Lehrern aus verschiedenen Bundesländern, die seit vielen Jahren Schülerinnen und Schüler durch die Abiturprüfungen begleiten bzw. an der Erstellung von Abituraufgaben in den jeweiligen Bundesländern beteiligt waren.
Die Arbeitsgruppe hat sich auf Aufgaben beschränkt, für die als Hilfsmittel ein Computer Algebra System erlaubt ist.

Der Arbeitsgruppe ist klar, dass die hier vorgestellten Aufgaben nicht immer den von ihr erarbeiteten Merkmalen vollständig entsprechen, aber sie will Diskussionsanregungen liefern. Außerdem haben die Mitglieder dieser Arbeitsgruppe diese Anregungen nicht im Hauptamt, sondern in ihrer „Freizeit“ angefertigt.

In diesem Sinne hat sich die Arbeitsgruppe Mathematik von T^3 Deutschland in einem ersten Teil dazu entschlossen, einige ausgewählte Aufgaben aus dem gemeinsamen Aufgabenpool der Länder kritisch zu diskutieren und Vorschläge zu deren Modifizierung vorzulegen.

Ein weiterer Bereich ist den Lösungen gewidmet. Die dargestellten Erwartungshorizonte der Aufgaben aus dem Aufgabenpool entsprechen nicht den von den Schülerinnen und Schülern erwarteten Lösungsdokumentationen. Die Anfertigung von sinnvollen Lösungsdokumentationen kostet Zeit und muss entsprechend bewertet werden. Wir stellen beispielhaft Lösungsdokumentationen zur Diskussion.

Im Kapitel „Vorschläge für Leistungsaufgaben stellen wir einige in der Arbeitsgruppe entwickelte Aufgaben zur Diskussion, welche nicht als fertige Abituraufgaben, sondern eher als Leistungsaufgaben zu sehen sind.

Einleitung (2. digitale Auflage 2025)

Wer kritisiert steht in der Pflicht zu zeigen, dass es besser geht. Das ist das Mittel der Wahl von unterrichtenden Lehrkräften, denn das Erstellen von (Prüfungs-) Aufgaben für den Unterricht an Schulen gehört zu unseren Kernkompetenzen. In dieser Bröschüre haben wir exemplarisch Abituraufgaben des Aufgabenpools aus den Jahren 2017 bis 2019 betrachtet. Es ging uns nicht darum, vollständige Abituraufgaben zu erstellen, sondern eine Ideensammlung von Aufgabenteilen vorzustellen, mit denen wir zeigen wollten, dass in dem jeweiligen Kontext der Poolaufgaben durchaus sinnvolle Aufgaben erstellt werden könnten. Dabei haben wir den Aufgabenkontext des IQB als Grundlage genommen, Originalaufgabenteile und Lösungsvorschläge kommentiert, Alternativen erarbeitet und den Originalen gegenübergestellt. Denn nur so kann man beide Versionen angemessen vergleichen. Außerdem haben wir aus unserer Sicht sinnvolle Erweiterungen ausgearbeitet. Die Broschüre haben wir allerdings nicht veröffentlicht, da wir 2021 noch keine Aufgaben- und Lösungstexte vom IQB übernehmen durften, obwohl sie im Internet öffentlich zugänglich waren. Mittlerweile dürfen die Aufgabentexte genutzt werden, sodass die Broschüre nun, in digitaler Form, erscheinen kann.

Allerdings hat sich in der Zwischenzeit einiges verändert:
Das IQB spricht nun nicht mehr von einem CAS, sondern von einem modularen Mathematiksystem (MMS). „Gängige MMS bestehen aus Modulen wie einem Computeralgebramodul, einem Modul zum Darstellen von Funktionsgraphen, einem dynamischen Geometriemodul, einem Modul zur Bestimmung von Werten von Wahrscheinlichkeitsverteilungen oder einem Tabellenkalkulationsmodul, die in geeigneter Weise korrespondieren.“[1]
Wir werden im Folgenden allerdings weiter von einem CAS statt von einem MMS reden, weil der Begriff CAS in der didaktischen Diskussion immer noch gebräuchlich ist, vor allen Dingen auch außerhalb Deutschlands.

Mit dieser Veränderung des Namens könnte man noch leben, obwohl die Bezeichnung MMS eine deutscher Sonderweg ist, aber ab dem Abitur 2030 wollen KMK und IQB die Funktionalität eines MMS deutlich einschränken.[2] Hier scheint sich ein Einfluss des IQB abzuzeichnen, auch wenn dies nicht belegbar ist. Generell entsteht der Eindruck, das IQB verstehe sich eher als steuernde Instanz denn als Sammelpunkt für den didaktischen Diskurs aus Schule, Hochschule und Verwaltung.
Die Einschränkungen sind unserer Meinung nach so gravierend, dass das einen Rückschritt bedeutet und das Ziel, Mathematikunterricht realitätsnäher zu gestalten, in den Hintergrund gedrängt wird.
Wir haben unsere Broschüre nicht überprüft, was sich bei unseren Aufgabenstellungen verändern würde. Uns ging und geht es weiterhin um realitätsnahen Unterricht.
Die GDM[3], MNU[4] und T^3 haben sehr qualifizierte Stellungsnahmen dazu verfasst, sodass wir an dieser Stelle nicht näher darauf eingehen wollen. Die Stellungnahme von T^3 haben wir als Anhang abgedruckt. Hinzugefügt haben wir einen Maßnahmenkatalog der Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV), der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) und des Ver-

[1] IQB, KMK (2024) Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder Aufgaben für die Fächer Mathematik sowie Biologie, Chemie und Physik (Hinweise zur Verwendung von Hilfsmitteln (gültig einschließlich Prüfungsjahr 2029)
https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/abitur/dokumente/mathematik/M_Hinweise_zur_V_1.pdf
Zuletzt abgerufen am 25. 5. 2025

[2] IQB, KMK (2024) Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder Aufgaben für die Fächer Mathematik sowie Biologie, Chemie und Physik (Hinweise zur Verwendung von Hilfsmitteln (gültig ab Prüfungsjahr 2030))
https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/abitur/dokumente/mathematik/M_Hinweise_zur_V.pdf
Zuletzt abgerufen 25. 5. 2025

[3] GDM (2025). KMK-Entscheidung bremst Digitalisierung in der mathematischen Bildung aus https://didaktik-der-mathematik.de/wp-content/uploads/2025/03/2025-03-19_KMK-Entscheidung-bremst-Digitalisierung-in-der-mathematischen-Bildung-aus.pdf
Zuletzt abgerufen 25. 5. 2025

[4] Elschenbroich, H.-J., Langlotz, H. (2025). digitalisierung klein geschrieben. MNU Journal 2025(2) (S. 92-93)

© 2025 T^3 Deutschland

bands zur Förderung des MINT-Unterrichts (MNU) aus dem Jahr 2019, um zu zeigen, in welche Richtung Mathematikunterricht, insbesondere der Übergang von der Schule zur Hochschule erfolgen sollte.
Nur ein allgemeiner Hinweis:
Die KMK hat 2024 in Ihrer Handlungsempfehlung für die Bildungsverwaltung zum Umgang mit Künstlicher Intelligenz in schulischen Bildungsprozessen die Absicht geäußert, die Verwendung von Künstlicher Intelligenz (KI) nicht durch Nutzungsverbote einzuschränken, sondern von Anfang an eine konstruktiv-kritische Auseinandersetzung mit KI im Bildungsprozess zu ermöglichen.[5] Das steht unserer Meinung nach im Widerspruch zu den Einschränkungen, die die KMK bei dem weniger mächtigen Werkzeug CAS (oder in deren Sprachregelung MMS) ab 2030 plant.

[5] KMK (2014). Handlungsempfehlung für die Bildungsverwaltung zum Umgang mit Künstlicher Intelligenz in schulischen Bildungsprozessen, Themenspezifische Handlungsempfehlung (Beschluss der Bildungsministerkonferenz vom 10.10.2024) (S. 2)

Inhaltsverzeichnis

Seite

Vorwort....7

Kritische Betrachtung ausgewählter Abituraufgaben aus dem gemeinsamen Aufgabenpool der Länder....10

Gläser – eine Aufgabe aus dem Aufgabenpool 2017 zur Analysis auf erhöhtem Niveau ..11

Schiff – eine Aufgabe aus dem Aufgabenpool 2017 zur Analysis auf erhöhtem Niveau 23

Plakat – eine Aufgabe aus dem Aufgabenpool 2018 zur Analytischen Geometrie auf grundlegendem Niveau....30

Schwimmbad - Eine Aufgabe aus dem Aufgabenpool 2019 zur Stochastik auf erhöhtem Niveau 34

Aufgaben mit Lösungen....36

Lösungsdokumentation bei Aufgaben des gemeinsamen Aufgabenpools der Länder....36

Die MaTTI-Methode 38

Gläser – modifizierte Aufgabe mit Lösungen....41

Schiff – modifizierte Aufgabe mit Lösungen 46

Plakat – Kritik an der Lösung der Aufgabe aus dem Aufgabenpool 2018 zur Analytischen Geometrie auf grundlegendem Niveau 50

Ausgewählte Beispiele für Leistungsaufgaben 56

Gaube....56

Zufluss – Abfluss 66

Doping 71

Internetnutzung....75

Anhang 1: Stellungnahme des Lehrernetzwerks T³ zum Zertifizierungsprozess von MMS ..78

Anhang 2: Maßnahmenkatalog der Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV), der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) und des Verbands zur Förderung des MINT-Unterrichts (MNU) 81

© 2025 T³ Deutschland

Vorwort

Die Erfahrungen mit den bisher vorgelegten Aufgaben des gemeinsamen Aufgabenpools der Länder für die Abiturprüfung in Mathematik haben zu einer intensiven öffentlichen Diskussion über deren Qualität und Passung zu den Bildungsstandards geführt.
Die Stellungnahme der Mathematik-Kommission Übergang Schule - Hochschule „Zur aktuellen Diskussion über die Qualität des Mathematikunterrichts“ vom 20.04.2018 unter Beteiligung der Fachverbände DMV, MNU und GDM und die Ergebnisse der Arbeitsgruppen im Rahmen der Fachtagung „Förderung mathematischer Kompetenzen - Rückblick und Ausblick“ vom 02.03.2018 in Berlin haben diese weiter angeregt.

Grundsätzlich unterstützt die Arbeitsgruppe Mathematik von T^3 Deutschland die Bestrebungen, durch zentrale Aufgabenstellungen die Vergleichbarkeit der Abiturprüfungen zu fördern. An der gegenwärtigen Praxis gibt es aus unserer Sicht drei wesentliche Kritikpunkte:

1. Der bislang uneinheitliche Einsatz der Aufgaben des gemeinsamen Aufgabenpools der Länder in den einzelnen Bundesländern.
2. Die fehlende Anpassung der Rahmenbedingungen in den Bundesländern.
3. Die Qualität der zentralen Aufgabenstellungen und die durch sie gesetzten Standards.

Für ein Zentralabitur im Wortsinn ist eine Vereinheitlichung dieser Rahmenbedingungen unabdingbar. Dazu bedarf es aus Sicht der Arbeitsgruppe Mathematik von T^3 Deutschland mindestens einer Angleichung der Stundentafeln und der Prüfungsordnungen der Länder als auch einer Weiterentwicklung der Bildungsstandards durch Konkretisierung der geforderten inhaltsbezogenen Kompetenzen. Eine solche Weiterentwicklung sollte im Sinne eines Bundescurriculums erfolgen. Der Entwicklung der Aufgaben des gemeinsamen Aufgabenpools der Länder würde damit eine verbindliche inhaltliche Basis gegeben. Eine zurzeit noch notwendige Interpretation der Bildungsstandards durch das IQB bzw. der Aufgabenersteller würde entfallen und damit ein Beitrag zur Transparenz geleistet. In diesem Zusammenhang muss auch eine Vereinheitlichung der Bedeutung der Operatoren in den einzelnen Bundesländern erfolgen.

Eine Weiterentwicklung des Prüfungsformates ist wünschenswert, zum Beispiel auch durch einen bundesweit einheitlichen Prüfungsteil ohne Hilfsmittel. Dafür sind einheitliche inhaltliche Vorgaben und einheitliche Rahmenbedingungen unumgänglich.

Der Prüfungsteil, bei dem Hilfsmittel zugelassen sind, könnte zunächst in Länderhoheit bleiben, um den noch bestehenden Unterschieden hinsichtlich Stundentafeln, Lehrplaninhalten, zugelassenen Hilfsmitteln und weiteren Aspekten Rechnung zu tragen.

Die Länder würden so vorläufig ihre spezifischen Ausprägungen beibehalten.

Ein entsprechender Vorschlag wurde auf der KMK-Fachtagung am 29. und 30. November 2016 in Dresden „Mathematikabitur: Vergleichbar unvergleichbar“ eingebracht und mehrheitlich befürwortet. Diesem Vorschlag schließt sich die Arbeitsgruppe Mathematik von T^3 Deutschland ausdrücklich an.
Auch im Maßnahmenkatalog der Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV), der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) und des Verbands zur Förderung des MINT-Unterrichts (MNU) aus dem Jahr 2019 wird dies unter Punkt 3 ausdrücklich gefordert. Aufgrund der Bedeutung dieses Maßnahmenkataloges haben wir ihn ab Seite 81 als Anhang abgedruckt.

In diesem Heft werden wir uns im Folgenden „nur“ noch mit dem Qualitätsaspekt beschäftigen.

In den Diskussionen um die Abiturprüfungen im Fach Mathematik stehen immer wieder folgende Punkte in der Kritik:

- die Anwendungsbezüge sind zum Teil künstlich und erscheinen aufgesetzt,
- die Aufgaben sind oft zu textlastig,
- die Aufgaben sind zu kleinteilig, es sind zu viele Teilaufgaben separat zu lösen.

Grundlage für die Prüfungsaufgaben sind die Bildungsstandards. Eine Prüfungsaufgabe sollte sowohl die Überprüfung mathematischen Grundwissens, der Anwendung mathematischer Methoden als auch des Verständnisses mathematischer Zusammenhänge und Prinzipien beinhalten. Ein konkreter und nicht künstlich geschaffener Sachbezug kann als Motivation und Grundlage einer Modellierung dienen.

Durch digitale Werkzeuge und deren stetige Weiterentwicklung wird die Lösung klassischer Kalkül orientierter Aufgabenstellungen zum Teil stark vereinfacht. Andererseits fördert der Einsatz digitaler Werkzeuge die Schwerpunktverlagerung des Mathematikunterrichts weg von der Kalkülorientierung hin zu einer verstärkten Verstehensorientierung und einem stärkeren Einbeziehen von Modellierungsaufgaben und mathematischem Experimentieren. Aufgaben sollten so formuliert sein, dass Schülerinnen und Schüler grundlegende mathematische Konzepte anwenden können. Dazu gehören auch die Auswahl und die Bewertung von geeigneten Lösungswegen. Die Aufgabenstellungen werden dabei nicht zwingend vom mathematischen Inhalt her schwieriger, sondern nur anders. Außerdem kann so die Relevanz der Mathematik für reale Situationen deutlich gemacht werden.

In den Bildungsstandards wird ausgeführt: „Für die Beurteilung der Prüfungsleistungen sind sowohl die rein formale Lösung als auch das zum Ausdruck gebrachte mathematische Verständnis maßgebend. Daher sind erläuternde, kommentierende und begründende Texte unverzichtbare Bestandteile der Prüfungsleistung. Dies gilt auch für die Dokumentation des Einsatzes elektronischer Werkzeuge. Mangelhafte Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen oder unzureichende oder falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text sind als fachliche Fehler zu werten.“ (Bildungsstandards[6], S. 24)
Dieser Anspruch wird mit den mit den Aufgaben für die Aufgabenpools der Länder vorgelegten Lösungsdokumentationen bisher nur unzureichend erfüllt.

Die Arbeitsgruppe Mathematik von T^3 Deutschland hat sich zunächst auf Merkmale für die Beurteilung der Qualität der Aufgaben aus dem gemeinsamen Aufgabenpool der Länder bei der Benutzung eines Computer Algebra Systems (CAS) verständigt.

Folgende Merkmale sind aus unserer Sicht insbesondere auch bei Verwendung digitaler Werkzeuge wesentlich:

- Das Interpretieren und Erläutern von Lösungen und Lösungswegen sollte neben einem sachgerechten Einsatz mathematischer Methoden und digitaler Werkzeuge eine angemessene Rolle einnehmen.
- Eine angemessene Lösungsdokumentation ist ausreichend bei der Bewertung zu berücksichtigen.
- Wenn ein Realitätsbezug besteht, dann sollte die Aufgabe auch relevante Fragestellungen zu diesem beinhalten. Jedoch muss der Realitätsbezug nicht zwingend die gesamte Aufgabe betreffen. Auch innermathematische Problemstellungen haben in der Prüfung ihre Berechtigung.
- Zu lange Textteile und zu kleinschrittiges Vorgehen sollten vermieden werden.

[6] Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012)

© 2025 T^3 Deutschland

- Es sollten auch Inhalte der Sekundarstufe I mitgeprüft werden[7].

Aktuell sind gerade die Abiturprüfungen 2020 absolviert worden und ein erster Blick auf ausgewählte Bundesländer (Berlin, Sachsen, Thüringen) zeigt, dass zumindest in diesen Ländern die inhaltlichen Anforderungen durchaus angemessen erscheinen, aber durch ein Zuviel an Aufgaben (z. T. müssen die Schülerinnen und Schüler pro Abiturprüfung mehr als 40 Operatoren abarbeiten) kaum Zeit bleibt, tiefgründiger über ein Problem nachzudenken.

Hinzu kommt aus unserer Sicht, dass insbesondere bei einzelnen Aufgaben zur analytischen Geometrie aufgrund der Wahl der Operatoren (Bestimme, Zeige) keine Gleichwertigkeit hinsichtlich der verschiedenen Computer Algebra Systeme besteht. Als Beispiel sei die Frage des Abstandes windschiefer Geraden erwähnt. Je nach verwendetem Programm müssen die Schülerinnen und Schüler entweder nur dreimal „Klicken“ bzw. den vollständigen Algorithmus abarbeiten.

Auffällig ist aber auch wieder der krampfhafte Versuch unbedingt Anwendungsbezüge in die Aufgaben zu integrieren. Negatives Beispiel hierbei ist die Aufgabe aus dem CAS-Abitur für das Leistungsfach in NRW, wo versucht wird die Geschwindigkeit einer Raubkatze mittels funktionaler Zusammenhänge unrealistisch zu modellieren.

[7] Auch wenn das nicht alle Länderbestimmungen vorsehen, halten wir diese Überprüfung für so wesentlich, dass wir es hier mit aufgeführt haben.

Kritische Betrachtung ausgewählter Abituraufgaben aus dem gemeinsamen Aufgabenpool der Länder

In diesem Abschnitt haben wir exemplarisch Abituraufgaben des Aufgabenpools aus den Jahren 2017 bis 2019 untersucht. Wir haben uns auf Aufgaben beschränkt, für die als Hilfsmittel ein Computer Algebra System (CAS) erlaubt ist.

Dabei wurden die Originalaufgabenteile von uns kommentiert und gegebenenfalls Alternativen formuliert. Es ging uns nicht darum, vollständige Abituraufgaben darzustellen, sondern eine Ideensammlung von Aufgabenteilen vorzustellen, mit denen man in dem jeweiligen Kontext sinnvolle Aufgaben erstellen könnte. Deshalb fehlen hier Bewertungspunkte und Anforderungsbereiche.

Der besseren Lesbarkeit halber haben wir die Lösungen unserer Alternativaufgaben weiter hinten im Text eingefügt. Außerdem gibt auch die Dokumentation der Aufgaben aus dem Aufgabenpool zu vielen Kritikpunkten Anlass, sodass wir den Lösungen ein eigenes Kapitel gewidmet haben.

© 2025 T^3 Deutschland

Gläser – eine Aufgabe aus dem Aufgabenpool 2017 zur Analysis auf erhöhtem Niveau

Dateiname: 2017_M_erhoeht_B_Analysis_CAS_2.pdf

Die ursprüngliche Aufgabe ist ein Beispiel für eine anwendungsorientierte Aufgabe, die den Kontext nicht ernst nimmt. D. h. im Rahmen des Kontextes werden Standardfragen gestellt, aber es sind keine sinnvollen Fragen innerhalb des Kontextes. Dann hätte man lieber und ehrlicherweise eine innermathematische Aufgabe erstellen sollen.

Wir haben dagegen versucht, innerhalb des Kontextes Gläserproduktion sinnvolle und dabei auch mathematisch anspruchsvolle Aufgaben zu erstellen. Auch wenn wir uns an Abituraufgaben anlehnen, insbesondere mit dem „einfachen“ Anfangsteil, so ist die modifizierte Aufgabe vom Umfang und von der Berücksichtigung aller Anforderungsbereiche keine Abituraufgabe mehr. Wir wollten vielmehr deutlich machen, welche sinnvollen Fragestellungen ein derartiger Kontext bietet. Wir haben uns von der Frage „Warum will ich das wissen?“ leiten lassen.
Weitere Fragestellungen sind immer noch denkbar. So könnte man z. B., gerade in einer CAS-orientierten Aufgabe, die Materialstärke nicht mehr vernachlässigen und nach dem Gewicht eines Glases fragen.

Weiterhin haben die Aufgabenersteller bei der Volumenberechnung versucht, durch, für Schülerinnen und Schüler unmotivierte Umformungen, Umkehrfunktionen zu umgehen. Das liegt daran, dass Umkehrfunktionen nicht in den Bildungsstandards enthalten sind und somit auch nicht in einer Abiturprüfung abgefragt werden können.
Wir setzen eine numerische Berechnung des Volumens dagegen. Dieses entspricht mathematischem Vorgehen, wenn exakte Verfahren unbekannt sind. Insbesondere in einem Unterricht mit Unterstützung digitaler Hilfsmittel, sollten numerische eine breite Verwendung finden. Denn gerade im „richtigen Leben“ lassen sich viele Dinge nicht exakt berechnen und man muss auf Näherungsverfahren zurückgreifen.

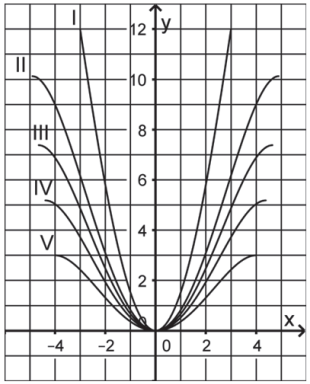
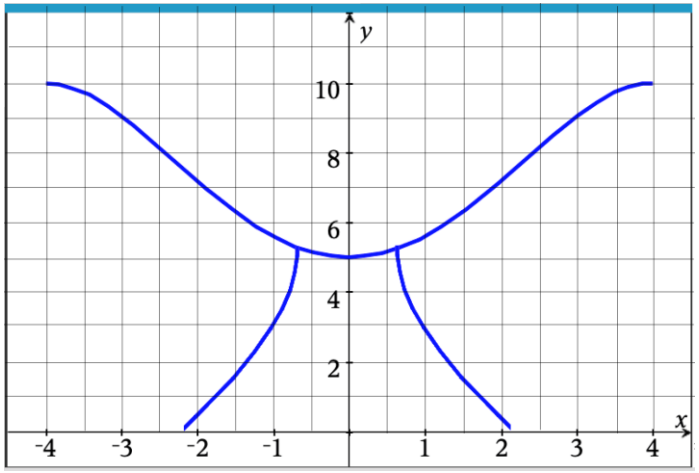
In dieser modifizierten Aufgabe wird das numerische Verfahren kleinschrittig vorgegeben. Das liegt einerseits daran, dass Schülerinnen und Schüler derartige Verfahren wenig kennen, zum anderen ist es der Prüfungssituation geschuldet. Zusätzlich wird als Abbruchkriterium die Unterschreitung einer bestimmten Grenze beim Unterschied zweier hintereinander folgenden Annäherungen ausgewählt. Auch hier ist der Prüfungssituation Rechnung getragen. Im Unterricht wird man mit äußeren und inneren Zylindern arbeiten.

Nach den vorgestellten sinnvollen kontextorientierten Aufgabenteilen können, auch in Abituraufgaben, durchaus auch innermathematische Aufgabenteile folgen. Diese müssten nur im Zusammenhang mit den Funktionen aus dem anwendungsorientierten Teil stehen.
Auf die Erstellung derartiger Aufgabenteile haben wir allerdings verzichtet, da es hier nur um Anwendungsbezüge geht.

Wir möchten an dieser Stelle aber auch darauf hinweisen, dass es durchaus gelungene Ansätze für anwendungsorientierte Abituraufgaben gibt. Speziell weisen wir auf die Abituraufgaben aus dem Hamburger CiMS Projekt (**C**omputer **i**m **M**athematikunterricht der **S**tudienstufe) aus den Jahren 2008 und 2009 hin. Die Besonderheit war, dass viele Aufgaben mit und ohne CAS einen gleichen Aufgabenkern hatten, und so der Unterschied zwischen diesen Aufgaben besonders prägnant ist.

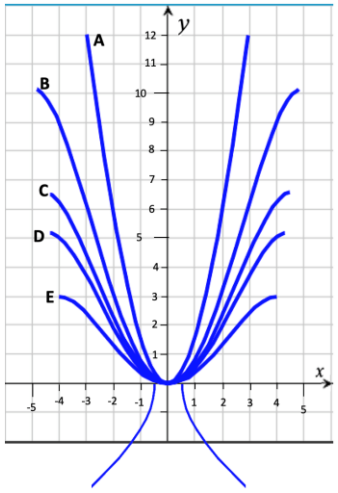
Die Aufgaben wurden damals von der Hamburger Schulbehörde ins Netz gestellt. Sie sind jetzt z. B. auf den Seiten von Thomas Unkelbach zu finden:
https://www.selbstlernmaterial.de/m/abi/HH/hhindex.html Zuletzt abgerufen 25. 5. 2025.

Die Lösung der überarbeiteten Aufgabe findet man ab Seite 39.

IQB-Poolaufgabe aus dem Jahr 2017 Erhöhtes Niveau	**Bearbeitete Aufgabenstellung**	**Kommentar**
Die Abbildung zeigt schematisch Längsschnitte von fünf Gläsern einer Glas-Serie; Füße und Stiele der Gläser sind nicht abgebildet. Die Gläser sind rotationssymmetrisch, d. h. jeder zur Rotationsachse senkrechte Querschnitt durch ein Glas ist kreisförmig. Im eingezeichneten Koordinatensystem werden die Rotationsachsen der Gläser durch die y-Achse dargestellt; eine Längeneinheit entspricht 1 cm in der Wirklichkeit.  Die Formen der Gläser sind so gewählt, dass jeder der fünf Längsschnitte modellhaft mithilfe einer der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k mit $f_k(x) = -\frac{3}{512}k \cdot x^4 + \frac{3}{32}k^2 \cdot x^2$ und $k \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden kann. Dabei gehört die Funktion f_2 zum Likörglas der Serie, die Funktion f_3 zum Cocktailglas. Das Sektglas hat eine Höhe von 12 cm, sein Rand einen	Ein Designer hat ein Glas entworfen. Die Abbildung zeigt den in ein Koordinatensystem projizierten Längsschnitt des Entwurfs. Eine Längeneinheit entspricht 1 cm in der Wirklichkeit. In dieser Aufgabe wird die Materialstärke der Gläser vernachlässigt.  *Abbildung 1*	Der Eingangstext wird auf das Notwendigste verkürzt. Erklärungen, die erst in späteren Aufgabenteilen benötigt werden, werden dorthin verschoben.

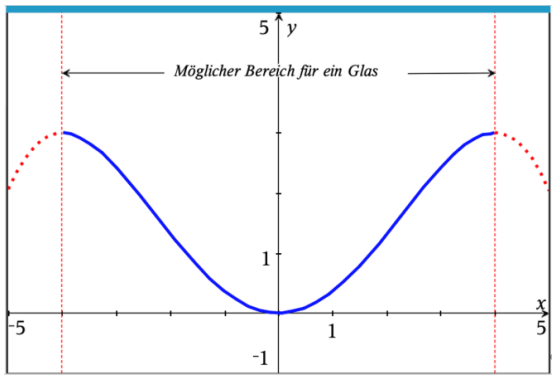
© 2025 T³ Deutschland

IQB-Poolaufgabe aus dem Jahr 2017 Erhöhtes Niveau	**Bearbeitete Aufgabenstellung**	**Kommentar**
Durchmesser von 6 cm. Die Materialstärke der Gläser soll vernachlässigt werden.		
	1. Der Längsschnitt des Glases (ohne den Stiel) soll für die industrielle Herstellung durch eine Funktion beschrieben werden. Der Computerexperte, der die Designvorgaben in eine mathematische Funktion übersetzen soll, geht in einem ersten Ansatz von einer ganzrationalen Funktion aus, die die Rotationssymmetrie des Glases berücksichtigt. 1.1. Begründen Sie, dass der minimale Grad einer derartigen Funktion 4 betragen muss. 1.2. Geben Sie eine allgemeine Funktionsgleichung für eine ganzrationale Funktion vierten Grades an, die die symmetrische Randkurve beschreiben könnte und begründen Sie Ihr Ergebnis. Bestimmen Sie einen Funktionsterm einer ganzrationalen Funktion, deren Graph mit dem Verlauf der Randkurve des Glases der Abbildung 1 übereinstimmt.	Die Benutzung (mathematischer) Funktionen wird motiviert. Für den (leichteren) Einstieg wird erst einmal von einem Glas ausgegangen. Der Aufbau des Funktionsterm wird dadurch im Kontext verdeutlicht. Erst später wird die Benutzung einer Funktionenschar motiviert.
	2. Das Glas verkauft sich so gut, dass eine Glasserie mit ähnlichen Gläsern für unterschiedliche Getränke hergestellt werden soll. Daraufhin erstellt der Computerfachmann für unterschiedliche Längsschnitte, basierend auf der Ausgangsfunktion f aus dem Aufgabenteil 1, die Funktionenschar f_k mit	Hier wird die Funktionenschar motiviert.

IQB-Poolaufgabe aus dem Jahr 2017 Erhöhtes Niveau	**Bearbeitete Aufgabenstellung**	**Kommentar**
1 a Ordnen Sie dem Likörglas und dem Cocktailglas jeweils den zugehörigen Graphen aus der Abbildung zu.	$f_k(x) = -\frac{3}{512}k \cdot x^4 + \frac{3}{32}k^2 \cdot x^2$ und $k \in \mathbb{R}^+$ *Hinweis: Die Funktionenschar entspricht aus produktionstechnischen Gründen nur ungefähr den Vorgaben des Designers. Aus Vereinfachungsgründen ist der tiefste Punkt des Glases nun der Koordinatenursprung.* 2.1. Der Computerfachmann hat den Längsschnitt von 5 Gläsern der Serie beispielhaft ausgedruckt.  *Abbildung 2* Dabei gehört die Funktion f_2 zum Likörglas der Serie, die Funktion f_3 zum Cocktailglas.	Die Aufgabenstellung ist im Wesentlichen gleichgeblieben. Nur sind die Bezeichnungen in die Aufgabenstellung übernommen worden und es werden Begründungen verlangt.

© 2025 T³ Deutschland

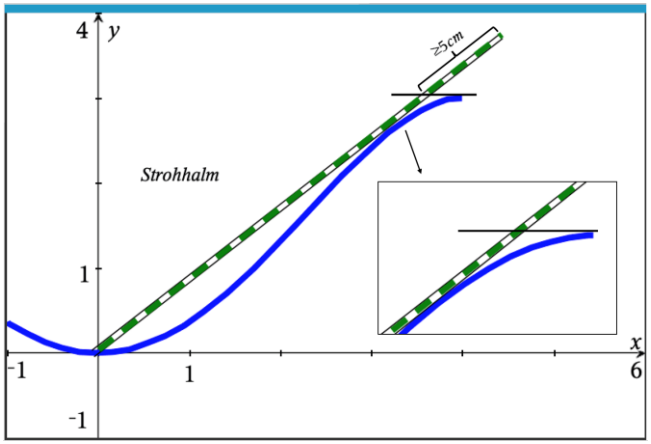
IQB-Poolaufgabe aus dem Jahr 2017 Erhöhtes Niveau	**Bearbeitete Aufgabenstellung**	**Kommentar**
1 b Bestimmen Sie für das Sektglas den zugehörigen Wert von k.	Ordnen Sie dem Likörglas und dem Cocktailglas jeweils den zugehörigen Graphen aus der Abbildung zu und begründen Sie Ihre Entscheidungen kurz. 2.2. Das Sektglas hat eine Höhe von 12 cm und am Rand einen Durchmesser von 6 cm. Bestimmen Sie für das Sektglas den zugehörigen Wert von k exakt. Die Produktionsmaschine kann nur Dezimalzahlen verarbeiten. Bestimmen Sie, auf wie viele Stellen nach dem Komma k mindestens angegeben werden muss, damit die Höhe von 12 cm mit einer Genauigkeit von einem Millimeter erreicht wird.	Die Angaben zum Sektglas werden in der Aufgabenstellung gemacht. Und es wird schon in der Aufgabenstellung geklärt, wie genau k angegeben werden soll. Damit wird dem Anwendungsbezug genüge getan.
1 c Begründen Sie, dass der Graph von f_k für jedes $k \in \mathbb{R}^+$ symmetrisch bezüglich der y-Achse ist.		Die Symmetrie ist schon im Aufgabenteil 1 abgefragt worden.

IQB-Poolaufgabe aus dem Jahr 2017 Erhöhtes Niveau	Bearbeitete Aufgabenstellung	Kommentar
1 d Bestimmen Sie Lage und Art der Extremstellen von f_k. *(zur Kontrolle: Eine Extremstelle ist $x = 2\sqrt{2k}$.)*	 *Abbildung 3* Zum Trinken sollte ein Glas der Serie keinen nach unten weisenden Abschluss (in der Abbildung 3 rotgestrichelt) haben. Es darf also nur zwischen den höchsten Punkten des Graphen einer Funktion rechts und links von der y-Achse geformt werden, damit benutzbare Gläser entstehen. 2.3. Um zu klären, für welche k benutzbare Gläser produziert werden können, sind u. a. die Maximalstellen der Funktionen f_k zu bestimmen. Bestimmen Sie rechnerisch die Maximalstellen von f_k.	Hier wird der Frage nach den Extremstellen, genauer den Maximalstellen, einen Sinn gegeben. Eine Zeichnung verdeutlicht den Zusammenhang mehr als viele erklärende Worte. Im Kontext sind nur die Maximalstellen interessant.

© 2025 T³ Deutschland

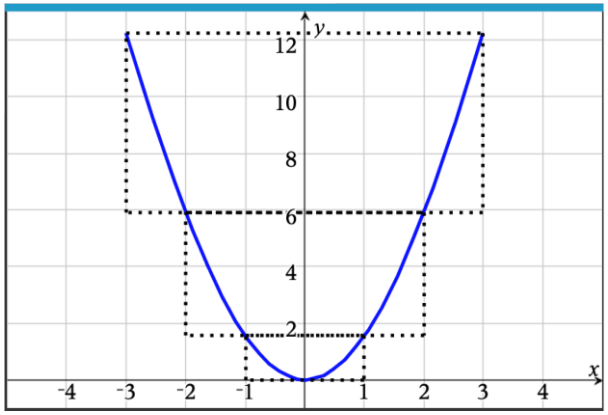
IQB-Poolaufgabe aus dem Jahr 2017 Erhöhtes Niveau	**Bearbeitete Aufgabenstellung**	**Kommentar**
1 e Weisen Sie für die Schar der Graphen von f_k nach, dass alle Extrempunkte mit positiver x-Koordinate auf dem Graphen einer Funktion mit der Gleichung $y = \frac{3}{4096}x^6$ liegen.		Die Ortslinie ist weggefallen, weil sie im Kontext wenig sinnvoll erscheint.
2. Betrachtet wird nun das Cocktailglas, dessen Längsschnitt für $-2\sqrt{6} \leq x \leq 2\sqrt{6}$ durch f_3 beschrieben wird. 2 a Um das Glas verläuft 2 cm unterhalb des Rands eine eingeschliffene Linie. Berechnen Sie deren Länge.	2.4. Aus Erfahrung weiß man, dass der Durchmesser am oberen Rand eines Glases nicht größer als 9,8 cm sein sollte. Im Folgenden wird ein Glas mit einem Durchmesser von 9,8 cm betrachtet. Bestimmen Sie k für ein derartiges Glas mit einer Genauigkeit von 3 Stellen nach dem Komma. Berechnen Sie die Höhe dieses Glases.	Neu und ersetzt die unmotivierte Kreisberechnung.
2 b Die Form eines Glases wird in einem Bereich als konvex bezeichnet, wenn der Graph, der den zugehörigen Längsschnitt darstellt, linksgekrümmt ist. Bestimmen Sie für den Bereich des Cocktailglases, in dem dieses konvex ist, die zugehörigen *x*-Koordinaten.		Dieser Aufgabenteil wurde weggelassen, da er im Kontext keinen Sinn ergibt.

© 2025 T³ Deutschland

IQB-Poolaufgabe aus dem Jahr 2017 Erhöhtes Niveau	**Bearbeitete Aufgabenstellung**	**Kommentar**
Im Glas steht ein 20 cm langer gerader Strohhalm, dessen Durchmesser vernachlässigt werden soll. Der untere Endpunkt des Strohhalms wird im Modell durch einen Punkt des Graphen von f_3 beschrieben, der Strohhalm hat mit seinem unteren Endpunkt also Kontakt zum Glas. 2 c Außerdem berührt der Strohhalm das Glas in dem Punkt, der im Modell durch $(4\|f_3(4))$ dargestellt wird. Ermitteln Sie die Länge desjenigen Abschnitts des Strohhalms, der zwischen dem Berührpunkt und seinem oberen Endpunkt liegt. 2 d Die Lage des Strohhalms wird nun so verändert, dass sein unterer Endpunkt im Modell durch $P(-1\|f_3(-1))$ dargestellt wird, der Punkt, in dem er das Glas berührt, durch $Q(u\|f_3(u))$ mit $u > 0$. Bestimmen Sie den Wert von u.	3. Aus dem Cocktailglas (f_3) soll mit einem geraden Strohhalm getrunken werden.  *Abbildung 4* Der Strohhalm (gestrichelt gezeichnet) setzt im tiefsten Punkt des Glases auf und berührt das Glas in einem weiteren Punkt. Der Strohhalm soll mindestens 5 cm aus dem Glas herausragen. Für den Kauf von Strohhalmen muss diese Eigenschaft erfüllt sein. Berechnen Sie die minimale Länge eines derartigen Strohhalms. *Hinweis: Für die Rechnung ist der Durchmesser des Strohhalmes vernachlässigbar.*	Die für einen Anwendungsbezug irrelevanten Fragestellungen werden durch eine realitätsnahe Fragestellung ersetzt: Wenn Strohhalme gekauft werden sollen, benötigt man Angaben zu deren Mindestlänge. Außerdem wird eine erklärende Zeichnung hinzugefügt, damit die Fragestellung, gerade in einer Prüfungssituation, klarer wird.

© 2025 T³ Deutschland

IQB-Poolaufgabe aus dem Jahr 2017 Erhöhtes Niveau	**Bearbeitete Aufgabenstellung**	**Kommentar**
3. Betrachtet wird nun das oben beschriebene Sektglas der Serie. Ein Hochpunkt des Graphen der zugehörigen Funktion hat die Koordinaten $x \approx 5{,}7$ und $y \approx 25{,}2$, ein Wendepunkt die Koordinaten $x \approx 3{,}3$ und $y \approx 14{,}0$. 3 a Das Sektglas unterscheidet sich hinsichtlich der Form wesentlich vom Cocktailglas. Beschreiben Sie im Sachzusammenhang unter Berücksichtigung der gegebenen Punkte des zum Sektglas gehörenden Graphen zwei wesentliche Unterschiede.		Dieser Aufgabenteil wurde weggelassen. Einerseits ist er so formuliert, dass viele Schülerinnen und Schüler gar nicht wussten, was sie machen sollten. Andererseits kommt die Idee des nächsten Abschnittes, die Sektglasfunktion durch eine vollständig konvexe Funktion zu ersetzen, nicht zum Tragen.
Das Sektglas wird so aufgestellt, dass seine Rotationsachse vertikal ist. Es wird mit Flüssigkeit gefüllt. Für $-3 \le x \le 3$ kann der Längsschnitt des Glases näherungsweise durch die Funktion p mit $p(x) = \frac{4}{3}x^2$ beschrieben werden. 3 b Zeigen Sie unter Verwendung der Näherung durch die Funktion p, dass sich der Radius der Oberfläche der Flüssigkeit in Abhängigkeit von der Füllhöhe h durch die Gleichung $r(h) = \frac{1}{2}\sqrt{3h}$ bestimmen lässt. 3 c Zeichnen Sie den Graphen der Funktion p sowie den Graphen der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion	*4.* Betrachtet wird nun das oben beschriebene Sektglas der Serie (Aufgabenteil 2.2). In diesem Aufgabenteil geht es um das Volumen des Sektglases. *Hinweise:* *1. Es gibt exakte mathematische Methoden zur Volumenberechnung. Diese Methoden gehören nicht zu den Bildungsstandards und können deshalb auch nicht hier abgefragt werden. Deshalb wird in dieser Prüfung ein Näherungsverfahren erarbeitet.* *2. Benutzen Sie das gerundete k aus dem Aufgabenteil 2.2. Sollten Sie dort kein Ergebnis erhalten haben, so benutzen Sie $k = 4{,}13$, das allerdings nicht mit dem richtigen Ergebnis übereinstimmt.*	In der Originalaufgabe wird die Volumenberechnung durch, für Schülerinnen und Schüler unmotivierte Umformungen, angeleitet. Der Grund ist, dass die nicht in den Bildungsstandards enthaltenen Umkehrfunktionen damit umgangen wird. Wir schlagen hingegen vor, ein Näherungsverfahren mit Hilfe von Zylindern durchzuführen. Das Näherungsverfahren wird in diesem Aufgaben-

IQB-Poolaufgabe aus dem Jahr 2017 Erhöhtes Niveau	Bearbeitete Aufgabenstellung	Kommentar
$r: h \mapsto r(h)$ jeweils in ein geeignetes Koordinatensystem ein. 3 d Ermitteln Sie unter Verwendung von r(h) das Volumen der Flüssigkeit bei einer Füllhöhe von 6 cm.	Gehen Sie davon aus, dass das Sektglas entsprechend der Abbildung 5 durch Zylinder angenähert wird.  *Abbildung 5* Je mehr Zylinder benutzt werden, d. h. je feiner die Unterteilung auf der x-Achse ist, umso besser wird das Gesamtvolumen der Zylinder dem des Sektglases entsprechen. 4.1 Berechnen Sie das Gesamtvolumen der 3 Zylinder.	teil kleinschrittig vorbereitet. Das ist der Prüfungssituation geschuldet. Dieses ist als leichte Einstiegsaufgabe gedacht. Sinnvoller wäre es, mit inneren und äußeren Zylin-

© 2025 T³ Deutschland

IQB-Poolaufgabe aus dem Jahr 2017 Erhöhtes Niveau	Bearbeitete Aufgabenstellung	Kommentar
	Es ist offensichtlich, dass das eben berechnete Gesamtzylindervolumen nur eine sehr grobe Annäherung an das Volumen des Sektglases darstellt. Das soll im Folgenden verbessert werden. 4.2 Geben Sie eine Formel an, mit der man das Gesamtzylindervolumen von n Zylindern bei gleichmäßigen Unterteilungen auf der x-Achse von dem Sektglasradius erhält. 4.3 Bestimmen Sie das minimale n, bei dem sich mit dem obigen Verfahren das berechnete Volumen um weniger als 0,01 ml vom Vorgänger unterscheidet und geben Sie das Volumen für dieses n an. 4.4 Bei einem Sektglas ist nicht das gesamte Volumen interessant, sondern viel mehr die Füllhöhe, bei der das Glas mit 0,1 l = 100 ml Sekt gefüllt ist, damit man einen sogenannten Eichstrich anbringen kann. Bestimmen Sie diese Höhe auf 0,1 cm genau. *Hinweis: Für eine hinreichende Genauigkeit reicht es aus, mit dem n aus dem vorherigen Aufgabenteil zu arbeiten. Sollten Sie keine Lösung erhalten haben, so können Sie mit $n = 140$ arbeiten, das allerdings nicht der richtigen Lösung des Aufgabenteils 4.3 entspricht.*	dern zu arbeiten und die Differenz der jeweiligen Volumina zu betrachten. Das würde aber eine Abituraufgabe sprengen. Es ist wesentlich anwendungsbezogener zu fragen, bis zu welcher Höhe ein bestimmtes Volumen eingefüllt ist, als zu fragen, wieviel Inhalt ist bei einer bestimmten Höhe eingefüllt.

IQB-Poolaufgabe aus dem Jahr 2017 Erhöhtes Niveau	**Bearbeitete Aufgabenstellung**	**Kommentar**
4. Der Längsschnitt des Likörglases soll für $0 \leq x \leq 4$ mithilfe zweier in $\mathbb{R}$ definierter quadratischer Funktionen p_1 und p_2 beschrieben werden, die folgende Eigenschaften besitzen: • Die Scheitelpunkte der Graphen von p_1 und p_2 sollen im Tiefpunkt bzw. im Hochpunkt des Graphen von f_2 liegen. • Die Graphen von p_1 und p_2 sollen ohne Knick ineinander übergehen. Der Punkt, in dem die beiden Graphen ineinander übergehen, hat die gleiche x-Koordinate wie der Wendepunkt des Graphen von f_2. Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen von p_1 und p_2.		Dieser Aufgabenteil wurde weggelassen, da er keinen erkennbaren Anwendungsbezug zu den Gläsern hat.
	Unabhängig vom Kontext der Aufgabe bietet die Funktionenschar f_k Anlass zu weiteren interessanten (innermathematischen) Fragestellungen.	Es spricht in unserer Meinung nach nichts gegen innermathematische Aufgaben. Hier wäre eine gute Möglichkeit, derartige Aufgabenteile einzufügen.

Diese Modifikation wurde im Wesentlichen von Helmut Springstein erstellt.

Aber ohne die Hilfe und den den Gedankenaustausch mit (in alphabetischer Reihenfolge) Andreas Busse, Heinz Rainer Geyer, Karl-Heinz Keunecke, Angelika Reiß und Joachim Terber wäre die Fertigstellung in dieser Art und Weise nicht möglich gewesen.

© 2025 T³ Deutschland

Schiff – eine Aufgabe aus dem Aufgabenpool 2017 zur Analysis auf erhöhtem Niveau

Dateiname: 2017_M_erhoeht_B_Analysis_CAS_1.pdf

Die Aufgabe war im Abiturjahrgang 2017 in mehreren Bundesländern z. T. in modifizierter Form gewählt worden.
Wir beziehen uns in dieser Überarbeitung auf die Aufgabenstellung aus dem IQB.

Die Lösung der überarbeiteten Aufgabe findet man ab Seite 44.

IQB-Poolaufgabe aus dem Jahr 2017 **Erhöhtes Niveau**	**Überarbeitete Aufgabenstellung**	**Kommentar**
Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a: x \mapsto = x^2 \cdot e^{-a \cdot x}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.	Für jede positive reelle Zahl a ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = x^2 \cdot e^{-a \cdot x}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.	
1 a) Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den der Punkt $U\left(1 \mid \frac{1}{2}\right)$ auf G_a liegt.		unverändert Das ist ein niederschwelliger Einstieg. Im Gegensatz übrigens zur Version aus Bayern, die gleich mit Asymptoten anfängt.
b) Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_a in Abhängigkeit von a. Begründen Sie, dass der Hochpunkt für jeden Wert von a im ersten Quadranten liegt, und beschreiben Sie, wie sich seine Lage mit dem Wert von a ändert.	b) Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_a mit Mitteln der Differentialrechnung in Abhängigkeit von a. *(Zur Kontrolle:* *Extremstellen von f_a: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{2}{a}$)* Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R}^+$ alle Extrem-	Mit dem Operator „*bestimmen*“, wird die Aufgabe bei Verwendung von CAS besonders einfach und erfordert keine Ableitung, daher die Erweiterung.

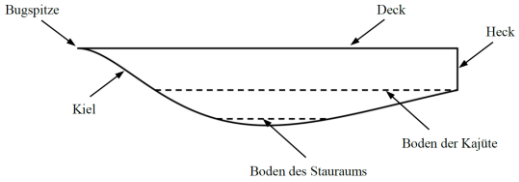
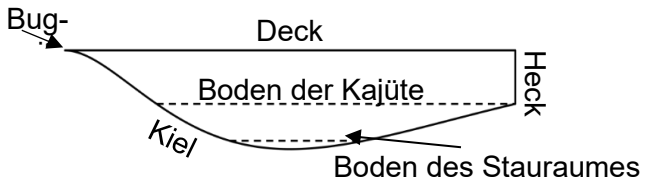
© 2025 T³ Deutschland

IQB-Poolaufgabe aus dem Jahr 2017 **Erhöhtes Niveau**	**Überarbeitete Aufgabenstellung**	**Kommentar**
c) *(Zur Kontrolle: Extremstellen von f_a: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{2}{a}$)*	punkte auf der der Parabel $y = e^{-2}x^2$ liegen. Begründen Sie, dass der Hochpunkt für jeden Wert von a im ersten Quadranten liegt.	Grundsätzlich sollten die Teilaufgaben nicht zu kleinschrittig sein
d) Zeigen Sie, dass die Extrempunkte von G_a für alle Werte von a auf dem Graphen einer Funktion mit der Gleichung $y = \frac{x^2}{e^2}$ liegen.		Wurde in Teil b) integriert.
	c) Zeigen Sie, dass für jedes $a > 0$ die Graphen aller Funktionen f_a nur einen Punkt gemeinsam haben.	Vorschlag einer zusätzlichen Aufgabe entsprechend der Aufgabenstellung aus Bayern. Bei dieser Aufgabenstellung ist es notwendig, das CAS-Ergebnis zu interpretieren.
	In den folgenden beiden Aufgabenteilen ist $a = \frac{1}{5}$.	Die Aufgabe ist ungünstig formatiert, für diesen und den nachfolgenden Aufgabenteil wird nur der Spezialfall $a = \frac{1}{5}$ betrachtet. Durch das Absetzen wird die Lesbarkeit erhöht.

© 2025 T³ Deutschland

IQB-Poolaufgabe aus dem Jahr 2017 **Erhöhtes Niveau**	**Überarbeitete Aufgabenstellung**	**Kommentar**
e) Für jeden Wert von b mit $b \in \mathbb{R}^+$ sind die Punkte $A(0\,|\,0)$ und $B(b\,|\,0)$ sowie der Punkt C gegeben, der die x-Koordinate b hat und auf dem Graphen $G_{0,2}$ liegt. Bestimmen Sie denjenigen Wert von b, für den der Flächeninhalt des Dreiecks ABC maximal ist, und geben Sie den zugehörigen Flächeninhalt an.	d) Für jede positive reelle Zahl b sind die Punkte $A(0\,|\,0)$ und $B(b\,|\,0)$ sowie der Punkt C gegeben, der die x-Koordinate b^2 hat und auf dem Graphen $G_{\frac{1}{5}}$ liegt, d. h. C hat die Form $C\left(b^2\,|\,f_{\frac{1}{5}}(b^2)\right)$. Bestimmen Sie denjenigen Wert von b, für den der Flächeninhalt des Dreiecks ABC maximal ist, und geben Sie den zugehörigen Flächeninhalt an.	Der Operator „*Bestimmen*“ erlaubt die Lösung der Aufgabe mit Hilfe der graphischen Möglichkeiten des CAS-Systems auf ein einfaches Zeichenproblem; zusätzlich ist das zu betrachtende Dreieck rechtwinklig. Mit der Änderung der x-Koordinate von C und des Operators wandelt sich die Aufgabe zu einer echten CAS-Aufgabe.
Der Graph G_a, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = p \text{ mit } p \in \mathbb{R}^+$ schließen ein Flächenstück ein. f) Berechnen Sie die Größe dieses Flächenstücks für $a = 0{,}2$. Zeigen Sie, dass der Inhalt des Flächenstücks auch für beliebig große Werte von p kleiner als 250 ist.	e) Der Graph $G_{\frac{1}{5}}$, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = p$ mit $p \in \mathbb{R} \text{ und } p > 0$ schließen ein Flächenstück ein. Ermitteln Sie die Größe dieses Flächenstücks in Abhängigkeit von p. Zeigen Sie, dass der Inhalt des Flächenstücks für alle Werte von p kleiner als 250 FE ist.	Der Text ist nur relevant für die Teilaufgabe und sollte daher in der Aufgabenstellung stehen. „*Ermitteln*“ passt besser, da mit einem CAS aus dem Hauptsatz der Integralrechnung unmittelbar das richtige Ergebnis folgt! (Es ist keine weitere Berechnung notwendig.)

© 2025 T³ Deutschland

IQB-Poolaufgabe aus dem Jahr 2017 **Erhöhtes Niveau**	**Überarbeitete Aufgabenstellung**	**Kommentar**
		Die ursprüngliche Formulierung richtet den Fokus zu sehr auf den Grenzwert.
2 Die Abbildung zeigt schematisch einen Längsschnitt eines Schiffs, dessen Deck horizontal liegt.  Bei Verwendung eines Koordinatensystems, dessen Ursprung an der Bugspitze liegt und dessen x-Achse entlang der Decklinie verläuft, beschreibt die in □ definierte Funktion $k: x \mapsto -0{,}3x^2 \cdot e^{-0{,}2}$ für $0 \le x \le 20$ modellhaft die abgebildete Kiellinie. Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Wirklichkeit.	2 Die Abbildung zeigt schematisch einen Längsschnitt eines 20 m langen Schiffs, dessen Deck horizontal liegt.  Bei Verwendung eines Koordinatensystems, dessen Ursprung an der Bugspitze liegt und dessen x-Achse entlang des Decks verläuft, beschreibt die Funktion k mit modellhaft den abgebildeten Kiel. Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Wirklichkeit.	Schon in der Aufgabenstellung wird der Definitionsbereich motiviert. Leider ist in NRW der Anwendungsbezug vollständig entfallen und die Aufgabe zusätzlich verkürzt worden. Den Modellierungsaspekt sollte man ernster nehmen. In Anwendungsaufgaben sollten bevorzugt Dezimalzahlen verwendet werden, da in der Realität nur mit begrenzter Genauigkeit gearbeitet wird. Wie auch in der Aufgabe aus dem IQB-Aufgabenpol. In Thüringen wurden Brüche verwendet. Wir empfehlen die einheitliche Verwendung von „Deck“ und „Kiel“ anstelle

© 2025 T³ Deutschland

IQB-Poolaufgabe aus dem Jahr 2017 Erhöhtes Niveau	**Überarbeitete Aufgabenstellung**	**Kommentar**
		der zusätzlichen Begriffe „Decklinie“ und „Kiellinie“.
a) Es gilt $k(x) = -0{,}3 \cdot f_{0,2}(x)$. Beschreiben Sie, wie der Graph von k aus dem Graphen von $f_{0,2}$ hervorgeht.		Gestrichen, da innermathematische Aufgaben im Anwendungskontext unpassend sind.
b) Berechnen Sie die Höhendifferenz in Metern zwischen dem tiefsten Punkt des Kiels und dem Endpunkt des Kiels am Heck.	a) Berechnen Sie die Höhendifferenz zwischen dem tiefsten Punkt des Kiels und dem Endpunkt des Kiels am Heck auf Zentimeter genau.	Für anwendungsbezogene Ergebnisse sollte eine realistische Genauigkeit verlangt werden.
c) Der Kiel hat in einem Punkt seinen größten Neigungswinkel gegen die Horizontale. Bestimmen Sie die Größe dieses Neigungswinkels.	b) Aus strömungstechnischen Gründen soll der Neigungswinkel des Kiels zur Horizontalen überall betragsmäßig kleiner 36° sein. Beurteilen Sie, ob das Modell diese Bedingung erfüllt!	Im Anwendungskontext sollten die Aufgaben durch praktische Fragestellungen motiviert sein. „*Berechnen*“ würde eine Betrachtung des zweiten Wendepunktes erfordern und bei „*Bestimmen*“ wäre eine rein grafische Lösung möglich.
d) Der horizontal liegende Boden der Kajüte liegt 2,20 m unterhalb des Decks. Berechnen Sie die	c) Der horizontal liegende Boden der Kajüte befindet sich 2,15 m unterhalb des Decks.	Mit dem geänderten Wert 2,15 m erfordert die Lö-

© 2025 T³ Deutschland

IQB-Poolaufgabe aus dem Jahr 2017 **Erhöhtes Niveau**	**Überarbeitete Aufgabenstellung**	**Kommentar**
Länge des Bodens in Metern in Längsrichtung des Schiffs.	Berechnen Sie die Länge des Bodens in Längsrichtung des Schiffs auf Dezimeter genau.	sung eine Auswahl des richtigen Ergebnisses und damit eine weitere mathematische Kompetenz.
e) Der Boden des Stauraums unterhalb der Kajüte hat in Längsrichtung des Schiffs eine Länge von 6 m. Ermitteln Sie rechnerisch in Metern, wie weit der Boden des Stauraums unterhalb des Bodens der Kajüte liegt.	d) Der Boden des Stauraums unterhalb der Kajüte hat in Längsrichtung des Schiffs eine Länge von 6 m. Ermitteln Sie rechnerisch auf Dezimeter genau, wie weit der Boden des Stauraums unterhalb des Bodens der Kajüte liegt.	Fast unverändert. Nur die Genauigkeit wurde angepasst.
Der Endpunkt des Kiels am Heck wird durch den Punkt E dargestellt, die Bugspitze durch den Punkt B. Der Punkt T(10 | k(10)) ist der Tiefpunkt, der Punkt $P\left(10-5\sqrt{2} \mid k(10-5\sqrt{2})\right)$ ein Wendepunkt des Graphen von k f) Verbindet man die Punkte B, P, T und E in dieser Reihenfolge durch Strecken, so liefert die Summe der Längen dieser Strecken einen Näherungswert für die Länge der Kiellinie. Ermitteln Sie diesen Näherungswert. *(zur Kontrolle: Näherungswert: 21,0)* g) Beschreiben Sie, wie man unter Verwendung von Streckenzügen zwischen Punkten auf dem	e) Der Punkt B stellt die Bugspitze, der Punkt E den Endpunkt des Kiels am Heck dar. Ein Näherungswert für die Länge des Kiel kann im Modell durch einen Streckenzug von B zu E über zwei weitere Punkte, die auf dem Graphen von k liegen, bestimmt werden. Formulieren Sie eine allgemeine Aussage zur Länge des Kiels im Vergleich zum Näherungswert, ohne diese zu bestimmen. Begründen Sie diese Aussage. Beschreiben Sie, wie man unter Verwendung von Streckenzügen zwischen benachbarten Punkten auf dem Graphen von k einen beliebig genauen Wert für die Länge des Kiels erhalten kann.	Verwende „Kiel“ statt „Kiellinie“. Die reine Rechenaufgabe wurde weggelassen.

© 2025 T³ Deutschland

IQB-Poolaufgabe aus dem Jahr 2017 **Erhöhtes Niveau**	**Überarbeitete Aufgabenstellung**	**Kommentar**
Graphen von k einen beliebig genauen Wert für die Länge der Kiellinie erhalten kann. h) Ist ein Kurvenstück Graph einer in $[a;b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ definierten Funktion h mit erster Ableitungsfunktion h', so gilt für die Länge s dieses Kurvenstücks: $s = \int_a^b \sqrt{1+(h'(x))^2}\,dx$ Berechnen Sie damit die Länge der Kiellinie im Modell. Formulieren Sie eine allgemeine Aussage zur Länge der Kiellinie im Vergleich zur Länge der in Teilaufgabe g verwendeten Streckenzüge. Begründen Sie diese Aussage.	f) Ist ein Kurvenstück Graph einer in $[a;b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ definierten Funktion h mit erster Ableitungsfunktion h', so gilt für die Länge s dieses Kurvenstücks: $s = \int_a^b \sqrt{1+(h'(x))^2}\,dx$ Berechnen Sie damit die Länge des Kiels auf Dezimeter genau.	

Die Aufgabe wurde im Wesentlichen von Sibylle Stachniss-Carp und Oliver Wagener bearbeitet

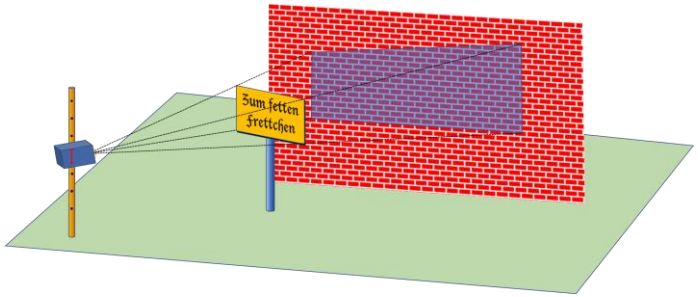
© 2025 T³ Deutschland

Plakat – eine Aufgabe aus dem Aufgabenpool 2018 zur Analytischen Geometrie auf grundlegendem Niveau

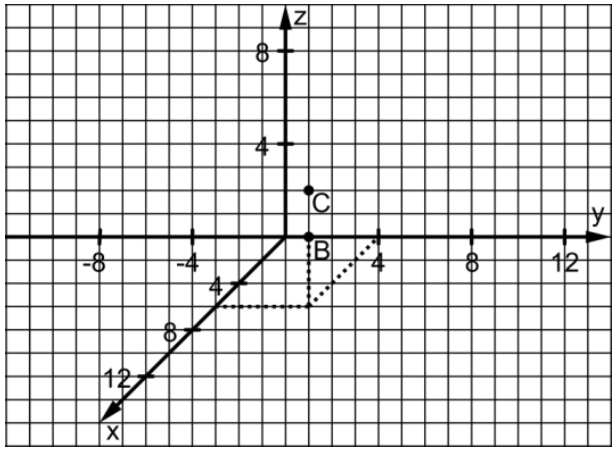
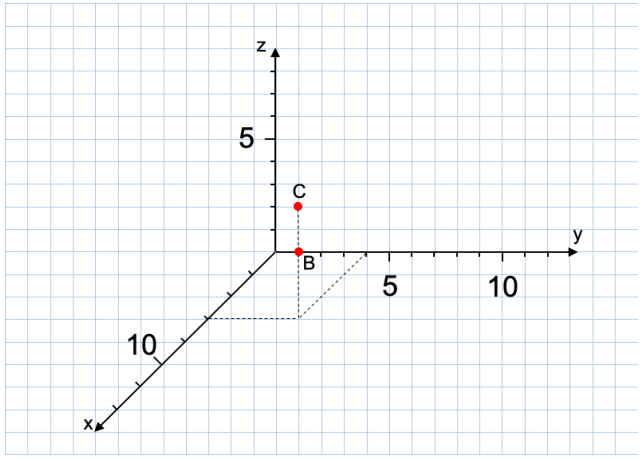
Dateiname: 2018_M_grundlegend_B_AGLA(A2)_CAS_2

Anhand von dieser Aufgabe möchten wir darstellen, wie man schon mit einfachen Mitteln Aufgabenstellungen präzisieren und so für Schülerinnen und Schüler besser verstehbar macht.

Die Idee zu dieser Modifikation haben wir von Kommission Zentralabitur Niedersachsen übernommen, die die Aufgabe aus dem Aufgabenpool ergänzt und kommentiert hat. Wir sind noch einmal neu an die Bearbeitung herangegangen. Da gute Ideen kaum verbesserbar sind, sind wir teilweise auf ähnliche Verbesserungen gekommen.

IQB Aufgabenpool 2018 **grundlegendes Niveau**	**veränderte Aufgabenstellung**	**Kommentar**
Vor einer Hauswand ist ein rechteckiges Reklameschild angebracht, das durch einen Scheinwerfer beleuchtet wird. Der Scheinwerfer lässt sich in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft durch den Punkt $L(12\mid -4\mid 3)$ beschreiben. Die Eckpunkte des Schilds werden durch die Punkte $A(4\mid 0\mid 3)$, $B(6\mid 4\mid 3)$, $C(6\mid 4\mid 5)$ und $D(4\mid 0\mid 5)$ dargestellt. Die xy-Ebene beschreibt den horizontalen Untergrund, auf dem das Haus steht, die yz-Ebene die Ebene, in der die Hauswand liegt. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.	 Vor einer Hauswand ist ein rechteckiges Reklameschild aufgestellt, das durch einen Scheinwerfer beleuchtet wird. Die Situation lässt sich in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft beschreiben: Die xy-Ebene beschreibt den horizontalen Untergrund, auf dem das Haus steht, die yz Ebene die Ebene, in der die Hauswand liegt. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.	Das Reklameschild und Hauswand sind nicht parallel zueinander. Das ist für Schülerinnen und Schüler nicht so einfach ersichtlich. Dieser Sachverhalt ergibt sich nur indirekt aus der Beschreibung der Lage der Hauswand und der Angabe der Punktkoordinaten. Deshalb wird ein Bild ergänzt, sodass die Situation auf den ersten Blick deutlich wird. Das Koordinatensystem wird vor der eigentlichen

© 2025 T³ Deutschland

IQB Aufgabenpool 2018 grundlegendes Niveau	**veränderte Aufgabenstellung**	**Kommentar**
	Der Scheinwerfer lässt sich nun durch den Punkt $L(12\,|\,-4\,|\,3)$ darstellen. Die Eckpunkte des Schilds werden durch die Punkte $A(4\,|\,0\,|\,3)$, $B(6\,|\,4\,|\,3)$, $C(6\,|\,4\,|\,5)$ und $D(4\,|\,0\,|\,5)$ dargestellt.	Angabe der Punkte eingefügt.
a Zeichnen Sie das Rechteck ABCD sowie den Punkt L in die Abbildung ein. 	a Zeichnen Sie das Rechteck ABCD sowie den Punkt L in die Abbildung ein. 	Die Zeichnung wurde übersichtlicher gestaltet.
Auf der Hauswand ist der Schatten des Schilds sichtbar. Der Punkt $A'(0\,|\,2\,|\,3)$ stellt den zu A gehörenden Eckpunkt des Schattens dar, die Punkte $C'(0\,|\,12\,|\,7)$ und $D'(0\,|\,2\,|\,6)$ die zu C bzw. D gehörenden Eckpunkte.		Kein Änderungsvorschlag.

b Weisen Sie nach, dass der vierte Eckpunkt des Schattens durch $B'(0\,|\,12\,|\,3)$ dargestellt wird.		Kein Änderungsvorschlag.
c Ergänzen Sie das zum Schatten gehörende Viereck in Ihrer Zeichnung zu Teilaufgabe a und begründen Sie, dass die untere Kante des Schattens horizontal verläuft.	c I Ergänzen Sie das zum Schatten gehörende Viereck in Ihrer Zeichnung zu Teilaufgabe a. II Begründen Sie, dass die untere Kante des Schattens horizontal verläuft.	Durch die klare Trennung der beiden Arbeitsaufträge wird das Verstehen der Aufgabenstellung für Schülerinnen und Schüler auf grundlegendem Niveau erleichtert.
d Berechnen Sie den Flächeninhalt des Schattens.	d I Geben Sie an, um welche geometrische Figur es sich bei dem Schatten handelt und begründen Sie Ihre Entscheidung. II Berechnen Sie den Flächeninhalt des Schattens.	Aufgrund der Länge der Aufgabe sollte auf diesen Aufgabenteil verzichtet werden. Wird er benutzt sollte man ihn teilen, um für Schülerinnen und Schüler auf grundlegendem Niveau das Verstehen der Aufgabenstellung zu erleichtern.
e Berechnen Sie die Größe des größten Innenwinkels des Schattens.	e I Entscheiden Sie, welcher Innenwinkel des Schattens der größte ist. II Berechnen Sie die Größe dieses Winkels.	Der Auftrag wurde um die Bestimmung des größten Winkels ergänzt. Eine Angabe sollte eine Selbstverständlichkeit sein.
Der Scheinwerfer kann entlang einer vertikal verlaufenden Stange in der Höhe verschoben werden; dabei liegt der Schatten des Schilds stets vollständig auf der Hauswand. Für jede der beiden Kanten des Schattens,	Der Scheinwerfer ist an einer vertikal (d. h. senkrecht zur Erdoberfläche) verlaufenden Stange befestigt und kann in der Höhe verschoben werden. In dieser Aufgabe werden nur die Verschiebungen des Scheinwer-	Die Aufgabe wird so umformiert, dass deutlicher wird, was zur Einleitung (Voraussetzung) und was

© 2025 T³ Deutschland

die durch die linke und rechte Kante des Schilds erzeugt werden, gelten folgende Aussagen: I *Die Kante verläuft für alle Positionen des Scheinwerfers entlang derselben vertikalen Gerade.* II *Die Länge der Kante bleibt bei Verschiebung des Scheinwerfers unverändert.*	fers betrachtet, bei denen der Schatten des Schilds stets vollständig auf der Hauswand liegt. Ohne weitere Begründung können Sie davon ausgehen, dass für jeden der beiden Ränder des Schattens, die durch die linke und rechte Kante des Schilds erzeugt werden, gilt: Der Rand verläuft für alle Positionen des Scheinwerfers entlang derselben vertikalen Gerade.	zur eigentlichen Aufgabenstellung gehört. Außerdem wird der Begriff vertikal erläutert, damit das auch für alle Schülerinnen und Schüler verständlich wird.
f Weisen Sie die Gültigkeit der Aussage II für eine der beiden betrachteten Kanten des Schattens rechnerisch nach.	f Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussage für den linken oder den rechten Rand des Schattens (rechnerisch) nach: Die Länge des Randes bleibt bei Verschiebung des Scheinwerfers unverändert.	Die Benutzung von links und rechts verdeutlicht besser, welcher Rand gemeint ist.
g Begründen Sie, dass sich der Flächeninhalt des Schattens bei Verschiebung des Scheinwerfers nicht verändert.	g Verschiebt man den Scheinwerfer entlang der vertikalen Stange, so verändert sich der Schatten. Begründen Sie ohne Rechnung, dass sich der Flächeninhalt des Schattens dabei nicht verändert.	Der Arbeitsauftrag wird durch Aufteilung in 2 Sätze (Handlung, Fragestellung) deutlicher.

Schwimmbad - Eine Aufgabe aus dem Aufgabenpool 2019 zur Stochastik auf erhöhtem Niveau

Dateiname: 2019_M_erhoeht_B_12.pdf

In den Stochastikaufgaben sind aus unserer Sicht eine Reihe von problematischen Modellierungen zu finden. Exemplarisch möchten wir das an der Schwimmbadaufgabe darstellen. Es gelang uns nicht, hier den Sachzusammenhang sinnvoll mit dem mathematischen Inhalt zu verbinden.

Auszug aus der Aufgabe:

1 *Für ein Schwimmbad besitzen 2000 Personen eine Jahreskarte. Für einen bestimmten Tag beschreibt die Zufallsgröße X die Anzahl der Jahreskartenbesitzer, die das Schwimmbad besuchen. Vereinfachend soll davon ausgegangen werden, dass X binomialverteilt ist. Dabei beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Jahreskartenbesitzer an diesem Tag das Schwimmbad besucht, 10 %.*

   a …

   b Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit da-für, dass mehr als 210 Jahreskartenbesitzer das Schwimmbad besuchen

….

Soweit der Auszug aus der Poolaufgabe

Die Schülerinnen und Schüler müssen sich mit den Jahreskartenbesitzern eines Schwimmbades befassen. Es wird keine Sachmotivation geliefert, warum sich die Aufgabe auf die Jahreskartenbesitzer konzentriert.

Aus der Sicht der Aufgabensteller mag die Beschränkung auf eine definierte Grundgesamtheit vielleicht sinnvoll sein, da hier mit einer Binomialverteilung modelliert werden soll. Allerdings ist dieser Ansatz mit dem Kontext nicht sinnvoll vereinbar.
Es kann sich hier nicht um eine Binomialverteilung handeln, da die Voraussetzungen für einen Bernoulli-Prozess nicht gegeben sind. Besucher beeinflussen sich untereinander, ob sie das Schwimmbad besuchen oder nicht und jeder Besucher hat eine andere Motivation (also eine andere Wahrscheinlichkeit p) schwimmen zu gehen.

Der Sachzusammenhang wird lediglich behauptet, er beeinflusst die zugrundeliegende Mathematik an keiner Stelle. Die Aufgabe ließe sich ohne Verlust mathematisch so formulieren:
$P_{0,1}^{2000}(X > 210) = ?$

In Nordrhein-Westfalen wurde die Aufgabe noch um einige Aufgabenteile ergänzt. Aus Copyrightgründen können wir hier nicht den vollständigen Text angeben.

Es geht in der Aufgabe um einen Betreiber eines Kioskes, der davon ausgeht, dass jeder Gast nur Waren im Wert von 4€ oder 12€ an seinem Kiosk erwirbt. Oder gar nichts erwirbt. Die Wahrscheinlichkeiten dafür sind angegeben.

a In diesem Aufgabenteil soll die Höhe der Einnahmen bestimmt werden, mit der der Besitzer des Kioskes bei 660 Besuchern des Schwimmbades rechnen kann.

b Es soll in diesem Aufgabenteil die Wahrscheinlichkeit dafür ermittelt werden, „dass der Besitzer des Kiosks an dem betrachteten Tag erwartete Einnahmen von den Jahreskartenbesitzern hat, die mindestens 1000 Euro betragen.“

Es sollen also die erwarteten Einnahmen eines Kioskbetreibers bestimmt werden. Im ersten Aufgabenteil werden die Einnahmen durch alle Schwimmbadbesucher und im zweiten Teil nur durch die Besitzer einer Dauerkarte betrachtet. Während der Teil a noch inhaltlich zu motivie-

 © 2025 T³ Deutschland

ren ist (hier ist „lediglich“ die Aufgabenstellung verwirrend, da sonst an keiner Stelle von der Gesamtheit der Besucher gesprochen wird) ist der zweite Teil durch die in der Aufgabe vorgegebenen 1000€ völlig absurd. Warum 1000 €? Und warum werden die über 1000 € liegenden Einnahmen nicht betrachtet? Hinzu kommt die völlig unrealistische „Vereinfachung“, dass die Dauerkartenbesitzer entweder genau null, genau vier oder genau 12 Euro ausgeben. Die Berechnung eines Erwartungswerts in Abhängigkeit von den binomialverteilten Dauerkartenbesitzern ist mathematisch scheinbar nicht anspruchsvoll, aber in dieser Form realitätsfern.

Die Schüler lernen aus dieser Aufgabe, dass der inhaltliche Aspekt nicht relevant ist und sie lediglich auf bestimmte „Triggerangaben“ (Erwartungswert, binomialverteilt, N=2000 usw.) achten müssen, um die erwarteten Lösungen zu liefern. Eine derart absurde Aufgabe in den Abschlussprüfungen zu stellen ist aus unserer Sicht kontraproduktiv: Die Schülerinnen und Schüler beklagen häufig die Realitätsferne der Aufgaben – im Fall der Untersuchung von Polynomen sicherlich zu Recht – aber gerade bei Aufgaben aus dem Gebiet der Statistik lassen sich leicht realistische und relevante Aufgaben stellen.

Tatsächlich, und das ist noch das i-Tüpfelchen, ist die Lösung überhaupt nicht trivial.

Prof. i. R. Dr. Franz-Reinhold Diepenbrock von der Bergischen Universität Wuppertal schreibt dazu:

„Der genaue Blick auf einen Aufgabenteil einer im NRW-Mathematikabitur des Jahres 2019 gestellten Aufgabe zeigt, dass die Aufgabensteller fahrlässig und zu grob mit der Stochastik umgegangen waren und deshalb irrtümlich ihre Aufgabenstellung für in der Weise lösbar hielten, wie sie es in ihrer „Modelllösung“ zeigen. Bei genauer Betrachtung wird aber klar, dass ohne eine zusätzliche, nicht im Aufgabentext vorkommende Bedingung die Vorgehensweise der Modell-“Lösung“ nicht korrekt ist. Schlimmer noch: Bei Hinzufügung der Zusatzvoraussetzung ist eine wirklich korrekte Lösung zwar möglich, aber so aufwendig und weitab von jeglicher Schulstochastik, dass man den Aufgabenteil aus diesem Grund – auch wenn er bezüglich der Voraussetzungen vollständig wäre – leider nur als ungeeignet für Stochastik in der Schule und erst recht als ungeeignet für eine Stochastik-Abituraufgabe bezeichnen muss.“[8]

Detaillierte Ausführungen kann auf der unten angegebenen Internetseite nachlesen.

[8] Siehe auch
http://www.franzreinholddiepenbrock.de/zur_nrw_abi_aufg_schwimmbad_b_2.html
Zuletzt überprüft: 18. April 2020

Aufgaben mit Lösungen

Lösungsdokumentation bei Aufgaben des gemeinsamen Aufgabenpools der Länder

In einem bisher nur als Entwurf bestehenden Positionspapier von T³ heißt es dazu:

Für die Durchführung der Abiturprüfung entwickelt das Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) im Auftrag der Kultusministerkonferenz (KMK) Aufgaben für die gemeinsamen Aufgabenpools der Länder. Dabei sind die Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife (BS) zu berücksichtigen und konkret auszuprägen.

Inzwischen liegen vielfältige Erfahrungen mit diesen Aufgaben und den zugehörigen Lösungsdokumentationen vor. Diese geben Anlass zu dieser Stellungnahme.

Aufgaben, zu deren Lösung neben prozeduralem Wissen auch konzeptuelles Wissen verwendet werden soll, erfordern ein verständiges Durchdringen und Erfassen grundlegender mathematischer Begriffe und Verfahren. Damit korrespondieren die entsprechenden Lösungsdokumentationen.

Im Vortext zum Erwartungshorizont der Aufgaben des gemeinsamen Aufgabenpools der Länder steht zwar: „Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt."

Der in den Bildungsstandards formulierte Anspruch wird mit den vorgelegten Lösungsdokumentationen jedoch nicht erfüllt.

In den Bildungsstandards wird ausgeführt: „Für die Beurteilung der Prüfungsleistungen sind sowohl die rein formale Lösung als auch das zum Ausdruck gebrachte mathematische Verständnis maßgebend. Daher sind erläuternde, kommentierende und begründende Texte unverzichtbare Bestandteile der Prüfungsleistung. Dies gilt auch für die Dokumentation des Einsatzes elektronischer Werkzeuge. Mangelhafte Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen oder unzureichende oder falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text sind als fachliche Fehler zu werten. (Bildungsstandards, S. 24)

Bei der Darstellung eines Lösungsweges sind somit die mathematischen Zusammenhänge unter Verwendung der Fach- und Symbolsprache angemessen zu dokumentieren.

Unabhängig von der eingesetzten Technologie gilt für die Lösung aller Aufgaben des Prüfungsteiles B der Aufgaben des gemeinsamen Aufgabenpools der Länder, dass die Dokumentation des mathematischen Ansatzes und der grundsätzlichen Vorgehensweise eine besondere Bedeutung hat.

Die Schülerinnen und Schüler müssen gegebenenfalls einen Sachkontext zunächst mathematisieren bzw. den Sachverhalt identifizieren. Nach Darstellung der zur Lösung notwendigen mathematischen Idee kann dann unter Rechnereinsatz ein Ergebnis ermittelt werden. Dieses Ergebnis ist zu formulieren und sollte auf den Sachkontext rückbezogen werden.

Mit einer solchen Dokumentation des Lösungsweges als zu erbringender Leistung verbunden ist eine entsprechend angemessen lange Bearbeitungszeit. Damit einher muss die Vergabe einer analog angemessen großen Anzahl an Bewertungseinheiten je Arbeitsauftrag gehen.

Die vorgelegten Aufgaben des gemeinsamen Aufgabenpools der Länder und vor allem die dargestellten Erwartungshorizonte werden diesen Kategorien jedoch nicht gerecht.

Mit der Dokumentation des Lösungsweges verbunden ist eine entsprechend angemessen lange Bearbeitungszeit. Damit einher geht die Vergabe einer analog angemessen großen Anzahl an Bewertungseinheiten je Arbeitsauftrag. Diese ist aufgrund der geringen Anzahl an Bewertungseinheiten bei den Erwartungshorizonten der Aufgaben des gemeinsamen Aufgabenpools der Länder jedoch nicht gegeben. Eine entsprechende Änderung der bisherigen Praxis

© 2025 T³ Deutschland

ist angezeigt, damit den o.g. Ausführungen der Bildungsstandards entsprochen werden kann. Soweit die allgemeinen Ausführungen.

Speziell für Aufgaben mit dem CAS als Hilfsmittel muss ergänzt werden:

- Die zugrundeliegende Mathematik ist unabhängig von dem Computer Algebra System. Deshalb sollten Lösungsdokumentationen keine Rechnerbefehle enthalten.
- Ebenfalls nicht notwendig sind das Aufschreiben von expliziten Funktionstermen oder explizite Angeben von Vektorelementen, wenn es für die Aufgabe keinen (Mehr-) Wert hat.
  Als Korrekturhilfe können sie aber nach Absprache mit den Schülerinnen und Schüler eingefügt werden. Im Idealfall erhalten die Lehrkräfte im Anschluss an eine Klausur die Arbeitsdatei der Schülerinnen und Schüler. Das wäre für die Fehlerfindung hilfreich denn Schreibfehler könnten so von mathematischen Fehlern unterschieden werden.
  Das ist leider technisch nur in den wenigsten Fällen möglich.
  Terme sind z. B. dann wichtig, wenn das CAS keine exakte Lösung liefert und auf numerische Lösungen zurückgegriffen werden muss.
  Der Nachweis, dass Schülerinnen und Schüler Funktionsterme explizit bestimmen und damit umgehen können, erfolgt im hilfsmittelfreien Teil.
- Inwieweit in der Lösung, die die Prüflinge abgeben, die Syntax des Rechners verwendet werden kann, ist strittig. Wir plädieren für eine mathematische Schreibweise, Rechnerbildschirme sind nur als Hinweis für die Korrektur gedacht.
- Entsprechend den Vorschlägen von Günther Malle[9] unterscheiden wir nicht notwendig zwischen Vektoren und den dazugehörenden Punkten bzw. Pfeilen, also auch nicht in der Schreibweise.

[9] GÜNTHER MALLE A Neue Wege in der Vektorgeometrie A in: „mathematik lehren“ 133 (Dezember 2005), S. 8ff A Friedrich Verlag, Velber

Bei der Dokumentation von CAS-Bearbeitungs- und Lösungswegen empfehlen wir folgendes Vorgehen nach der MaTTI-Methode:

Die MaTTI-Methode [10]

- **Ma Angabe der mathematischen Idee, des Lösungsansatzes**
- **T TR /CAS: Angabe des Bearbeitungswegs**
- **T TR /CAS: Angabe des Ergebnisses**
- **I Interpretation im Sachzusammenhang / Antwortsatz**

Beispiel 1 (in einem innermathematischer Kontext):

Bestimme die Monotonieintervalle der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x+1$.

Mathematische Idee:

Es werden die lokalen Extremstellen von f als Grenzen der Monotonieintervalle bestimmt. Das sind die x-Koordinaten von Hoch- bzw. Tiefpunkten.

oder: Es werden die x-Intervalle bestimmt, in denen $f'(x)>0$ bzw. $f'(x)<0$ ist.

TR / CAS-Bearbeitungsweg (Bestimmung über den Graphen oder Bilden der Ableitung und Lösen der Ungleichung ist möglich):

Mit dem CAS wird der Graph gezeichnet. Man erkennt einen Hoch- und einen Tiefpunkt, deren Koordinaten mit Hilfe des Befehls „Graph analysieren“ bestimmt werden.

oder: Mit dem CAS werden die Ableitung von f gebildet und die Ungleichungen $f'(x)>0$ bzw. $f'(x)<0$ gelöst.

TR / CAS-Ergebnis:

Das CAS liefert mit „Graph analysieren“ $x_H=-1{,}41$ und $x_T=1{,}41$.

oder: Das CAS liefert die Lösungen $x_H=-\sqrt{2}$ und $x_T=\sqrt{2}$.

Interpretation im Sachzusammenhang / Antwortsatz:

Die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x+1$ ist streng monoton wachsend in $]-\infty;-1{,}41]$ und in $[1{,}41;\infty[$ bzw. $]-\infty;-\sqrt{2}]$ und in $[\sqrt{2};\infty[$.

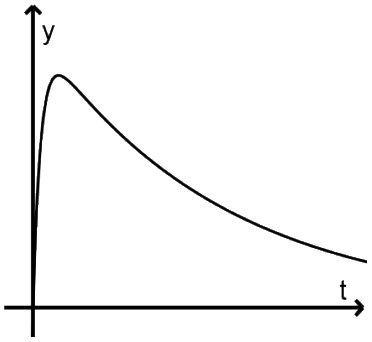
Sie ist streng mononton fallend in $[-1{,}41;1{,}41]$ bzw. in $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$.

Beispiel 2 (Im Sachkontext):
(In Anlehnung an einer Aufgabe aus dem Aufgabenpool 2019_M_erhoeht_B_Analysis_CAS_1. Die Abbildung ist dieser Datei entnommen.)

[10] Die Idee der MaTTi-Methode stammt von Stefan Burghardt. Wir danken ihm für die Erlaubnis, die MATTI-Methode hier übernehmen zu dürfen.

 © 2025 T³ Deutschland

Eine Person, in deren Körper kein Koffein enthalten ist, trinkt ein koffeinhaltiges Getränk. Berücksichtigt man nun sowohl den Aufnahmevorgang als auch den Abbauvorgang, so wird die zeitliche Entwicklung der Koffeinkonzentration im Blut mithilfe der in definierten Funktion $h: t \mapsto 0{,}010 \cdot e^{-0{,}003t} \cdot (1 - e^{-0{,}07t})$ beschrieben.



Dabei ist h(t) die Koffeinkonzentration in $\frac{mg}{ml}$ und t die Zeit in Minuten, die seit dem Einsetzen des Aufnahmevorgangs vergangen ist. Die Abbildung zeigt den Graphen von h.

Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die höchste Koffeinkonzentration erreicht wird, und geben Sie diese Konzentration an.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Koffeinkonzentration am stärksten abnimmt.

Mathematische Idee:

Es werden die Koordinaten des Hochpunkts und die x-Koordinate des Wendepunktes bestimmt.

evtl.: Es werden dazu die Nullstellen der 1. und 2. Ableitung bestimmt.

TR / CAS-Bearbeitungsweg (Bestimmung über den Graphen oder Berechnen der Nullstellen der Ableitungen ist möglich):

Mit dem CAS wird der Graph gezeichnet. Die Koordinaten des Hochpunktes und des Wendepunktes werden mit Hilfe des Befehls „Graph analysieren“ bestimmt. Man erhält als ungefähren Hochpunkt $H(46 \mid 0{,}0084)$ und den ungefähren Wendepunkt $W(91 \mid 0{,}008)$.

Alternative Lösung mit Mitteln der Differentialrechrechnung:

Ma Angabe der mathematischen Idee, des Lösungsansatzes	Die höchste Konzentration wird durch die Berechnung des Maximums von h bestimmt. Notwendig dafür ist, dass $h'(x_E) = 0$ gilt.
T TR /CAS: Angabe des Bearbeitungswegs	Das CAS löst die Gleichung zu:
T TR /CAS: Angabe des Ergebnisses	$x_E = \frac{100 \cdot \ln\left(\frac{73}{3}\right)}{7} \approx 45{,}5978$. Aus $h''(x_E) \approx -0{,}000002$ folgt, dass es sich um eine Maximalstelle handelt mit $h(x_E) \approx 0{,}008363$.
Ma Angabe der mathematischen Idee, des Lösungsansatzes	Den Zeitpunkt der stärksten Abnahme erhält man über den Wendepunkt der Funktion h, der über die Lösungen der Gleichung $h''(x) = 0$ bestimmt wird.
Ma Angabe der mathematischen Idee, des Lösungsansatzes	Das CAS bestimmt die Lösung der Gleichung zu

T TR /CAS: Angabe des Ergebnisses	$x_w = \frac{200 \cdot \ln\left(\frac{73}{3}\right)}{7} \approx 91{,}1956$. Aus $h'''(x_W) \approx 4{,}79 \cdot 10^{-9} > 0$ folgt, dass es sich um eine Minimumstelle handelt. Da h' wegen $h'(x_w) \approx -0{,}000022$ in einer Umgebung von x_w negativ ist, d. h. die Steigung ist negativ, nimmt dort die Konzentration ab.
I Interpretation im Sachzusammenhang / Antwortsatz	Die Koffeinkonzentration ist etwa nach ca. 46 Minuten mit ca. $0{,}0084 \frac{mg}{ml}$ am höchsten und nimmt etwa 91 Minuten nach Beobachtungsbeginn am stärksten ab.

© 2025 T³ Deutschland

Hinweis: Wir sind bei der Erstellung der Aufgaben nicht davon ausgegangen, dass wir fertige Abituraufgaben stellen. Sondern wir wollen vielmehr aufzeigen, wie in dem gegebenen Kontext sinnvolle Aufgaben erstellt werden können. Deshalb fehlen hier Bewertungspunkte und Anforderungsbereiche.

Gläser – modifizierte Aufgabe mit Lösungen

Ein Designer hat ein Glas entworfen. Die Abbildung 1 zeigt den in ein Koordinatensystem projizierten Längsschnitt des Entwurfs. Eine Längeneinheit entspricht 1 cm in der Wirklichkeit.

In dieser Aufgabe wird die Materialstärke der Gläser vernachlässigt.

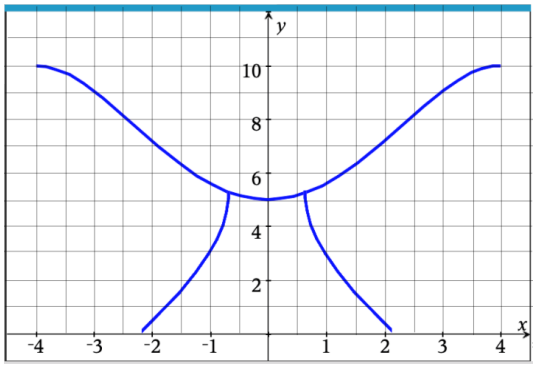


Abbildung 1

1. Der Längsschnitt des Glases (ohne den Stiel) soll für die industrielle Herstellung durch eine Funktion beschrieben werden.
   Der Computerexperte, der die Designvorgaben in eine mathematische Funktion übersetzen soll, geht In einem ersten Ansatz von einer ganzrationalen Funktion aus, die die Rotationssymmetrie des Glases berücksichtigt.

   1.1. Begründen Sie, dass der minimale Grad einer derartigen Funktion 4 betragen muss.

   1.2. Geben Sie eine allgemeine Funktionsgleichung für eine ganzrationale Funktion vierten Grades an, die die symmetrische Randkurve beschreiben könnte und begründen Sie Ihr Ergebnis.
   Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion, deren Graph mit dem Verlauf der Randkurve des Glases der Abbildung 1 übereinstimmt.

Lösungen:

1.1. Im gezeichneten Ausschnitt sind bei x = 0 ein Minimum und bei x= -4 und bei x =4 jeweils eine mögliche Extremstelle, da eine waagerechte Tangente vorliegt.
Es gibt also mindestens 3 Stellen, an denen die erste Ableitung gleich Null ist. Das ist nur für ganz rationale Funktionen vom minimalen Grad 4 der Fall.

1.2. $f(x)=a_4x^4+a_2x^2+a_0$
Der Längsschnitt eines rotationssymmetrischen Glases ist der Graph einer achsensymmetrischen Funktion.
Achsensymmetrische ganzrationale Funktionen haben nur gerade Potenzen.

Aus der Zeichnung liest man z. B. ab:
$f(0)=5,\ f(4)=10$ *und* $f'(4)=0$
Hinweis: Andere sinnvolle Ablesungen sind möglich.
Das Gleichungssystem mit dem obigen Ansatz wird mit dem CAS gelöst und man erhält als Funktionsgleichung $f(x)=-\frac{5}{256}x^4+\frac{5}{8}x^2+5\approx -0{,}020x^4+0{,}625x^2+5$.
Hinweis: Ablesungen im Koordinatensystem sind nicht notwendig genau. Durch an-

dere sinnvolle Ablesungen können andere Funktionsgleichungen herauskommen. Diese sind bei der Korrektur als richtig zu bewerten.

2. Das Glas verkauft sich so gut, dass eine Glasserie für unterschiedliche Getränke hergestellt werden soll.
Daraufhin erstellt der Computerfachmann für unterschiedliche Längsschnitte, basierend auf der Ausgangsfunktion f aus dem Aufgabenteil 1, die Funktionenschar f_k mit

$$f_k(x) = -\frac{3}{512}k \cdot x^4 + \frac{3}{32}k^2 \cdot x^2 \text{ und } k \in \mathbb{R}^+$$

Hinweis: Die Funktionenschar entspricht aus produktionstechnischen Gründen nur ungefähr den Vorgaben des Designers. Aus Vereinfachungsgründen ist der tiefste Punkt des Glases nun der Koordinatenursprung.

2.1. Der Computerfachmann hat den Längsschnitt von 5 Gläsern der Serie beispielhaft ausgedruckt.
Dabei gehört die Funktion f_2 zum Likörglas der Serie, die Funktion f_3 zum Cocktailglas. Ordnen Sie dem Likörglas und dem Cocktailglas jeweils den zugehörigen Graphen aus der Abbildung zu und begründen sie ihre Entscheidungen kurz.

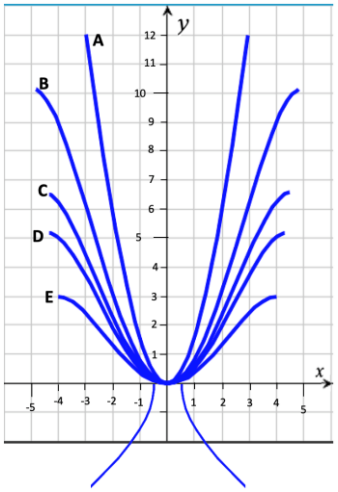


Abbildung 2

2.2. Das Sektglas hat eine Höhe von 12 cm und am Rand einen Durchmesser von 6 cm.
Berechnen Sie für das Sektglas den zugehörigen Wert von k exakt.
Die Produktionsmaschine kann nur Dezimalzahlen verarbeiten. Bestimmen Sie, auf wie viele Stellen nach dem Komma k mindestens angegeben werden muss, damit die Höhe von 12 cm mit einer Genauigkeit von einem Millimeter erreicht wird.

Zum Trinken sollte ein Glas der Serie keinen nach unten weisenden Abschluss (in der Abbildung 3 rotgestrichelt) haben. Es darf also nur zwischen den höchsten Punkten des Graphen einer Funktion rechts und links von der y-Achse geformt werden, damit benutzbare Gläser entstehen.

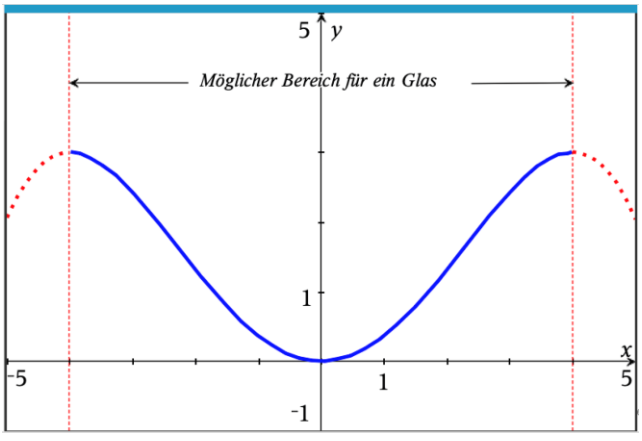


Abbildung 3

2.3. Um zu klären, für welche k benutzbare Gläser produziert werden können, sind u. a. die Maximalstellen der Funktionen f_k zu bestimmen.
Bestimmen Sie rechnerisch die Maximalstellen von f_k.

2.4. Aus Erfahrung weiß man, dass der Durchmesser am oberen Rand eines Glases nicht größer als 9,8 cm sein sollte.

© 2025 T³ Deutschland

Im Folgengen wird ein Glas mit einem Durchmesser von 9,8 cm betrachtet.
Bestimmen Sie k für ein derartiges Glas mit einer Genauigkeit von 3 Stellen nach dem Komma.
Berechnen Sie die Höhe dieses Glases.

Lösungen:

2.1 Durch Probieren und einem Vergleich mit dem Graphen findet man $f_2(4)=3$, also gehört zum Likörglas f_2 der Graph E.
Ebenso schließt man aus $f_3(4)\approx 9$, dass das Cocktailglas zum Graphen B gehört.

2.2 Aufgrund der Symmetrie werden nur positive x-Werte betrachtet. Der rechte Randpunkt hat nach der Aufgabenstellung die x-Koordinate 3. Es ist daher die Gleichung $f_k(3)=12$ zu lösen. Das CAS gibt die beiden Lösungen $k_{1/2}=\pm\frac{\sqrt{131801}+27}{96}$ aus.
Da k>0 nach Voraussetzung gilt, ist nur die positive Lösung $k_1=\frac{\sqrt{131801}+27}{96}$ sinnvoll.
Wegen $k_1\approx 4{,}06296$ und $f_{4{,}1}(3)=12{,}2375...$ und $f_{4{,}06}(3)=11{,}9811...$ genügt eine Angabe von k auf 2 Stellen nach dem Komma für die Genauigkeit von einem Millimeter.

2.3 Bestimmt werden mögliche Extremstellen von f_k.
Die notwendige Bedingung für Extremstellen ist $f_k'(x)=0$. Als Lösungen dieser Gleichung erhält man mit dem CAS $x_1=-2\cdot\sqrt{2\cdot k}$, $x_2=2\cdot\sqrt{2\cdot k}$ und $x_3=0$ als mögliche Extremstellen.
Die Nullstellen (Lösungen der Gleichung $f_k(x)=0$) bestimmt das CAS zu $x_{0_{1/2}}=\pm 4\sqrt{k}=\pm 2\sqrt{4k}$ und $x_{0_3}=0$, x_{0_1} bzw. x_{0_2} liegen also „weiter außen“ als x_1 bzw. x_2, d. h $x_{0_1}<x_1$ und $x_2<x_{0_2}$. Deshalb können x_1 und x_2 nur Maximalstellen sein. (Alternative Argumentationen sind möglich).

2.4 Die Maximalstelle ist x = 4,9, also ist nach AT 2.3 die Gleichung $4{,}9=2\sqrt{2k}$ zu lösen.
Das CAS bestimmt die Lösungen zu $k=3{,}00125$. Also ist $k\approx 3{,}001$.
Aus $f_{3{,}001}(4{,}9)=10{,}135128305$ folgt, dass das Glas etwa 10,1 cm hoch ist.

3. Aus dem Cocktailglas (f_3) soll mit einem geraden Strohhalm getrunken werden.
Der Strohhalm (gestrichelt gezeichnet) setzt im tiefsten Punkt des Glases auf und berührt das Glas in einem weiteren Punkt.
Der Strohhalm soll mindestens 5 cm aus dem Glas herausragen. Berechnen Sie die minimale Länge eines derartigen Strohhalms.
Hinweis: Für die Rechnung ist der Durchmesser des Strohhalmes vernachlässigbar.

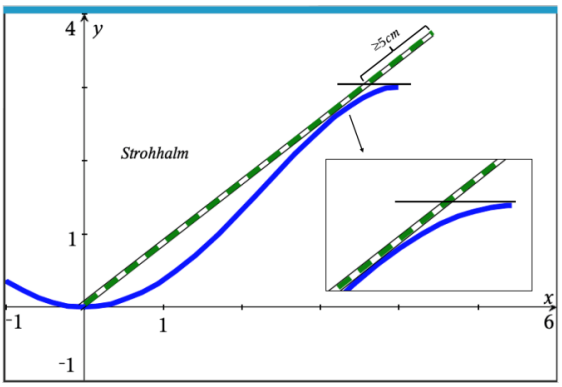
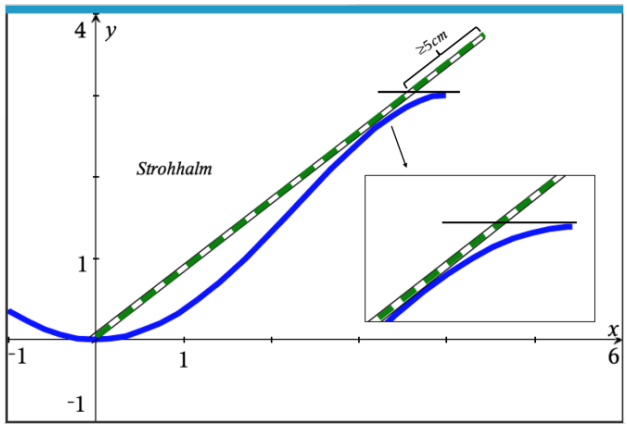


Abbildung 4

Lösungen:

3. *Die Gerade, die die Lage des Strohhalms beschreibt, schneidet den Graphen der Funktion f_3 im Nullpunkt und berührt das Glas tangential. Die Gleichung der Tangente t_3 der Funktion f_3 an der Stelle $x = s$ lautet:*
$t_3(x) = f_3'(s) \cdot (x - s) + f_3(s)$
Es ist also die Lösung des Gleichungssystems
$\left.\begin{array}{l} t_3(s) = f_3(s) \\ t_3(0) = 0 \end{array}\right\}$ *gesucht. Das CAS berechnet die Lösungen zu* $s = -4$, $s = 0$ *und* $s = 4$. *Damit hat die gesuchte Tangente die Gleichung* $t_3(x) = f_3'(4) \cdot (x - 4) + f_3(4) = \frac{9}{4}x$.



Der Strohhalm soll mindestens 5 cm aus dem Glas herausragen. Also muss man die Länge des Strohhalmes bis zur Höhe des Glases ($f_3(2 \cdot \sqrt{2 \cdot k}) = f_3(2 \cdot \sqrt{6})$) bestimmen. Die Gleichung $t_3(x) = f_3(2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3})$ löst das CAS zu $x = \frac{9}{2} = 4{,}5$. Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras erhält man die Länge l des Strohhalmes im Glas zu
$l = \sqrt{(\frac{9}{2})^2 + (f_3(2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3}))^2} \approx 11{,}08$.
Aus 11,1 cm + 5 cm = 16,1 cm folgt, dass der Strohhalm mindestens 16,1 cm lang sein muss, damit er mindestens 5 cm aus dem Glas herausragt.

4. Betrachtet wird nun das oben beschriebene Sektglas der Serie (Aufgabenteil 2.2). In diesem Aufgabenteil geht es um das Volumen des Sektglases.
Hinweise:

   1. *Es gibt exakte mathematische Methoden zur Volumenberechnung. Diese Methoden gehören nicht zu den Bildungsstandards und können deshalb auch nicht hier abgefragt werden. Deshalb wird in dieser Prüfung ein Näherungsverfahren erarbeitet.*
   2. *Benutzen Sie das gerundete k aus dem Aufgabenteil 2.2. Sollten Sie dort kein Ergebnis herausbekommen haben, so benutzen Sie $k = 4{,}13$, das allerdings nicht mit dem richtigen Ergebnis übereinstimmt.*

Gehen Sie davon aus, dass das Sektglas entsprechend der Abbildung 5 durch Zylinder angenähert wird.

Je mehr Zylinder benutzt werden, d. h. je feiner die Unterteilung auf der x-Achse ist, umso besser wird das Gesamtvolumen der Zylinder dem des Sektglases entsprechen.

4.1 Berechnen Sie das Gesamtvolumen der 3 Zylinder.

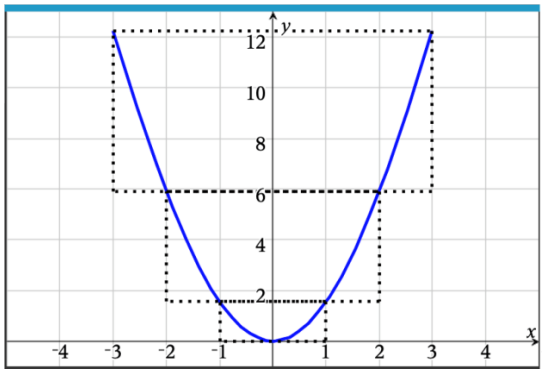


Abbildung 5

Es ist offensichtlich, dass das eben berechnete Gesamtzylindervolumen nur eine sehr grobe Annäherung an das Volumen des Sektglases darstellt. Das soll im Folgenden verbessert werden.

4.2 Geben Sie eine Formel an, mit der man das Gesamtzylindervolumen von n Zylindern bei gleichmäßigen Unterteilungen auf der x-Achse von dem Sektglasradius erhält.

© 2025 T³ Deutschland

4.3 Bestimmen Sie das minimale n, bei dem sich mit dem obigen Verfahren das berechnete Volumen um weniger als 0,01 ml vom Vorgänger unterscheidet und geben Sie das Volumen für dieses n an.

4.4 Bei einem Sektglas ist nicht das gesamte Volumen interessant, sondern viel mehr die Füllhöhe, bei der das Glas mit 0,1 l = 100 ml Sekt gefüllt ist, damit man einen sogenannten Eichstrich anbringen kann.
Bestimmen Sie diese Höhe auf 0,1 cm genau.
Hinweis: Für eine hinreichende Genauigkeit reicht es aus, mit dem n aus dem vorherigen Aufgabenteil zu arbeiten. Sollten Sie keine Lösung erhalten haben, so können Sie mit n =140 arbeiten, das allerdings nicht der richtigen Lösung des Aufgabenteils 4.3 entspricht.

Lösungen:

4.1 $\pi \cdot ((f(3)-f(2)) \cdot 3^2 + (f(2)-f(1)) \cdot 2^2 + (f(1)-f(0)) \cdot 1^2) \approx 233,30045295$
Die Approximation mit 3 (äußeren) Zylindern ergibt ein Volumen von ca. 233 ml für das Sektglas.

4.2 $V(n) = \pi \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[(f_{4,06}(i \cdot \frac{3}{n}) - f_{4,06}((i-1) \cdot \frac{3}{n})) \cdot (i \cdot \frac{3}{n})^2 \right]$

4.3 Definiert man $D(n) = V(n) - V(n-1)$ *so erhält man durch Probieren mit dem CAS*
$D(148) = -0,01005765154$ *und*
$D(149) = -0,00992257832$
Damit ist das gesuchte $n = 149$ *und das entsprechende Volumen beträgt* $V(149) = 161,7665206....\ ml \approx 162\ ml$

4.4 *Definiert man die Funktion Eich für positives x durch*

$$Eich(x) = \pi \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[(f_{4,06}(i \cdot \frac{x}{149}) - f_{4,06}((i-1) \cdot \frac{x}{149})) \cdot (i \cdot \frac{x}{149})^2 \right]$$

so gibt diese Funktion, mit einer hinreichenden Genauigkeit, das Volumen des Sektglases bei einer Füllhöhe von $f_{4,06}(x)$ *wieder.*
Wiederum durch Probieren mit dem CAS erhält man
$Eich(2,6) \approx 96,40$ *und* $Eich(2,7) \approx 110,70$
$f_{4,06}(2,6) \approx 9,4$ *und* $f_{4,06}(2,7) \approx 10,0$
Damit ist die geforderte Genauigkeit noch nicht erreicht, und die Berechnungen schließen nun die 2. Stelle nach dem Komma mit ein:
Wiederum mit dem CAS erhält man
$Eich(2,62) \approx 99,16$ *und* $Eich(2,63) \approx 100.56$ *. Die zugehörigen Höhen sind*
$f_{4,06}(2,62) \approx 9,5$ *und* $f_{4,06}(2,63) \approx 9,6$
Damit ist die geforderte Genauigkeit immer noch nicht erreicht, und die Berechnungen schließen nun die 3. Stelle nach dem Komma mit ein:
Wiederum mit dem CAS erhält man
$Eich(2,626) \approx 99,99$ *und* $Eich(2,627) \approx 100.13$ *. Die zugehörigen Höhen sind*
$f_{4,06}(2,626) \approx 9,5$ *und* $f_{4,06}(2,627) \approx 9,5$
Also ist der Eichstrich auf einer Höhe von 9,5 cm (über dem tiefsten Punkt des Glases) anzubringen

Schiff – modifizierte Aufgabe mit Lösungen

Wir beziehen uns hier auf die von uns überarbeitete Aufgabenstellung.

Für jede positive reelle Zahl a ist eine Funktion f_a gegeben durch
$f_a(x) = x^2 \cdot e^{-a \cdot x}$ mit $x \in \mathbb{R}$ .Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

1

a) Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den der Punkt $U\left(1 \mid \frac{1}{2}\right)$ auf G_a liegt.

Lösung: Die Lösung der Gleichung $f_a(1) = \frac{1}{2}$ muss bestimmt werden. Das CAS löst diese Gleichung zu $a = ln(2)$.
Also liegt für $a = ln(2)$ der Punkt $U\left(1 \mid \frac{1}{2}\right)$ auf $G_{ln(2)}$.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_a in Abhängigkeit von a.
(Zur Kontrolle: Extremstellen von f_a: $x_1 = 0 ; x_2 = \frac{2}{a}$)
Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R}^+$ alle Extrempunkte auf der der Parabel $y = e^{-2}x^2$ liegen.
Begründen Sie, dass der Hochpunkt für jeden Wert von a im ersten Quadranten liegt.

Lösung: Es ist die Gleichung $f_a'(x) = 0$ zu lösen. Mit einem CAS erhält man $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2}{a}$ als mögliche Extremstellen. Wegen $f_a(0) = 0$ und $f_a''(0) = 2 > 0$ ist $T(0 \mid 0)$ ein Tiefpunkt und wegen $f_a(\frac{2}{a}) = \frac{4}{e^2 a^2}$ und $f_a''(\frac{2}{a}) = -2 \cdot e^{-2} < 0$ ist. $H\left(\frac{2}{a} \mid \frac{4}{e^2 a^2}\right)$ ein Hochpunkt.
Ersetzt man $\frac{2}{a}$ durch x, so erkennt man, dass alle Hochpunkte $H\left(\frac{2}{a} \mid \frac{4}{e^2 a^2}\right) = H\left(\frac{2}{a} \mid \frac{1}{e^2} \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^2\right) = H\left(x \mid \frac{1}{e^2} \cdot x^2\right)$ auf der Parabel $y = e^{-2} \cdot x^2$ liegen.
Das a>0 vorausgesetzt wurde, sind auch $\frac{2}{a}$ sowie $\frac{4}{e^2 a^2}$ positiv, also liegen alle Hochpunkte im ersten Quadranten.

c) Zeigen Sie, dass für jedes $a > 0$ die Graphen aller Funktionen f_a nur einen Punkt gemeinsam haben.

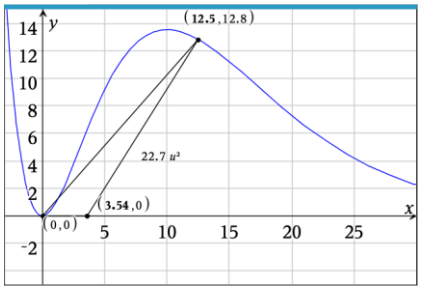
Lösung: Gemeinsame Punkte findet man durch die Lösung der Gleichung $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x)$ mit $a_1 \neq a_2$. Ein CAS findet nur die Lösung $x = 0$, d.h., nur der Tiefpunkt $T(0 \mid 0)$ ist gemeinsamer Punkt der Graphen der Schar.

In den folgenden beiden Aufgabenteilen ist $a = \frac{1}{5}$.

d) Für jede positive reelle Zahl b sind die Punkte $A(0 \mid 0)$ und $B(b \mid 0)$ sowie der Punkt C gegeben, der die x-Koordinate b^2 hat und auf dem Graphen $G_{\frac{1}{5}}$ liegt.
Bestimmen Sie denjenigen Wert von b, für den der Flächeninhalt des Dreiecks ABC maximal ist, und geben Sie den zugehörigen Flächeninhalt an.

© 2025 T³ Deutschland

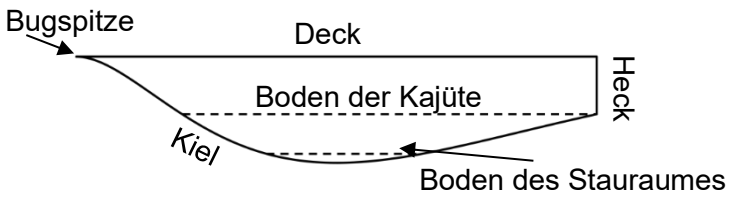
Lösung:
Der Flächeninhalt des Dreiecks lässt sich durch eine Funktion A in Abhängigkeit von b beschreiben mit $A(b) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot f_{\frac{1}{5}}(b^2)$ *beschreiben. Mögliche Extremstellen erhält man durch die Lösungen der Gleichung* $A'(b) = 0$. *Mit einem CAS erhält man die Lösungen* $b = -\frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}$ *oder* $b = 0$ *oder* $b = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}$. *Wegen* $b > 0$ *entfallen die ersten beiden Lösungen. Da* $A''\left(\frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{625 \cdot e^{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{2}}{4} < 0$ *handelt es sich bei* $b = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}$ *um eine Maximalstelle mit* $A\left(\frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3125 \cdot e^{-\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{2}}{16} \approx 22{,}673$. *Der größte Flächeninhalt ist also etwa 22,7 FE.*



e) Der Graph $G_{\frac{1}{5}}$, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = p$ mit $p \in \mathbb{R}$ und $p > 0$ schließen ein Flächenstück ein.
Ermitteln Sie die Größe dieses Flächenstücks in Abhängigkeit von p.
Zeigen Sie, dass der Inhalt des Flächenstücks für alle Werte von p kleiner als 250 ist.

Lösung: $A(p) = \int_0^p f_{\frac{1}{5}}(x)dx = 250 - (5p^2 + 50p + 250) \cdot e^{-\frac{p}{5}}$. *Wegen* $p > 0$ *und* $e^{-\frac{p}{5}} > 0$ *wird für jedes p eine positive Zahl von 250 subtrahiert*

2 Die Abbildung zeigt schematisch einen Längsschnitt eines 20 m langen Schiffs, dessen Deck horizontal liegt.



Bei Verwendung eines Koordinatensystems, dessen Ursprung an der Bugspitze liegt und dessen x-Achse entlang des Decks verläuft, beschreibt die Funktion k mit
$k(x) = -0{,}3x^2 \cdot e^{-0{,}2x}$ für $0 \leq x \leq 20$, $x \in \mathbb{R}$ modellhaft den abgebildeten Kiel. Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Wirklichkeit.

a) Berechnen Sie die Höhendifferenz zwischen dem tiefsten Punkt des Kiels und dem Endpunkt des Kiels am Heck auf Zentimeter genau.

Lösung:
Bis auf den Faktor $-0{,}3$ *entspricht k der Funktion* $f_{\frac{1}{5}}$ *aus dem ersten Abschnitt. Nach dem Aufgabenteil 1b) hat k damit einen Tiefpunkt bei* $x_{min} = \frac{2}{0{,}2} = 10$. *Aus* $k(20) - k(10) \approx 1{,}86213$ *folgt:*
Die Höhendifferenz zwischen dem tiefsten Wert des Kiels und dem Endpunkt des Kiels am Heck beträgt ungefähr 1,86 m.

b) Aus strömungstechnischen Gründen soll der Neigungswinkel des Kiels zur Horizontalen überall betragsmäßig kleiner oder gleich 36° sein. Überprüfen Sie, ob das Modell diese Bedingung erfüllt.

Lösung:
An jeder Stelle des Kiels berechnet sich der Winkel α gegenüber der Horizontalen aus $|k'(x)| = \tan(\alpha)$. Die Bedingung der Aufgabenstellung lautet damit:
$|k'(x)| \leq \tan(36°) \approx 0{,}7265$.
Die größten Winkel findet man an den Extremstellen von k'. Diese werden über die Lösungen der Gleichung $k''(x) = 0$ bestimmt. Mit einem CAS erhält man als Lösungen dieser Gleichung $x \approx 2{,}92893$ oder $x \approx 17{,}0711$. Es gilt
$k'(2{,}92893) = -0{,}691738 > -\tan(36°)$ *und* $k'(17{,}0711) = 0{,}238299 < \tan(36°)$.
Somit ist der Neigungswinkel des Kiels betragsmäßig überall kleiner als 36°.

c) Der horizontal liegende Boden der Kajüte befindet sich 2,15 m unterhalb des Decks. Berechnen Sie die Länge des Bodens in Längsrichtung des Schiffs auf Dezimeter genau.

Lösung: Die Gleichung $k(x) = -2{,}15$ muss gelöst werden. Ein CAS liefert die Lösungen $x = -2{,}15754$ oder $x = 3{,}98953$ oder $x = 20{,}219$. Nur die Lösung $x_1 = 3{,}98953$ befindet im Definitionsbereich von k. Der Boden der Kajüte liegt daher zwischen x_1 und dem Heck. Wegen $20 - 3{,}98953 = 16{,}01047$ beträgt die Läge des Bodens ca. 16,0 m.

d) Der Boden des Stauraums unterhalb der Kajüte hat in Längsrichtung des Schiffs eine Länge von 6 m.
Ermitteln Sie rechnerisch auf Dezimeter genau, wie weit der Boden des Stauraums unterhalb des Bodens der Kajüte liegt.

Lösung: Mit dem CAS wird die Gleichung $k(x) = k(x+6)$ gelöst. Im Definitionsbereich von k gibt es nur eine Lösung $x_6 \approx 7{,}298$. Es ist $k(x_6) \approx -3{,}71$.
Wegen $3{,}71 - 2{,}15 = 1{,}56$ befindet sich der Boden des Stauraumes ungefähr 1,6 m unterhalb des Bodens der Kajüte.

e) Der Punkt B stellt die Bugspitze, der Punkt E den Endpunkt des Kiels am Heck dar. Ein Näherungswert für die Länge des Kiel kann im Modell durch einen Streckenzug von B zu E über zwei weitere Punkte, die auf dem Graphen von k liegen, bestimmt werden.
Formulieren Sie eine allgemeine Aussage zur Länge des Kiels im Vergleich zum Näherungswert, ohne diese zu bestimmen. Begründen Sie diese Aussage.
Beschreiben Sie, wie man diesen unter Verwendung von Streckenzügen zwischen benachbarten Punkten auf dem Graphen von k einen beliebig genauen Wert für die Länge des Kiels erhalten kann.

Lösung: Die Länge des Kiels ist größer als der Näherungswert, da eine gekrümmte Kurve zwischen zwei Punkten stets länger ist als die gerade Strecke zwischen diesen beiden Punkten.
Man teilt das Intervall von $x_0 = 0$ bis $x_n = 20$ durch $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ mit $n \in \mathbb{N}$ in n gleichgroße Teile und verbindet die Punkte des Graphen von k mit den x-Koordinaten $x_1, x_2, \ldots$,und x_n durch Strecken. Die Summe der Längen dieser Strecken stimmt mit der Länge der Kiellinie beliebig genau überein, wenn die Werte von n hinreichend groß sind.

f) Ist ein Kurvenstück Graph einer in $[a;b]$ mit a, b $\in \mathbb{R}$ definierten Funktion h mit erster Ableitungsfunktion h', so gilt für die Länge s dieses Kurvenstücks: $s = \int_a^b \sqrt{1 + (h'(x))^2}\,dx$

Berechnen Sie damit die Länge des Kiels auf Dezimeter genau.

© 2025 T³ Deutschland

Lösung:

Mit dem CAS wird das Integral $\int_0^{20} \sqrt{1+(k'(x))^2}\,dx$ *zu 21,1847 berechnet.*

Die Länge des Kiels ist ca. 21,2 m lang.

Plakat – Kritik an der Lösung der Aufgabe aus dem Aufgabenpool 2018 zur Analytischen Geometrie auf grundlegendem Niveau

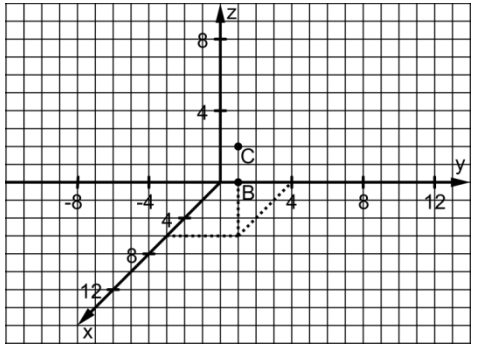
Dateiname: 2018_M_grundlegend_B_AGLA(A2)_CAS_2

Anhand dieser Aufgabe werfen wir beispielhaft einen kritischen Blick auf Lösungen der Aufgaben aus dem Aufgabenpool.

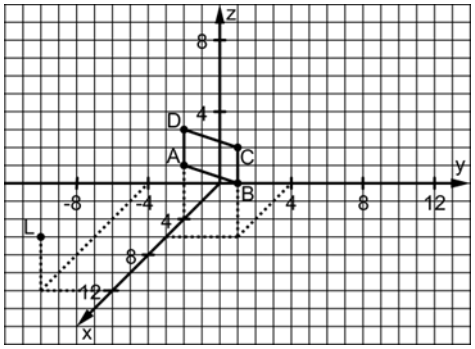
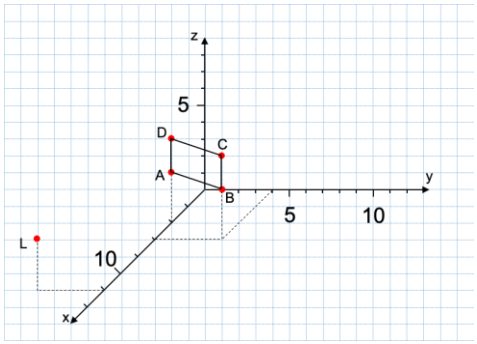
Die Zeichnungen der „IQB-Lösung“ sind der Originalaufgabe entnommen.

Vor einer Hauswand ist ein rechteckiges Reklameschild angebracht, das durch einen Scheinwerfer beleuchtet wird. Der Scheinwerfer lässt sich in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft durch den Punkt $L(12|-4|3)$ beschreiben. Die Eckpunkte des Schilds werden durch die Punkte $A(4|0|3)$, $B(6|4|3)$, $C(6|4|5)$ und $D(4|0|5)$ dargestellt. Die xy-Ebene beschreibt den horizontalen Untergrund, auf dem das Haus steht, die yz-Ebene die Ebene, in der die Hauswand liegt. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

a Zeichnen Sie das Rechteck ABCD sowie den Punkt L in die Abbildung ein.



© 2025 T³ Deutschland

IQB Lösung	Modifizierte Lösung	
		Die Zeichnung wurde übersichtlicher gestaltet.

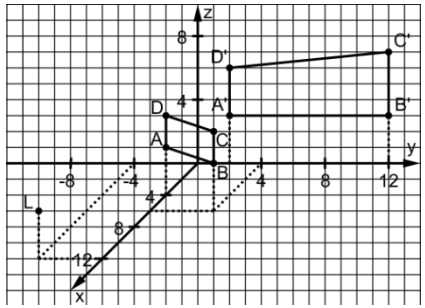
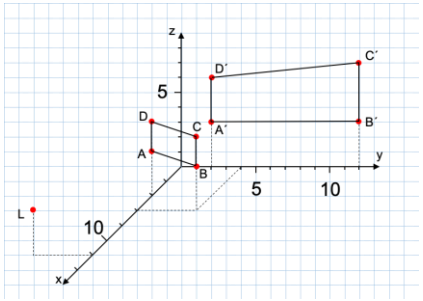
Auf der Hauswand ist der Schatten des Schilds sichtbar. Der Punkt $A'(0\,|\,2\,|\,3)$ stellt den zu A gehörenden Eckpunkt des Schattens dar, die Punkte $C'(0\,|\,12\,|\,7)$ und $D'(0\,|\,2\,|\,6)$ die zu C bzw. D gehörenden Eckpunkte.

b Weisen Sie nach, dass der vierte Eckpunkt des Schattens durch $B'(0\,|\,12\,|\,3)$ dargestellt wird.

IQB Lösung	Modifizierte Lösung	Kommentar
Da B′ die x-Koordinate 0 hat, liegt der Punkt in der yz-Ebene. Zudem sind $\overrightarrow{LB'} = \begin{pmatrix} -12 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{LB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ kollinear.	Alle Bildpunkte haben die x-Koordinate 0. Da alle Bildpunkte auf der Hauswand liegen, muss auch B′ die x-Koordinate 0 haben. B′ Liegt auf der Geraden durch L $B' = L + c \cdot \overrightarrow{LB}$ und B, d. h. $\begin{pmatrix} 0 \\ b'_y \\ b'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$.	Eine Begründung, dass die x-Koordinate von B′ 0 ist, fehlt. Ebenso fehlt eine Beantwortung der Frage, d.h. ein Antwortsatz fehlt. Lösungen sollten näher an dem Niveau der Schülerinnen und Schüler lie-

	Hinweis: Zur Schreibweise verweisen wir an dieser Stelle noch einmal auf den Aufsatz von Günther Malle. Aus der Gleichung der x-Koordinate folgt $c = 2$, damit ergibt sich $b'_y = 12$ und $b'_z = 3$. Also wird der der vierte Eckpunkt des Schattens durch $B'(0\,|\,12\,|\,3)$ dargestellt.	gen. Die Vorstellung, dass B' auf der Geraden durch L und B liegt, liefert das nächstliegende Argument. Auch wenn die IQB Lösung auf den ersten Blick eleganter und kürzer ist, sollte man sich an den Schülerinnen und Schülern, insbesondere Grundkursschülerinnen und -schülern, zumal in einer Prüfungssituation, orientieren. Und insbesondere bei Punkten und Zeitvorgaben danach ausrichten.

c Ergänzen Sie das zum Schatten gehörende Viereck in Ihrer Zeichnung zu Teilaufgabe a und begründen Sie, dass die untere Kante des Schattens horizontal verläuft.

IQB Lösung	Modifizierte Lösung	Kommentar
		Die Zeichnung wurde übersichtlicher gestaltet. Es wurde nicht allgemein (gleiche z-Koordinate), sondern die z-Koordinate wurde explizit angegeben, sodass die Schülerinnen und Schüler tatsächlich

© 2025 T³ Deutschland

Begründung: Die Punkte A' und B' haben die gleiche z-Koordinate.	Die untere Kante liegt auf der Geraden durch A' und B'. Da beide Punkte die gleiche z-Koordinate, nämlich 3, haben. verläuft die untere Kante horizontal.	die Aufgabe bearbeiten müssen und nicht nur anhand der Aufgabenstellung lösen können. Der Antwortsatz fehlte.
d Berechnen Sie den Flächeninhalt des Schattens.		
IQB Lösung	Modifizierte Lösung	Kommentar
$\frac{1}{2}\cdot\left(\overline{A'D'}+\overline{B'C'}\right)\cdot\overline{A'B'}=\frac{1}{2}\cdot(3+4)\cdot 10=35$	Die geometrische Form des Schattens ist ein Trapez, denn die Kanten $\overline{A'D'}$ und $\overline{B'D'}$ sind parallel, da die Verbindungsvektoren $\overrightarrow{A'D'}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{B'C'}=\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$ in die gleiche Richtung zeigen. Der Flächeninhalt des Trapezes berechnet sich (nach der bekannten Mittelstufenformel) $\frac{1}{2}\cdot\left(\overline{A'D'}+\overline{B'C'}\right)\cdot\overline{A'B'}=\frac{1}{2}\cdot(3+4)\cdot 10=35$. Der Flächeninhalt des Schattens beträgt $35\,m^2$.	Der Ansatz und die Begründung für diesen Ansatz fehlen.
e Berechnen Sie die Größe des größten Innenwinkels des Schattens.		
IQB Lösung	Modifizierte Lösung	Kommentar

$\overrightarrow{D'A'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{D'C'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{D'A'} \cdot \overrightarrow{D'C'}}{\left\|\overrightarrow{D'A'}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{D'C'}\right\|} = \frac{-3}{3\sqrt{101}}$, d. h. $\varphi \approx 96°$	Der untere Rand $\overline{A'B'}$ ist horizontal. Der weitere Eckpunkt C' hat die z-Koordinate 7 und der Eckpunkt D' hat die z-Koordinate 6. Also liegt der größte Innenwinkel bei D'. Aus der Zeichnung kann man erkennen, dass der größte Innenwinkel bei D' liegt. Die Bestimmung der Größe des Winkels erfolgt mithilfe der entsprechenden Formel: $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{D'A'} \cdot \overrightarrow{D'C'}}{\left\|\overrightarrow{D'A'}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{D'C'}\right\|} = \frac{-3}{3\sqrt{101}}$. Das CAS löst die Gleichung zu $\varphi \approx 95{,}7107°$ Der größte Innenwinkel des Schattens ist etwa 96° groß.	Die Bestimmung des größten Innenwinkels fehlt. Bei einer CAS Aufgabe ist die Angabe der einzelnen Komponenten der Vektoren nicht notwendig. Ein Antwortsatz fehlt.

Der Scheinwerfer kann entlang einer vertikal verlaufenden Stange in der Höhe verschoben werden; dabei liegt der Schatten des Schilds stets vollständig auf der Hauswand. Für jede der beiden Kanten des Schattens, die durch die linke und rechte Kante des Schilds erzeugt werden, gelten folgende Aussagen:

I *Die Kante verläuft für alle Positionen des Scheinwerfers entlang derselben vertikalen Gerade.*

II *Die Länge der Kante bleibt bei Verschiebung des Scheinwerfers unverändert.*

f Weisen Sie die Gültigkeit der Aussage II für eine der beiden betrachteten Kanten des Schattens rechnerisch nach.

IQB Lösung	Modifizierte Lösung	Kommentar
Punkt, der den Scheinwerfer beschreibt: $L_h(12 \mid -4 \mid h)$ Punkte, die die Endpunkte einer der beiden betrachteten Kanten darstellen: $A'_h(0 \mid 2 \mid z_{A'})$, $D'_h(0 \mid 2 \mid z_{D'})$	Mithilfe der z-Koordinaten der Punkte kann man ablesen, dass die Kante $\overline{A'D'}$ 3 m lang ist. Durch eine vertikale Verschiebung befindet sich der Scheinwerfer nun im Punkt $L_z(12 \mid -4 \mid z)$. Aufgrund	Es fehlt der Vergleich mit der ursprünglichen Länge. Und eine Erläuterung des Rechenweges.

© 2025 T³ Deutschland

$\begin{pmatrix}12\\-4\\h\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-8\\4\\3-h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\z_{A'}\end{pmatrix}$ liefert: $z_{A'}=4{,}5-0{,}5h$ $\begin{pmatrix}12\\-4\\h\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-8\\4\\5-h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\z_{D'}\end{pmatrix}$ liefert: $z_{D'}=7{,}5-0{,}5h$ Damit: $\overline{A'_hD'_h}=3$	der Eigenschaft I verändern sich die Bildpunkte nur in der z-Koordinate. Bezeichnen wir die neuen Bildpunkte von A und D mit $A'_z(0\mid 2\mid z_{A'})$ und $D'_z(0\mid 2\mid z_{D'})$. A'_z liegt auf der Geraden durch L_z und A, d. h. $A'_z=L+r\cdot\overrightarrow{LA'}$. Aus dieser Gleichung kann man $z_{A'}$ in Anhängigkeit von z berechnen zu $z_{A'}=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}z$. Analog bestimmt man $z_{D'}$ aus $D'_z=L+r\cdot\overrightarrow{LD'}$ zu $z_{D'}=\frac{15}{2}-\frac{1}{2}z$. Nach der Eigenschaft I bestimmt sich der Abstand aus der Differenz der z-Koordinaten, die, unabhängig von z, immer $\left(\frac{15}{2}-\frac{1}{2}z\right)-\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}z\right)=3$ ist. Also bleibt die Länge der Kante $A'_hD'_h$ bei horizontalen Verschiebungen der Lampe immer konstant.	Bei einer CAS-Aufgabenlösung kann auf die konkrete Angabe der Komponenten von Vektoren verzichtet werden. Auch hier fehlt wieder eine Antwort auf die gestellte Frage der Aufgabenstellung.

g Begründen Sie, dass sich der Flächeninhalt des Schattens bei Verschiebung des Scheinwerfers nicht verändert.

IQB Lösung	Modifizierte Lösung	Kommentar
Die beiden Kanten des Schattens, die durch die linke und rechte Kante des Schilds erzeugt werden, sind unabhängig von der Position des Scheinwerfers parallel zueinander. Bei Verschiebung des Scheinwerfers verändern sich weder ihre Längen noch ihr Abstand.	Die beiden Ränder des Schattens, die durch die linke und rechte Kante des Schilds erzeugt werden, sind unabhängig von der Position des Scheinwerfers parallel zueinander (Aussage I). Bei einer vertikalen Verschiebung des Scheinwerfers verändern sich weder ihre Längen, nach Aufgabenteil f), noch ihr Abstand. Da nur diese beiden Größen in die Berechnung des Flächeninhalts eines Trapezes eingehen, bleibt der Flächeninhalt des Schattens bei vertikalen Verschiebungen der Lampe konstant.	Eine Erläuterung der zugrundeliegenden geometrischen Figur fehlt ebenso wie eine Beantwortung der Frage der Aufgabenstellung.

Ausgewählte Beispiele für Leistungsaufgaben

In diesem Abschnitt stellen wir als Diskussionsanlass noch einige Beispiele für Leistungsaufgaben vor, die sich an denen im Vorwort formulierten Merkmalen orientieren. Die Aufgaben sind nicht als vollständige Abituraufgaben konzipiert, sondern sollen unsere Intentionen verdeutlichen, die wir an Aufgabenformate stellen, wenn ein digitales Werkzeug bei der Leistungsüberprüfung eingesetzt wird.

Gaube

Im Landesabitur Hessen 2013 mussten die Schüler im Grundfach als auch im Leistungsfach eine Aufgabe im Bereich Analysis bearbeiten, die sich in der Anwendung mit einem Gaubenfenster beschäftigte.

Diese Aufgabe wurde jeweils in einer CAS- Version und in einer WTR/GTR- Version gestellt.

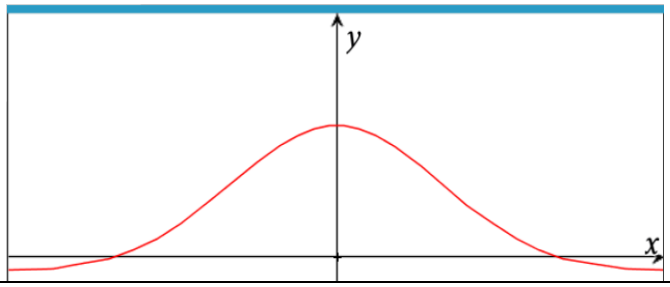
Wir haben versucht, anhand dieser Aufgaben eine Version für WTR zu formulieren und ausgehend von dieser Aufgabe geeignete Aufgabenteile so zu verändern, so dass der Einsatz von CAS sinnvoll erscheint.

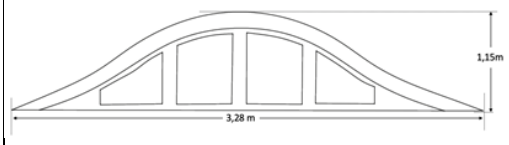
Damit wollten wir verdeutlichen, welche Möglichkeiten in CAS-Aufgaben im Gegensatz zu WTR-Aufgaben stecken; insbesondere wie Schülerinnen und Schüler sich durch geringere Kalküllastigkeit auf weitergehende mathematische Probleme konzentrieren können.
Um dies zu veranschaulichen haben wir an geeigneten Stellen Screenshots möglicher CAS-Berechnungen bzw. Ausgaben eingefügt. Die aber nicht zur eigentlichen Lösung gehören und als Korrekturhilfe dienen.

Die Bilder zeigen beispielhaft eine sogenannte Fledermausgaube und die äußere Profillinie des Gaubenfensters.
Eine solche Profillinie kann durch eine Exponentialfunktion der Schar $f_{a,k}$ mit

$$f_{a,k}(x) = k \cdot e^{-a \cdot x^2} - 0{,}2 \,, a, k > 0$$

beschrieben werden (alle Angaben in Metern).
Die Profillinie wird dabei durch den Teil des Graphen modelliert, der oberhalb der x-Achse liegt.





© 2025 T³ Deutschland

WTR	CAS
1.1 Ermitteln Sie konkrete Werte für die Parameter a und k für die angegebene Modellfunktion, sodass die Höhe der Gaube 1,15 m und die Breite 3,28 m beträgt.	
1.2 Zur Bestimmung der Profillinie genügt es meistens die Koordinaten von zwei Punkten auf einer Seite der Linie zu kennen. $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$ sind zwei Punkte auf einer Seite der Profillinie. Ermitteln Sie eine allgemeingültige Formel zur Berechnung des Parameters a in Abhängigkeit von den Koordinaten der genannten Punkte. Augenscheinlich ist das Maximum der Funktion aus Aufgabe 1.1 an der Stelle $x = 0$ (vgl. Abbildung oben). Begründen Sie, dass diese Vermutung richtig ist.	1.2 Zur Bestimmung der Profillinie genügt es meistens die Koordinaten von zwei Punkten auf der Linie zu kennen. $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$ sind zwei Punkte auf der Profillinie. Ermitteln Sie eine allgemeingültige Formel zur Berechnung des Parameters a in Abhängigkeit von den Koordinaten der genannten Punkte. Diskutieren Sie Ihre Lösung. Augenscheinlich ist das Maximum der Funktion aus Aufgabe 1.1 an der Stelle $x = 0$ (vgl. Abbildung oben). Begründen Sie, dass diese Vermutung richtig ist.
Kommentar: 1.1 Auch wenn das CAS exakte Werte liefert, sind in einer Anwendungsaufgabe die zu berechnenden Werte als Näherungswerte mit sinnvoller Genauigkeit anzugeben. Das Bestimmen der Parameter a und k ist mit einem CAS einfach. 1.2 Die Formulierung der Aufgabe weist darauf hin, dass es Punkte geben muss, für die die Aussage nicht gilt. Eine allgemeine Bildungsvorschrift für den Parameter a liefert das CAS. Dieser Term soll nun durch eine Fallunterscheidung diskutiert werden.	
Lösung WTR	**Lösung CAS**
1.1 Aus der Gleichung des Graphen bzw. aus dem Graphen erkennt man, dass Achsensymmetrie bzgl. der y-Achse vorliegt und sich die Höhe sich aus $f(0)$ ergibt. Aus $f_{a,k}(0) = 1{,}15$ folgt $k \cdot 1 - 0{,}2 = 0$, also $k = 1{,}35$. Die Nullstellen erhält man über die Breite des Fensters, 3,28 m. Also sind $x_{N_1} = -1{,}64$ und $x_{N_2} = 1{,}64$ die Nullstellen.	1.1 Aus der Gleichung des Graphen bzw. aus dem Graphen erkennt man, dass Achsensymmetrie bzgl. der y-Achse vorliegt und sich die Höhe aus $f_{a,k}(0)$ ergibt. Die Nullstellen erhält man über die Breite des Fensters, 3,28 m. Also sind $x_{N_1} = -1{,}64$ und $x_{N_2} = 1{,}64$ die Nullstellen. Das Gleichungssystem

Aus $f_{a,k}(1{,}64) = 0$ folgt

$1{,}35 \cdot e^{-a \cdot 1{,}64^2} - 0{,}2 = 0$.

Durch Umformung folgt: $e^{-a \cdot 2{,}6896} = 0{,}14815$
Durch Logarithmieren beider Seiten folgt:
$a = \frac{\ln(0{,}14815)}{-2{,}6896} = 0{,}70996...$.

Für die Werte $k = 1{,}35$ und $a \approx 0{,}71$ ergibt sich eine Höhe von 1,15 m und eine Breite von 3,28 m.

1.2

Das Gleichungssystem

$\begin{cases} k \cdot e^{-a \cdot x_1^2} - 0{,}2 = y_1 \\ k \cdot e^{-a \cdot x_2^2} - 0{,}2 = y_2 \end{cases}$ ist zu lösen. Durch jeweilige Addition von 0,2 erhält man

$\begin{cases} k \cdot e^{-a \cdot x_1^2} = y_1 + 0{,}2 \\ k \cdot e^{-a \cdot x_2^2} = y_2 + 0{,}2 \end{cases}$. Division der beiden Gleichungen eliminiert k:

$\frac{y_1 + 0{,}2}{y_2 + 0{,}2} = \frac{e^{-a \cdot x_1^2}}{e^{-a \cdot x_2^2}}$. Werden beide Seiten logarithmiert, so erhält man

$$\ln\left(\frac{y_1 + 0{,}2}{y_2 + 0{,}2}\right) = \ln\left(\frac{e^{-a \cdot x_1^2}}{e^{-a \cdot x_2^2}}\right)$$
$$= \ln\left(e^{-a \cdot x_1^2}\right) - \ln\left(e^{-a \cdot x_2^2}\right)$$
$$= -a \cdot x_1^2 - \left(-a \cdot x_2^2\right)$$
$$= -a \cdot \left(x_1^2 - x_2^2\right)$$

Also $a = -\frac{\ln\left(\frac{y_1 + 0{,}2}{y_2 + 0{,}2}\right)}{x_1^2 - x_2^2}$

$\begin{cases} f_{a,k}(0) = 1{,}15 \\ f_{a,k}(1{,}64) = 0 \end{cases}$ wird mit dem CAS gelöst zu $k = 1{,}35$ und $a = 0{,}70997...$.

Für die Werte $k = 1{,}35$ und $a \approx 0{,}71$ ergibt sich eine Höhe von 1,15 m und eine Breite von 3,28 m.

1.2

Das Lösen des zugehörigen Gleichungssystems

$\begin{cases} f_{a,k}(x_1) = y_1 \\ f_{a,k}(x_2) = y_2 \end{cases}$

mit einem CAS liefert eine Lösung für a: $a = \frac{\ln\left(\frac{y_2 + 0{,}2}{y_1 + 0{,}2}\right)}{x_1^2 - x_2^2}$ mit der Nebenbedingung $\frac{y_2 + 0{,}2}{y_1 + 0{,}2} \geq 0$.

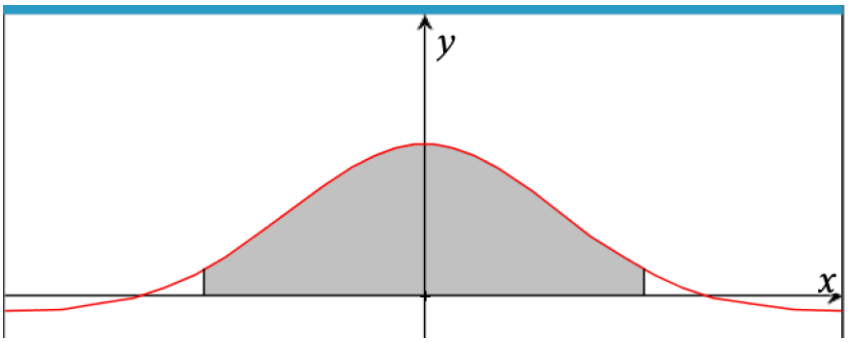
Liegen die beiden Punkte symmetrisch zur y-Achse, gilt also $x_1 = -x_2$ ergibt sich für a ein nichtdefinierter Ausdruck.

Also muss für die allgemeine Gleichung gelten: $x_1 \neq -x_2$.

Der Term $e^{-a \cdot x^2}$ ist für alle $x \neq 0$ kleiner als $1 = e^{-0}$, d. h. für alle Funktionswerte mit $x \neq 0$ gilt $f_{a,k}(x) < f_{a,k}(0)$.
Also liegt das Maximum an der Stelle $x = 0$.

Verwenden Sie in den Abschnitten 2 und 3 die Werte $a = 0{,}71$ und $k = 1{,}35$.

© 2025 T³ Deutschland



WTR	CAS

2.

Der Flächeninhalt des Gaubenfensters soll im Intervall [-1,4;1,4] bestimmt werden.

2.1

Zur ersten Abschätzung wird eine Näherung für den Flächeninhalt bestimmt:
Unterteilen Sie die im Bild dargestellte Fläche in 8 rechteckige Streifen gleicher Breite, die parallel zur y-Achse verlaufen und zeichnen Sie diese ein.

Erläutern Sie ein Näherungsverfahren zur Ermittlung des Flächeninhalts unter Verwendung dieser Streifen.

Ermitteln unter Einbeziehung der 8 Streifen einen Näherungswert für den Flächeninhalt.

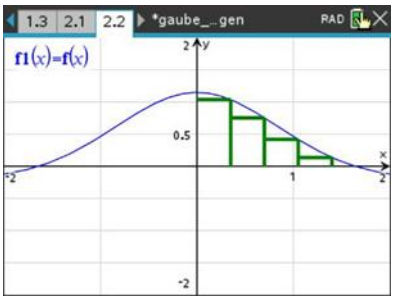
2.2

Erläutern Sie eine Möglichkeit, wie das von Ihnen verwendete Näherungsverfahren aus Aufgabe 2.1 verändert werden könnte, um ein genaueres Ergebnis zu erhalten und begründen Sie, warum damit eine bessere Näherung bestimmt werden kann.

2.3 Auch ein Computer könnte kann den Flächeninhalt nicht exakt bestimmen. Geben Sie an, woran das liegt. Ein Computerprogramm errechnet für den Flächeninhalt einen Wert von 2,01 m². Berechnen Sie die prozentuale Abweichung des Näherungswertes aus Aufgabe 2.1 von diesem Wert.	2.3 Auch ein CAS kann den Flächeninhalt nicht exakt bestimmen. Geben Sie an, woran das liegt. Betrachten Sie Vereinfachungsgründen nur den Flächeninhalt im ersten Quadranten: Ermitteln Sie die kleinste Anzahl n von Streifen, sodass die prozentuale Abweichung der Fläche, die durch die vollständig unterhalb des Graphen liegenden Streifen gebildet wird, von dem von einem Computerprogramm berechneten Wert von 1,00 m^2 um weniger als 1% abweicht.
Lösung WTR	**Lösung CAS**

2.1

Alle Streifen liegen innerhalb der betrachteten Fläche. Summiert man die Flächeninhalte aller dieser Rechtecke, so erhält man eine Näherung für die gesuchte Fläche.
Die Länge des betrachteten Intervalls ist 2,8m, also ist ein Streifen 0,35 m breit.
$s_8 = 2 \cdot 0{,}35 \cdot (f(0{,}35) + f(0{,}70) + f(1{,}05) + f(1{,}40)) \approx 1{,}64$.



Eine Näherung für den Flächeninhalt unter der Kurve beträgt 1,64 m^2.

2.2

Durch Erhöhung der Anzahl der Streifen ist eine Verbesserung der Genauigkeit zu erreichen.
Aufgrund der größer werdenden Anzahl von Streifen (Rechtecken) wird der Anteil der jeweiligen nicht erfassten Teilflächen, die vollständig unter dem Graphen, immer kleiner.
Die Summe der Flächeninhalte aller Streifen nähert sich also dem wahren Flächeninhalt für eine größer werdende Anzahl von Streifen immer mehr an.

2.3

Funktionen mit dem Funktionsterm $k \cdot e^{-a \cdot x^2}$ besitzen keine elementaren Stammfunktionen. Deshalb lässt sich ein bestimmtes Integral über diese Funktionen, und damit auch der Flächeninhalt nicht elementar berechnen.

Aus $\frac{1{,}64}{2{,}01} \approx 0{,}8159$ folgt eine prozentuale Abweichung von ca. 18,41%

2.3

Funktionen mit dem Funktionsterm $k \cdot e^{-a \cdot x^2}$ besitzen keine elementaren Stammfunktionen. Deshalb lässt sich ein bestimmtes Integral über diese Funktionen, und damit auch der Flächeninhalt nicht elementar berechnen.

Eine allgemeine Formel für die Berechnung der Untersumme von n Streifen ergibt sich durch $S_u(n) = \sum_{i=1}^{n} sb(n) \cdot f_{0{,}71{,}1{,}35}(i \cdot sb(n))$ mit $sb(n) = \frac{1{,}4}{n}$ als Streifenbreite in Abhängigkeit von n.

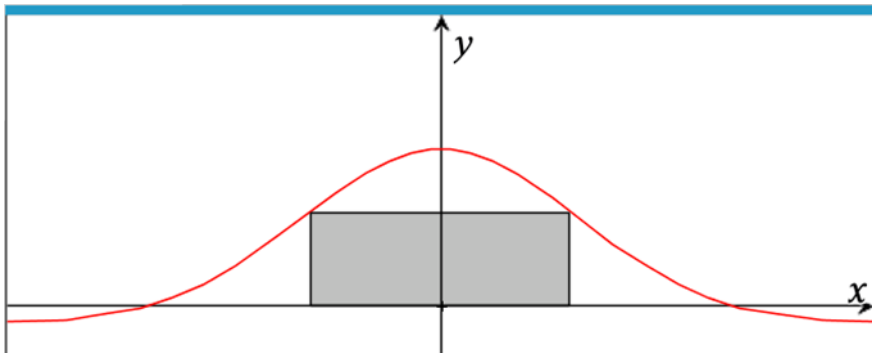
Die Gleichung $p(n) = \frac{1{,}00 - S_u(n)}{1{,}00} < 0{,}01$ lässt sich mit einem CAS im Allgemeinen nicht lösen. Eine numerische Lösung mit Einschränkung des Suchintervalls auf $[40;\infty[$ führt zur Lösung $n = 49$.
Alternativ findet man mit Hilfe einer Wertetabelle $p(48) = 0{,}01022$ und $p(49) = 0{,}00992$.

Also ist $n = 49$ die minimale Anzahl von Spalten, sodass sich das vom CAS ermittelte Ergebnis um weniger als 1% vom computergestützten Ergebnis unterscheidet.

3

© 2025 T^3 Deutschland

Ein alternativer Fensterentwurf sieht ein rechteckiges Fenster vor.

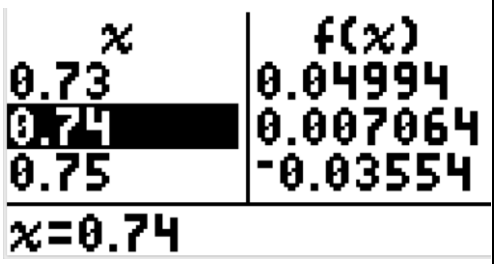


WTR	CAS
Gesucht ist ein rechteckiges Fenster mit größtmöglichem Flächeninhalt. Zeigen Sie, dass für eine Breite des Fensters von 1,48 m näherungsweise die maximale Fensterfläche entsteht. Berechnen Sie für diesen Fall die Maße des Fensters und den Flächeninhalt.	Gesucht ist ein rechteckiges Fenster mit größtmöglichem Flächeninhalt. Bestimmen Sie die Maße und den Flächeninhalt eines solchen Fensters.

Kommentar:

Ohne CAS lässt sich die Gleichung für die notwendige Bedingung nicht exakt lösen.
Aber man kann auch mit einem WTR und der Wertetabellenfunktion die Gleichung $f'_{0,71;1,35}(x) = 0$ angenähert lösen. Dazu muss die händisch bestimmte Ableitungsfunktion eingegeben werden. Dann kann man im Tabellenmodus durch Intervallverfeinerung zeigen, dass die 1. Ableitung an der Stelle $x \approx 0,74$ einen Vorzeichenwechsel hat.

x	f(x)
0.7	0.180005
0.75	-0.03554
0.8	-0.24368



x	f(x)
0.73	0.04994
0.74	0.007064
0.75	-0.03554

x=0.74

Lösung WTR	Lösung CAS
Bei einer Breite von 1,48 ist $x = 0,74$ zu betrachten. Die Flächeninhaltsfunktion lautet	Der Flächeninhalt eines Rechtecks, welches vollständig unter dem Graphen liegt, berechnet sich über $A(x) = 2 \cdot x \cdot f_{0,71;1,35}(x)$ mit $x_1 < x < x_2$, wobei

$A(x) = 2 \cdot x \cdot f(x)$

$= 2 \cdot (-0{,}2 \cdot x + 1{,}35 \cdot X \cdot e^{-0{,}71 \cdot x^2})$

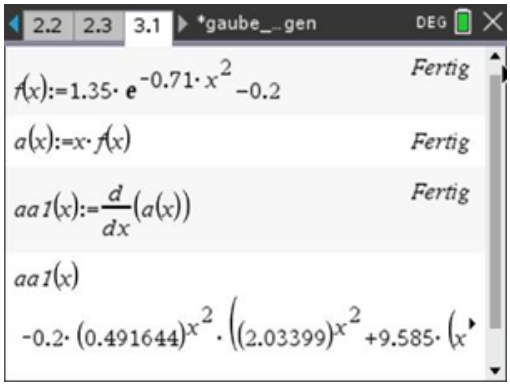
Die notwendige Bedingung zur Bestimmung eins lokalen Extremums lautet:
$A'(x) = 0$

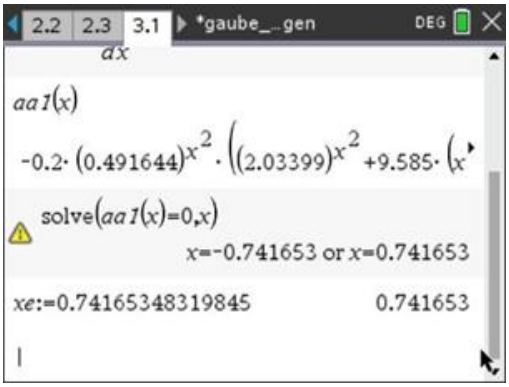
$A'(x) = 2 \cdot (-0{,}2 + 1{,}35 \cdot e^{-0{,}71 \cdot x^2} \cdot (1 - 1{,}42x^2) = 0$

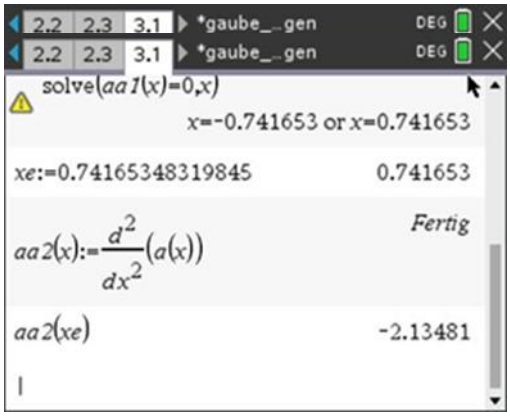
Das ist ohne ein CAS nicht exakt lösbar.
$A'(0{,}74) = 0{,}007064 \approx 0$, d.h. die notwendige Bedingung wäre erfüllt.
Aus $f(0{,}74) = 0{,}7151...$ und $A(0{,}74) = 1{,}0583...$ folgt, dass die Höhe des flächengrößten Fensters ungefähr 0,72 m und der entsprechende Flächeninhalt ungefähr 1,06 m^2 betragen.

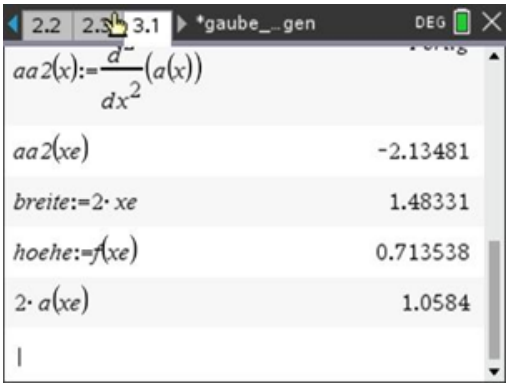
$x_{1,2}$ die Nullstellen der Funktion $f_{0,71;1,35}$ sind.
Den maximalen Flächeninhalt erhält man aus den Maximalstellen der Funktion A.
Die notwendige Bedingung ist: $A'(x) = 0$. Mit einem CAS erhält man die Lösung $x_E \approx 0{,}74$, d. h. x_E ist eine mögliche Extremstelle.
Aus $A'(x_E) = 0$ zusammen mit $A''(x_E) \approx -2{,}13$ (hinreichende Bedingung) erhält man, dass es sich um ein lokales Maximum handelt.
Wegen $2 \cdot x_E \approx 1{,}48$ und $f_{0,71;1,35}(0{,}74) = 0{,}715128$ sowie $A(0{,}74) = 1{,}05839$ erhält man:
Das Fenster mit dem größtmöglichem Flächeninhalt hat die Breite von ca. 1,48 m, die Höhe von ca. 0,72 m und einen Flächeninhalt von 1,06 m^2.

Screenshots CAS



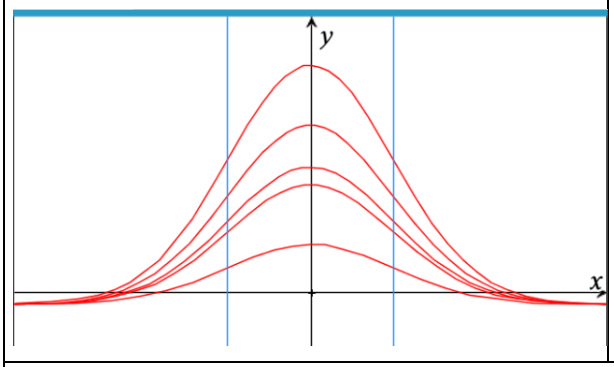






Alternativ gibt es auch die folgende Lösungsmöglichkeit

© 2025 T^3 Deutschland

WTR	CAS
4. Unabhängig vom genannten Kontext betrachten wir nun die Funktionenschar $f_k(x) = k \cdot e^{-0{,}71 \cdot x^2}$ mit $k > 0$. 4.1 Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters k auf die Lage der Hochpunkte der Schar. 4.2 Die zweite Ableitung der Funktionenschar lautet $f_k''(x) = (2{,}02 \cdot k \cdot x^2 - 1{,}42 \cdot k) \cdot e^{-0{,}71 \cdot x^2}$. Begründen Sie, dass alle Wendepunkte der Funktionenschar f_k auf Geraden parallel zur y-Achse liegen (siehe Bild unten). 	4 Unabhängig vom genannten Kontext betrachten wir nun die Funktionenschar $g_{a,k}(x) = k \cdot e^{-a \cdot x^2}$ mit $a,k > 0$ 4.1 Bestimmen Sie die Wendepunkte der Funktionenschar $g_{a,k}$ abhängig von den Parametern. 4.2 Beschreiben Sie, welchen Einfluss die Parameter k und a jeweils auf die Lage der Wendepunkte haben. Begründen Sie Ihre Aussagen.

Kommentar:

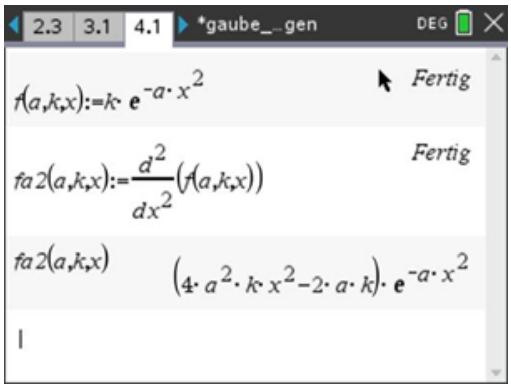
Mit einem CAS können die Auswirkung von zwei Parametern ohne zusätzliche graphische Hilfe untersucht werden. Entsprechende Dokumentation in der Lösung ist erforderlich!

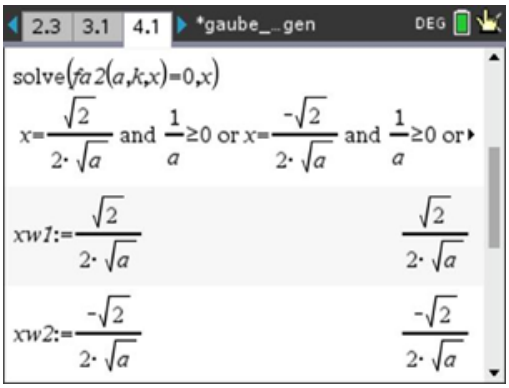
Lösung WTR	Lösung CAS
4.1	4.1

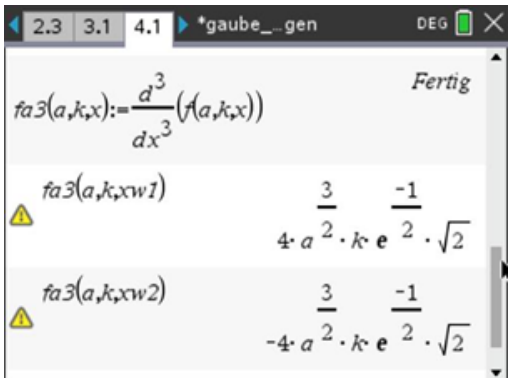
$f_k(x) = k \cdot e^{-0,71 \cdot x^2}$ mit $k > 0$, der Graph entspricht einer Glockenkurve mit der Extremstelle (Maximum) $x_{max} = 0$,
d.h. der Parameter streckt den Graphen in Richtung positiver y- Achse,
d.h. für größer werdende k wird der Funktionswert des Hochpunktes größer.

Notwendige Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes ist: $g_{a,k}''(x) = 0$.
Das CAS liefert zwei mögliche von k unabhängige Wendestellen $x_{W_{1,2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{a}}$.Da $k \neq 0$ bestätigt $g_{a,k}'''(x_{w_{1,2}}) = \pm \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^3} \cdot k}{\sqrt{e}}$ zusammen mit der notwendigen Bedingung die Existenz dieser Wendestellen: .
Die Koordinaten der Wendepunkte sind dann: $W_{1,2}\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{a}} \mid \frac{k}{\sqrt{e}} \right)$.

Screenshots CAS







4.2

$f_k''(x) = (2,02 \cdot k \cdot x^2 - 1,42 \cdot k) \cdot e^{-0,71 \cdot x^2}$, für alle Wendestellen gilt: $f_k''(x) = 0$.

$f_k''(x)$ wird null, wenn ein Faktor null wird:

(i) Für alle reellen x gilt: $e^{-0,71 \cdot x^2} > 0$.

(ii) Die Lösungen der Gleichung $2,02 \cdot k \cdot x^2 - 1,42 \cdot k = 0$ für k>0 sind un-

4.2

Der Parameter k streckt den Graphen entlang der positiven y- Achse, d.h. die Funktionswerte der Wendestellen werden mit größer werdenden k auch größer.

$g_{a,k}(x_w) = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot k$

Der Parameter a im Nenner sorgt dafür, dass sich für größer werdende a die Wendestellen immer mehr der y-Achse nähern und der An-

© 2025 T³ Deutschland

abhängig von k : $x_w = \pm\sqrt{\frac{1,42}{2,02}} \approx \pm 0,838$. Aus der Zeichnung (oder anhand des Vorzeichenkriteriums) kann man erkennen, dass es sich tatsächlich um Wendestellen handelt. Die Wendepunkte liegen also alle auf den beiden Geraden $x = \sqrt{\frac{1,42}{2,02}}$ und $x = -\sqrt{\frac{1,42}{2,02}}$.	stieg in den Wendestellen größer wird. $x_w = \pm\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{a}}$.

Zufluss – Abfluss

Die Abituraufgaben in Analysis der letzten Jahre enthalten wieder einen innermathematischen - und einen passenden Anwendungsteil. Diese Aufgabe wurde nach dieser Struktur entwickelt. Die innermathematischen Aufgabenstellungen prüfen hier, ohne den Transfer vom anwendungsbezogenen Kontext in die Mathematik, Standards und Kompetenzen der Infinitesimalrechnung ab.

Durch den Einsatz von CAS ist in vielen Aufgabenstellungen z. B. bei fehlender Lösungsstrategie ein „Herantasten“ an das Problem möglich. Systematisches Probieren, z. B. durch den Einsatz eines Schiebereglers, führen zu Näherungslösungen, die eine teilweise Bewertung ermöglichen. In den meisten Aufgabenstellungen ist eine sofortige Reflektion der Lösung möglich.
Auch sind Aufgaben so gestellt, dass unterschiedliche Lösungsstrategien zum Erfolg führen.

1. Gegeben ist eine Funktion f durch $f(x) = \frac{x^4}{125} - \frac{2 \cdot x^2}{5} + 5$ mit $x \in \mathbb{R}$.
   Der zugehörige Graph ist G.

   1.1. Geben Sie mindestens 3 charakteristische Eigenschaften des Graphen G an und begründen Sie diese anhand des Funktionsterms.

   1.2. An der Stelle $x = -2$ wird eine Tangente t an den Graphen G gelegt.
   Zeigen Sie mit Mitteln der Differentialrechnung, dass durch die Gleichung $t(x) = \frac{168}{125} \cdot x + \frac{777}{125}$ die Tangente t beschrieben werden kann.
   Die Tangente t schneidet den Graphen G in zwei Punkten. Die negative Schnittstelle ist x_1, die Berührstelle ist x_B.
   Berechnen Sie die Stelle u, in der der Abstand der Funktionswerte $t(u)$ und $f(u)$ im Intervall $x_1 < u < x_B$ am größten ist.

   1.3. Erläutern Sie, was man unter einem Sattelpunkt versteht.
   Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f.
   Geben Sie eine Gleichung für F an, sodass ein Sattelpunkt des Graphen auf der x-Achse liegt.
   Begründen Sie anhand der Gleichung von f: Der Graph von F besitzt zwei Sattelpunkte.

   1.4. Betrachten Sie für folgende Aufgaben die Funktionen
   f_a mit $f_a(x) = \frac{x^4}{25 \cdot a} - \frac{2 \cdot x^2}{a} + 5$ mit $x, a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.
   Der jeweils zugehörige Graph ist G_a. Gegeben ist weiterhin eine Gerade g mit $g(x) = 2$.

   (i) Bestimmen Sie den Wert von a so, dass die Gerade g Graphen G_a in zwei Punkten berührt.

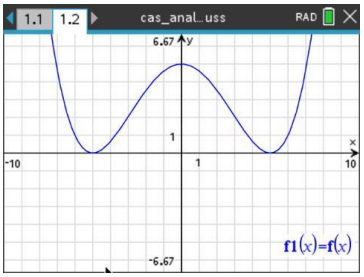
   (ii) Im Intervall $[-4{,}5; 4{,}5]$ schneidet die Gerade g den Graphen G_a in zwei Punkten P_1 und P_2.
   Geben Sie einen Wert für a an, so dass der Abstand P_1P_2 genau 4 beträgt.

   (iii) Untersuchen Sie, ob ein a existiert, so dass G_a eine parallel zu g verlaufende Gerade an der Stelle $x = -2$ unter einem Winkel von 45° schneidet.

Lösungen:

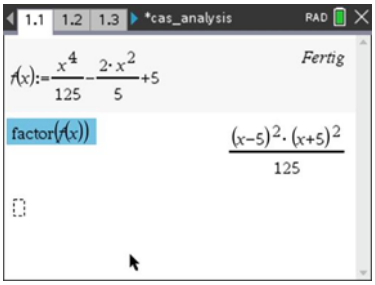
© 2025 T³ Deutschland

1.1 *Bestimmte Eigenschaften des Graphen lassen sich aus der gegebenen Funktionsgleichung schlussfolgern. Erkennen die Schülerinnen und Schüler keine oder zu wenige Eigenschaften, ist eine Visualisierung des Graphen hilfreich, denn so kann die mathematische Darstellung der Eigenschaft in der Gleichung gefunden werden.*



Verändern die Schülerinnen und Schüler die Darstellung der Gleichung hin zum Produkt von Polynomen, ergeben sich aus dieser Darstellung ebenfalls Eigenschaften des Graphen.
Durch Faktorisierung erhält man:

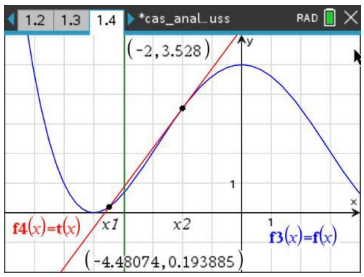
$$f(x)=\frac{x^4}{125}-\frac{2\cdot x^2}{5}+5=\frac{(x-5)^2\cdot(x+5)^2}{125}$$



Mögliche Antworten (ohne Anspruch auf Vollständigkeit):

- *Achsensymmetrie zur y-Achse, da nur gerade Exponenten von x auftreten*
- *Schnittpunkt mit der y-Achse bei* $P_y(0\,|\,5)$ *wegen* $f(0)=5$
- *zwei doppelte Nullstellen bei* $x=\pm 5$ *wegen der Form der Zählerfaktoren*
- *nur nichtnegative Funktionswerte wegen der Quadrate in der Zählerfunktion*
- *Graph hat höchstens 3 Extremwerte, da f vom Grad 4 ist*
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$, *da der Term* $\frac{1}{125}x^4$ *schneller gegen* $+\infty$ *strebt als* $-\frac{5}{2}x^2$ gegen $-\infty$.

1.2 *Hinweis: Die Aufgabenstellung erlaubt nicht das Verwenden von Befehlen, die die Tangentengleichung direkt ausgeben.*



$$t(x)=m\cdot x+n \text{ und } m=f'(-2)=\frac{168}{125}$$

$$f(-2)=f'(-2)\cdot(-2)+n\to n=\frac{777}{125}$$

Eine Visualisierung hilft beim Aufstellen der Zielfunktion.

$$d(u)=t(u)-f(u)$$

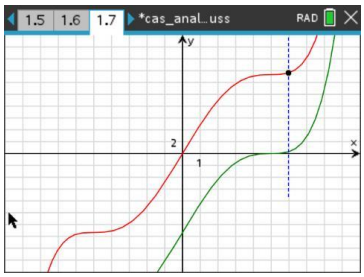
Notwendige Bedingung: $d'(u)=0$ *.D. h.* $d'(u)=\frac{4}{125}u^3+\frac{4}{5}u+\frac{168}{125}=0$

$$u=-\sqrt{22}+1\vee u=-2\vee u=\sqrt{22}-1$$

An Hand des Graphen erkennt man, dass nur die Lösung $u=\sqrt{22}-1\approx -3{,}69$ *in Frage kommt.*
Alternative Berechnungen mit z. B. $f_{Max}(d(u))$ *unter Berücksichtigung des Definitionsbereiches sind möglich.*

1.3 *Sattelpunkte sind Wendepunkte mit waagerechter Tangente bzw. mit Steigung null.*

$F(x)=\int f(x)dx=\frac{1}{625}x^5+5x+C$



Ausgehend vom Graphen der Stammfunktion für $C=0$ erkennt man, dass eine Verschiebung parallel zur y-Achse erfolgen muss, z. B.:

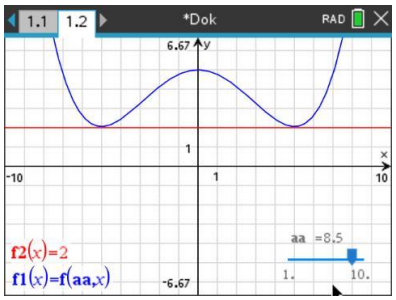
$F(5)=0\rightarrow C=\frac{40}{3}$

Begründung:

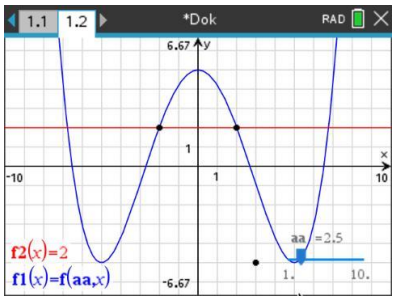
z. B.: die Funktion f hat zwei doppelte Nullstellen

1.4

(i) *da die Nullstellen der 1. Ableitung $x_{1/2}=\pm 5$ unabhängig von a sind, folgt aus $f_a(5)=2$, dass $a=\frac{25}{3}$*



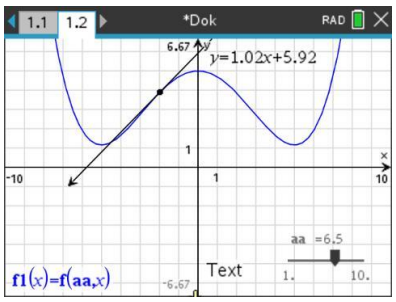
(ii) $f_a(2)=2$, *also* $a=\frac{184}{75}$.



(iii) *Anstieg der Tangente in $x=-2$ soll 1 sein, da Graph von f_a hier streng monoton steigend ist.*

$f_a'(-2)=1\rightarrow a=\frac{168}{25}$

Es gibt demnach einen Wert für a, so dass die Bedingung erfüllt ist.



2. In einer sehr trockenen Gegend mündet ein Bach, der die meiste Zeit ausgetrocknet ist, in einen See. Wissenschaftler beobachten über einen längeren Zeitraum die Wassermenge in diesem See. Dazu haben sie am Zufluss des Baches in den See ein Messgerät (Durchflusssensor) installiert, das die mittlere Geschwindigkeit z(t) des zufließenden Wassers in $\frac{1000\,\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$ misst.

Während eines zehnstündigen Unwetters verbunden mit Starkregen wurde diese Fließgeschwindigkeit z(t) protokolliert und aufgrund der Daten näherungsweise durch die Gleichung $z(t)=f(t-5)=\frac{(t-5)^4}{125}-\frac{2\cdot(t-5)^2}{5}+5,\ 0\le t\le 10$ (t in Stunden) beschrieben.

2.1 Interpretieren Sie folgende Angaben jeweils im Sachzusammenhang:

© 2025 T³ Deutschland

(i) $z(2) \approx 2$

(ii) $z'(2) \approx 1{,}5$

(iii) $\int_0^2 Z(t)dt \approx 1{,}5$

2.2 Berechnen Sie den Zeitpunkt, in dem die Änderung der Fließgeschwindigkeit des zufließenden Wassers am größten ist.

2.3 Berechnen Sie, um wie viele m^3 Wasser der Inhalt des Reservoirs während des Regens angewachsen ist.

2.4 Aus dem Reservoir sollen 1000 m^3 Wasser kontrolliert abgelassen werden. Vereinfacht wird diese Fließgeschwindigkeit durch die Funktion h_k mit

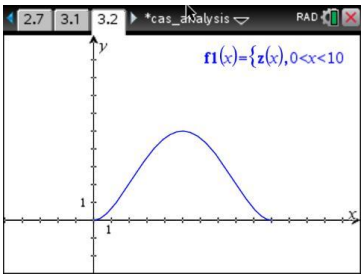
$h_k(x) = \frac{k^3}{(x-4)^2+k^2}$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $k > 0$ modelliert.

Die äußeren Bedingungen erfordern, dass eine maximale Fließgeschwindigkeit von $2000\,\frac{m^3}{h}$ nicht überschritten wird.

Bestimmen Sie für diesen maximalen Wert k.
Ermitteln Sie die Zeit, nach der die 1000 m^3 abgeflossen sind.

Lösung:

2 Visualisierung z(t)



2.1

(i) Die Fließgeschwindigkeit zwei Stunden nach Beginn des Regens beträgt: $v \approx 2000\,\frac{m^3}{h}$.

(ii) Die Änderung der Fließgeschwindigkeit zwei Stunden nach Beginn des Regens: $a \approx 1500\,\frac{m^3}{h^2}$.

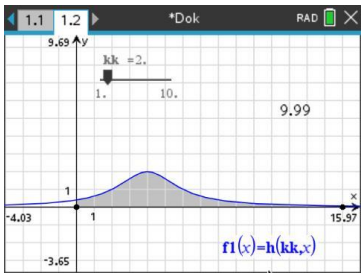
(iii) Die in den ersten zwei Stunden nach Beginn zugeflossene Wassermenge beträgt: $v \approx 1500\,m^3$

2.2 Die betragsmäßig größte Änderung erhält man in den Wendestellen der Funktion bzw. in den Randstellen des betrachteten Intervalls:
Anhand der Zeichnung kann man ersehen, dass die Randstellen nicht betrachtet werden müssen.
$z''(t) = 0 \rightarrow t \approx 2{,}11\,h$ bzw. $t \approx 6{,}80\,h$.
Nach 2 Stunden und 7 Minuten nimmt die Änderung der Fließgeschwindigkeit maximal zu, nach 6 Stunden und 48 Minuten nimmt sie maximal ab.

2.3 $\int_0^{10} z(t) = \frac{80}{3} \approx 26{,}7$.

Also sind rund 26700 m^3 Wasser zugeflossen.

2.4 *Das Maximum der Fließgeschwindigkeit wird nach vier Stunden erreicht:*



$$h'(x)=\frac{-2\cdot k^3\cdot(x-4)}{(x^2-8x+k^2+16)^2}\rightarrow x=4 \text{ bzw. } k=0$$

$h(4)=2\rightarrow k=2$

Zeitpunkt, bis zu dem 1000 m^3 Wasser abgeflossen sind:

$\int_0^t h(x)dx=10\rightarrow t\approx 15{,}12\,h$, *d.h., nach 15 Stunden und 8 Minuten.*

Interpretiert man den Zufluss durch positive und den Abfluss durch negative Funktionswerte, wären die Lösung $k=-2$ *und analoge Berechnungen möglich.*

© 2025 T³ Deutschland

Doping

Diese Aufgabe wurde in ähnlicher Form im hessischen Landesabitur 2014 gestellt. Sie wurde hier aus mehreren Gründen gewählt.

- *Es handelt sich um einen aktuellen Sachzusammenhang mit realitätsnahem Zahlenmaterial.*
- *Je nach Unterrichtsverlauf bzw. Lehrplan kann alternativ zum Hypothesentest mit einem Prognose- und Vertrauensintervall gearbeitet werden.*
- *Die im letzten Teil durchgeführte anonyme Befragung bietet einen sinnvollen Einsatz von Baumdiagrammen und kann je nach Zeitrahmen oder Anspruchsniveau ganz oder teilweise gestellt werden.*

Im Kampf um Doping sollen bei den Olympischen Sommerspielen in Tokio mit neuen Verfahren „saubere Spiele“ gewährleistet werden. Es sollen 6000 Tests durchgeführt werden.

Einige Experten zweifeln allerdings an der Effizienz von Dopingtests: Weltweit würden pro Jahr ca. 300 000 Dopingtests durchgeführt, davon nur 0,3% mit positivem Ergebnis. Dies stehe im Widerspruch zu Studien, bei denen ein wesentlich höherer Anteil von Sportlern Doping zugeben.

1. Nehmen Sie an, dass es sich bei den geplanten 6000 Einzeltests jeweils um Bernoulli-Experimente handelt.

   1.1. Geben Sie an, was man unter einem Bernoulli-Experiment und unter einer Bernoulli-Kette versteht.
   Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der positiven Tests.
   Geben Sie an, welche Bedingung erfüllt sein muss, damit X als binomialverteilt angesehen werden kann.
   Ist das tatsächlich bei den Olympischen Spielen der Fall? Geben Sie kurz Ihre Meinung dazu an.

   1.2. Wir nehmen im Folgenden an, dass es sich bei X um eine Binomialverteilung handelt. Erläutern Sie die Bedeutung der folgenden Rechnung im Sachzusammenhang:
   $$\sum_{i=15}^{25}\binom{600}{i}\cdot 0{,}003^{i}\cdot 0{,}997^{600-i}\approx 0{,}748$$

Lösung:

1.1 Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsversuch mit nur 2 Ausgängen. Bei einer Bernoulli-Kette wird ein Bernoulli-Experiment n-mal wiederholt, sodass die Durchführungen voneinander unabhängig sind.
X ist die Anzahl der positiven Tests bei 6000 Dopingproben.
X kann als binomialverteilt betrachtet werden, wenn die Wahrscheinlichkeit für einen positiven Test gleichbleibt und nur zwei Ergebnisse möglich sind. Aufgrund des hohen n kann es als Ziehen mit Zurücklegen aufgefasst werden.

1.2 Diese Summe gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass unter 6000 Dopingtests mindestens 15 und höchstens 25 Proben positiv sind. Diese Wahrscheinlichkeit beträgt 74,8%. Die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit p für ein positives Testergebnis ist dabei 0,3%.

2. **Alternative 1: Prognose- und Vertrauensintervalle**

   Ein neues Testverfahren verspricht eine zehnmal höhere Rate an überführten Sportlern.

Bei einer internationalen Sportveranstaltung werden 352 Sportler und Sportlerinnen auf verbotene Substanzen getestet, 12 davon positiv.

2.1. Ermitteln Sie aus diesen Ergebnissen einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Sportler oder eine Sportlerin bei dieser Sportveranstaltung gedopt hat.

2.2. Beurteilen Sie mit Hilfe eines Prognoseintervalls zur Sicherheitswahrscheinlichkeit von ca. 95%, ob das Versprechen des neuen Testverfahrens mit dem Ergebnis der Stichprobe verträglich ist und geben Sie das Prognoseintervall an.

2.3. Die Größe des Prognoseintervalls ist unbefriedigend. Untersuchen Sie, mit welchen Maßnahmen die Länge des Intervalls annähernd halbiert werden kann.

Lösung

2.1 Die relative Häufigkeit h_n für ein positives Testergebnis beträgt $\frac{12}{352} \approx 0{,}034$. Bei hinreichend großem n kann die relative Häufigkeit als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit verwendet werden. Dies ist eine Punktschätzung.

2.2 Einem Vertrauensintervall von ca. 95% entspricht ca. einer 2σ-Umgebung um den Erwartungswert (genauer einer $1{,}96\sigma$-Umgebung). p sei die unbekannte Wahrscheinlichkeit. Dann gilt: $P(|X - n \cdot p|) \leq 2 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ und damit für das Prognoseintervall

$$|h_n - p| \leq 2\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

Für die Lösung dieser Ungleichung mit CAS wird der Wert von h_n aus Aufgabenteil 2a) verwendet. Das CAS liefert die Lösungen $p_1 \approx 0{,}0193$ bzw. $p_2 \approx 0{,}0591$ und damit die Grenzen des 2σ-Intervalls. Da das Versprechen des neuen Testverfahrens von p = 0,03 in diesem Intervall liegt, ist das Ergebnis verträglich mit dem Versprechen des neuen Testverfahrens.
Das heißt, das Ergebnis der Stichprobe ist auf dem 95% Vertrauensintervall verträglich mit der getroffenen Aussage des neuen Testverfahrens.

2.3 Das Prognoseintervall wird umso kleiner, je größer n ist. Man muss also die Anzahl der Dopingtests erhöhen. Für n = 1000 ergibt sich [0,024; 0,047], für n = 1500 ergibt sich [0,026; 0,045], damit ist eine Halbierung in etwa erreicht.

3. **Alternative 2: Hypothesentest**

Ein renommiertes Labor verspricht mit ihrem moderneren Testverfahren, die Quote der positiven Ergebnisse auf 1% zu erhöhen.
In einem ersten Test mit 1000 Athleten eines Leichtathletikwettkampfes werden 6 Sportlerinnen und Sportler des Dopings überführt.
Zur Überprüfung ihres Versprechens untersucht das Labor den folgenden (einseitigen) Test auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$:
Die Nullhypothese ist $p_0 = 0{,}01$ mit der Alternativhypothese $p_1 < 0{,}01$.
Ein Heidelberger Molekularbiologe ist skeptisch und präsentiert eine eigene Untersuchung:
Nullhypothese: $p_0 = 0{,}003$, Alternativhypothese: $p_1 > 0{,}003$, Signifikanzniveau: $\alpha = 0{,}05$

3.1. Bestimmen Sie für beide Testmethoden den Verwerfungsbereich und den Nichtverwerfungsbereich[11] der Nullhypothese und beurteilen Sie anhand der Ergebnisse das neue Testverfahren.

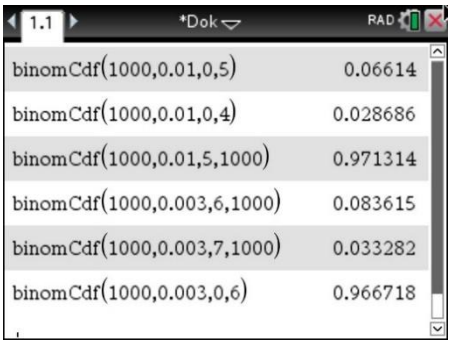
[11] Der Nichtverwerfungsbereich wird auch häufig als Annahmebereich bezeichnet.

 © 2025 T³ Deutschland

3.2. Beschreiben Sie anhand eines der beiden Testverfahren die Fehler 1. und 2. Art im Sachzusammenhang. Bestimmen Sie anschließend für beide Testverfahren den Fehler 2. Art. Verwenden Sie für diese Berechnung die Wahrscheinlichkeit der Nullhypothese des jeweils anderen Labors.

Lösung:

3.1 Es gilt: p = 0,01, n = 1000
Die Nullhypothese wird verworfen, wenn gilt:
P(X ≤ k) ≤ 0,05 . Für größere Werte von k wird die Nullhypothese angenommen. Wegen P(X ≤ 5) ≈ 0,066 und P(X ≤ 4) ≈ 0,029 ist der Verwerfungsbereich V = {0,....4} und der Nichtverwerfungsbereich ist A = {5,....1000}.
Damit sieht sich das Labors bestätigt.
Es gilt: p = 0,003, n = 1000
Die Nullhypothese wird verworfen, wenn gilt: P(k ≤ X ≤ 1000) ≤ 0,05 .
Für kleinere Werte von k wird die Nullhypothese angenommen.
Wegen P(6 ≤ X ≤ 1000) ≈ 0,084 und P(7 ≤ X ≤ 1000) ≈ 0,033 ist der Verwerfungsbereich V = {7, ...,1000} und der Nichtverwerfungsbereich $\overline{V}$ = {0, ... 6}. Dies stützt die Vermutung, dass das neue Verfahren nicht besser ist.
Für beide Testverfahren liegt das Stichprobenergebnis im Nichtverwerfungsbereich von H_0. Beide Institute fühlen sich in ihrer Ansicht bestätigt. Das Verfahren lässt hier keine eindeutigen Schlussfolgerungen zu.
Kommentar:
Für die Berechnung des Verwerfungs- und Nichtverwerfungsbereichs ist ein CAS zweckmäßig, im Screenshot wird das Verfahren des systematischen Probierens dargestellt.



3.2 Labor: Fehler 1. Art: Wenn weniger als 5 positive Dopingtest erfolgen, wird die Nullhypothese abgelehnt, auch wenn das neue Verfahren besser ist.
Fehler 2. Art: Bei mehr als 4 Dopingfällen fühlt sich das Labor bestätigt, obwohl das neue Verfahren nicht besser ist. Dieser Fehler liegt hier bei P(5 ≤ X ≤ 1000) ≈ 0,184.

4. Ein amerikanischer Dopingexperte machte vor einigen Jahren die drastische Aussage: „Zwischen 30% und 50% aller Athleten sind gedopt“.
Mit Hilfe einer anonymen Online-Umfrage soll die Aussage nach der folgenden Regel überprüft werden:
Der Athlet würfelt zunächst einmal mit einem normalen Spielwürfel. Erhält er die Ziffern 1, 2 oder 3, so beantwortet er die Frage mit NEIN, bei der Ziffer 4 oder 5 mit JA und bei der Ziffer 6 wahrheitsgemäß mit JA oder NEIN.
Von 3000 befragten Sportlern antworteten 1264 mit JA.

4.1. Stellen Sie das Testverfahren mithilfe eines Baumdiagramms dar und ermitteln Sie daraus den Anteil der gedopten Athleten.

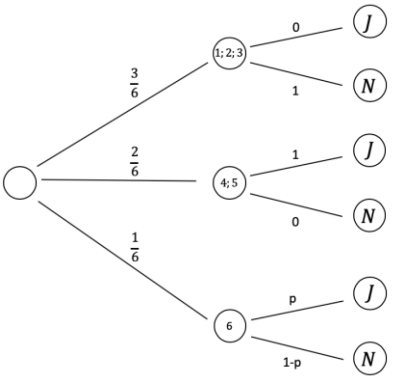
4.2. Einige Athleten befürchten, bei einer Antwort JA eher des Dopings verdächtigt zu werden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Athlet gedopt ist unter der Voraussetzung, dass er mit JA geantwortet hat. Verwenden Sie dazu die in 4.1 bestimmte Dopingwahrscheinlichkeit p.
Falls Aufgabe 4.1 nicht bearbeitet wurden, wählen Sie p=0,52.

Lösung:

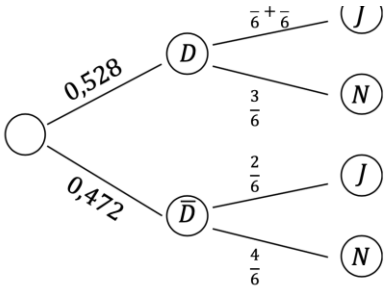
4.1 Das Baumdiagramm baut sich wie folgt auf:
p kann berechnet werden:

$$\frac{1}{6}\cdot p+\frac{2}{6}=\frac{1264}{3000} \quad \Rightarrow \quad p\approx 0{,}528\,, \quad \text{d.h.,}$$

der Anteil der gedopten Athleten beträgt 52,8%.



Hier müssen bedingte Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden.



$$P_{gedopt}(JA)=\frac{\frac{3}{6}\cdot 0{,}528}{\frac{3}{6}\cdot 0{,}528+\frac{2}{6}\cdot 0{,}472}\approx 0{,}627$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Athlet, der mit JA geantwortet hat, wirklich Dopingmittel benutzt, beträgt ca. 63%.
(0,619 bzw. ca. 62% für p = 0,52)

Erstellt von Sibylle Stachniss-Carp ergänzt von Hubert Langlotz

© 2025 T³ Deutschland

Internetnutzung

Kommentar

Der Aufgabenteil 1 ist eine Standardaufgabe, die auch im hilfsmittelfreien Teil eingesetzt werden kann. Nach Fragen im Zusammenhang mit der Binomialverteilung wird mit einem Baumdiagramm bzw. einer Vierfeldertafel gearbeitet. Die Bearbeitung von Vertrauens- und Prognoseintervallen beschließt diese Aufgabe, die somit sowohl Themen der Sekundarstufe 1 als auch der Sekundarstufe 2 (beurteilende Statistik) umfasst.

Die Aufgabenteile 1-3 sind eine Adaption einer niedersächsischen Abituraufgabe aus dem Jahr 2017, ergänzt wurde der Aufgabenteil 4 insbesondere um die Problematik der beiden Begriffe Prognose- und Konfidenzintervall zu hinterfragen.

Eine Studie hat im Hinblick auf die Internetnutzung von Jugendlichen in Deutschland im Alter zwischen 14 und 18 Jahren vier Typen festgelegt. Die Benennung dieser Internettypen beschreibt schlagwortartig das Hauptanliegen der Jugendlichen bei der Nutzung des Internets. Die durch die Studie ermittelte Verteilung wird im Folgenden angegeben:

Internettyp	Info-Nutzer	Medien-konsumenten	Digitale Bewohner	Gelegenheits-nutzer
Anteil der Jugendlichen	31 %	24 %	26 %	19 %

Es wird nun modellhaft vorausgesetzt, dass die in der Tabelle angegebenen Anteile im Folgenden Wahrscheinlichkeiten darstellen.

1. Bei einer Straßenumfrage in Deutschland werden Jugendliche zufällig ausgewählt und danach befragt, wie sie das Internet nutzen.
   Erläutern Sie die Bedeutung des Terms im Sachzusammenhang:
   $$\binom{50}{11} \cdot 0{,}24^{11} \cdot 0{,}76^{39} + \binom{50}{12} \cdot 0{,}24^{12} \cdot 0{,}76^{38} + \binom{50}{13} \cdot 0{,}24^{13} \cdot 0{,}76^{37}$$

Lösungen:

1. Im Sachzusammenhang beschreibt der Term die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 50 befragten Jugendlichen mindestens 11 und höchstens 13 „Medienkonsumenten" sind.

2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 50 Jugendlichen
   - höchstens sechs „Info-Nutzer" sind,
   - mehr als zehn „Info-Nutzer" sind.

Lösungen:

2. Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der „Info-Nutzer" und ist binomialverteilt mit $n = 50$ *und* $p = 0{,}31$ *. Daraus ergeben sich mit Hilfe der Rechnerfunktionen die gesuchten Wahrscheinlichkeiten*

$$P(Y \le 6) = \sum_{k=0}^{6} \binom{50}{k} \cdot 0{,}31^k \cdot 0{,}69^{50-k} \approx 0{,}0016$$

$$P(Y > 10) = \sum_{k=11}^{50} \binom{50}{k} \cdot 0{,}31^k \cdot 0{,}69^{50-k} \approx 0{,}941$$

Die Wahrscheinlichkeit, unter 50 Jugendlichen höchstens sechs „Info-Nutzer“ zu finden, beträgt ungefähr 0,16 %.
Die Wahrscheinlichkeit, unter 50 Jugendlichen mehr als zehn „Info-Nutzer“ zu finden, beträgt ungefähr 94,1 %.

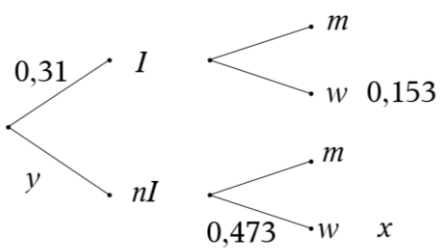
3. Der Anteil der weiblichen „Info-Nutzer“ unter den Jugendlichen beträgt 15,3 %. Betrachtet man die anderen Internettypen zusammen, so beträgt unter diesen der Anteil der weiblichen Jugendlichen 47,3 %.

   Ermitteln Sie den Anteil

   - der männlichen „Info-Nutzer“ unter allen Jugendlichen,
   - der „Info-Nutzer“ unter den männlichen Jugendlichen.

Lösungen:

3. Erstellung eines Baumdiagramms unter Nutzung der bekannten Angaben. (I:= Infonutzer, nI:= kein Infonutzer)



entsprechend die Vierfeldertafel

	w	m	
I	0,153		0,31
nI	x		y
			1

Der Anteil der männlichen „Info-Nutzer“ unter allen Jugendlichen: $P(m \cap I) = 0{,}31 - 0{,}153 = 0{,}157$.

Der Anteil aller weiblichen Jugendlichen ist $P(w) = 0{,}153 + 0{,}69 \cdot 0{,}473 = 0{,}47937$.

Daraus ergibt sich der Anteil der männlichen Jugendlichen zu $P(m) = 1 - 0{,}47937 = 0{,}52063$ *und damit als Anteil der „Info-Nutzer“ unter den männlichen Jugendlichen* $P(I \mid m) = \dfrac{0{,}157}{0{,}52063} = 0{,}301558$.

Der Anteil der männlichen „Info-Nutzer“ unter den Jugendlichen liegt also bei ungefähr 15,7 % und der Anteil der „Info-Nutzer“ unter den männlichen Jugendlichen liegt bei ungefähr 30,1 %.

© 2025 T³ Deutschland

4. Die Schülerinnen und Schüler eines Mathematikkurses möchten den Anteil der „Gelegenheitsnutzer“ an ihrer Schule aufgrund einer Stichprobe schätzen. Sie befragen 200 Schüler von denen 44 angeben Gelegenheitsnutzer zu sein.

   4.1 Ermitteln Sie hieraus ein Vertrauensintervall für den Anteil der Gelegenheitsnutzer an der Schule.

   4.2 Beurteilen Sie mithilfe eines 95%-Prognoseintervalls, ob der Anteil der Gelegenheitsnutzer an dieser Schule statistisch verträglich zur deutschlandweiten Verteilung ist.

   4.3 Ermitteln Sie, wie viele Schüler mindestens befragt werden müssten, damit das 95%-Vertrauensintervall eine Länge von höchstens 0,06 hat.

Lösungen:

4.1 Schätzwert: $\frac{44}{200} = 0{,}22$

Berechnung eines Vertrauensintervalls (95%): $P(|X - n \cdot p|) \le 1{,}96 \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.

Umformung und Einsetzen des Schätzwertes ergibt $(0{,}22 - p)^2 \le 1{,}96^2 \cdot \frac{p \cdot (1-p)}{200}$.

Diese Gleichung wird mit CAS gelöst, es ergibt sich ein Intervall von [0,168; 0,282]. An der Schule kann (mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit von höchstens 5%) der Anteil der Gelegenheitsnutzer zwischen 17% und 28% liegen.

Hinweis: Es kann auch mit dem $\frac{1}{\sqrt{n}}$ *-Gesetz. [0,149; 0,291] oder mit der* 2σ *- Umgebung [0,167; 0,284] gerechnet werden.*

4.2 Vergleich mit dem 95%-Prognoseintervall zu $p = 0{,}19$

$(h - 0{,}19)^2 \le 1{,}96^2 \cdot \frac{0{,}19 \cdot (1 - 0{,}19)}{200}$

mit einem CAS erhält man die Lösungen $h \approx 0{,}136$ *oder* $h \approx 0{,}244$, *also [0,136; 0,244].*

0,22 liegt in diesem Prognoseintervall und ist deshalb statistisch verträglich mit p = 0,19.

4.3 Um die Grenzen des 95%- Konfidenzintervall in allgemeiner Form zu bestimmen, wird z. B.

$|h - p| = 2 \cdot \frac{\sqrt{p \cdot (1-p)}}{\sqrt{n}}$ *mit dem CAS nach p aufgelöst und dabei für n experimentell der Wert so lange angepasst, bis man eine Intervallbreite von 0,06 erhält.*

Die Differenz der Intervallgrenzen wird für $h = 0{,}22$ *nach aufgelöst:* $n \ge 761$

Eine experimentelle Lösung könnte so aussehen:

$n = 500$ *: Intervall [0,186; 0,258]. Intervallbreite:* $0{,}259 - 0{,}185 = 0{,}072$

$n = 750$ *: Intervall [0,192; 0,251]. Intervallbreite:* $0{,}251 - 0{,}192 = 0{,}059$

$n = 740$ *: Intervall [0,192; 0,251]. Intervallbreite:* $0{,}251 - 0{,}192 = 0{,}059$

$n = 732$ *: Intervall [0,191495; 0,251429].*
Intervallbreite: $0{,}251429 - 0{,}191495 = 0{,}059934$

Es müssen also mindestens 732 (ca. 740) Personen befragt werden, um ein Vertrauensintervall mit einer Breite von höchstens 0,06 zu erhalten.

Sollte z. B. mit dem $\frac{1}{\sqrt{n}}$*-Gesetz gerechnet worden sein, ergibt sich für n = 1112.*

Erstellt von Sibylle Stachniss-Carp, ergänzt von Hubert Langlotz.

Anhang 1:
Stellungnahme des Lehrernetzwerks T³ zum Zertifizierungsprozess von MMS

02.04.2025

Das Lehrernetzwerk T³ Deutschland[12] hat mit Freude zur Kenntnis genommen, dass sich die GDM und der MNU mit den Bemühungen der KMK und des IQB zu einer Vereinheitlichung des Einsatzes von digitalen Hilfsmitteln im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht und den Abiturprüfungen kritisch auseinandergesetzt hat. In der Arbeitsgruppe von T³ Deutschland arbeiten Lehrkräfte aus allen Bundesländern, die über eine langjährige Berufserfahrung und Expertise im unterrichtlichen und fachübergreifenden Einsatz von Computeralgebrasystemen und modularen Mathematiksystemen (MMS) verfügen. Sie erstellen Materialien und führen Fortbildungen zum Einsatz von digitalen Werkzeugen für Lehrkräfte durch. Aus unserer Sicht bezieht sich die kritische Auseinandersetzung von GDM und MNU mit den bisher von der KMK und dem IQB veröffentlichten Informationen zu MMS vor allem auf die Befürchtung von Rückschritten in der Qualität des Mathematikunterrichts. Die in den KMK-Papieren aufgeführten Einschränkungen eines MMS in Prüfungssituationen verunsichern die Lehrkräfte. Im Folgenden werden wir ergänzend unsere Meinung in der aktuellen Entwicklung näher erläutern.

1. Intransparenz hinsichtlich der Anforderungen an ein MMS und bezüglich des Zertifizierungsprozesses

Wie in der Stellungnahme der GDM ausführlich beschrieben, sind MMS eine nur in Deutschland vorgesehene Art digitaler Hilfsmittel, die im Vergleich zu bislang eingesetzten Computeralgebrasystemen oder Tabellenkalkulationsprogrammen deutlich eingeschränkt werden. Grundsätzlich ist das Konzept eines MMS mit den Möglichkeiten verschiedener Applikationen sowie eine Einschränkung der Hilfsmittel auf die unterrichtsrelevanten Funktionalitäten zu begrüßen, doch beides muss wissenschaftlich begleitet und auf die Inhalte der Bildungsstandards abgestimmt sein. Der Eindruck der T³Arbeitsgruppe ist, dass diese Begleitung aktuell nicht ausreichend stattfindet, sodass die Vorgaben in den diesbezüglichen Dokumenten der KMK bzw. des IQB häufig für uns nicht nachvollziehbar sind.

Exemplarisch seien an dieser Stelle genannt:

- In der analytischen Geometrie ist die Berechnung von Skalar- und Kreuzprodukt von Vektoren erlaubt, die Berechnung der Länge eines Vektors („$norm$“) oder des Einheitsvektors („$unitV$“) hingegen nicht. In beiden Fällen wird allerdings auf elementare Funktionen zurückgegriffen. Die Darstellung geometrischer Objekte soll im Prüfungsmodus verboten sein, obwohl dies z.B. im Kernlehrplan NRW für die Umsetzung im Unterricht explizit gefordert ist.
- In der Algebra ist der Befehl zum Ausmultiplizieren von Termen („$expand$“) im Prüfungsmodus nicht erlaubt. Dies irritiert uns insofern, als der analoge Befehl („$multipliziere$“) zugelassen sein soll.
- In der Stochastik sind zahlreiche Befehle, die für die Erstellung von Simulationsprozessen relevant sind (u.a. „$countif$“, „$when$“, „dim“), in der Prüfungssituation untersagt.

[12] T³ ist ein Lehrerfortbildungsnetzwerk, das sich an interessierte Lehrerinnen und Lehrer richtet, die sich zum Einsatz digitaler Werkzeuge im MINT-Unterricht informieren und Erfahrungen austauschen wollen. T³ wird von Texas Instruments unterstützt.
https://www.t3deutschland.de/de/t3-europe

© 2025 T³ Deutschland

Zudem soll die automatisierte graphische Darstellung beispielsweise einer Binomialverteilung im Prüfungsmodus beschränkt werden, wohingegen die tabellarische Berechnung der Werte und anschließende graphische Visualisierung und Untersuchung möglich sein soll.

Des Weiteren bemerken wir Widersprüche in den Vorgaben zu MMS zu den Kerncurricula und Medienplänen einiger Bundesländer sowie zu den Bildungsstandards.

- Der Gauß-Algorithmus ist in allen Kernlehrplänen aufgeführt. In den Ländern, in denen MMS eingesetzt werden, sollen lineare Gleichungssysteme mit digitalen Hilfsmitteln gelöst werden (in komplexen Fällen). Dies ist ohne die Befehle „ref“ und „$rref$“ nicht möglich.
- Exponentielle Regressionen (ohne die Basis e) sind Pflichtstoff in einigen Bundesländern (z.B. in Niedersachsen). Ein entsprechender Befehl ist für ein MMS nicht vorgesehen.
- Im Orientierungsrahmen Medienbildung für Niedersachsen ist festgehalten, dass die Lernenden auch mehrschrittig algorithmisch denken sollen. Das spricht eindeutig gegen den Ausschluss von Operatoren wie
  „and“, „or“, „if“, „for“…
- In den Bildungsstandards ist unter der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ (L_4) explizit gefordert, dass funktionale Zusammenhänge „auch unter Nutzung infinitesimaler Methoden und geeigneter Software“[13] vertieft und erweitert werden sollen. Dies steht zum Beispiel im Widerspruch zum Verbot der Nutzung von Produktsummenbefehlen (Ober- und Untersumme zur Einführung des Integralbegriffs).

Die GDM schreibt richtigerweise: „*Diese Kriterien* [an ein MMS] *erscheinen willkürlich und entbehren einer wissenschaftlichen Grundlage*.“[14] Wir stellen uns daher die Frage, welches Interesse mit der geplanten Beschränkung von MMS verbunden und wer an der Erstellung der einschränkenden Vorgaben beteiligt ist. Trotz des begrüßenswerten Ziels der bundesweiten Angleichung der Abiturprüfungen und demzufolge auch von Eigenschaften der verwendeten Hilfsmittel bleibt unklar, auf welcher (wissenschaftlichen) Grundlage oder auf welchen Erfahrungswerten diese Angleichung erfolgen soll.

Die beschriebene Intransparenz in den Erwartungen an MMS erschwert und verzögert die Entwicklung entsprechender Geräte durch die Hersteller. Daraus folgen auch für die Arbeit unserer Gruppe Unsicherheiten und Schwierigkeiten, wie wir Unterstützungsmaterial und Fortbildungen für Lehrkräfte konzipieren sollen. Vermutlich ergeben sich auch für IQB- und Ländergruppen, die die Prüfungsaufgaben für das Abitur erstellen oder anpassen, ähnliche Probleme.

2. Auswirkungen der Einschränkungen auf die Nutzung von MMS im Unterricht

In der Stellungnahme der GDM wird mit dem „Backwash-Effekt“ beschrieben, wie sich Prüfungsvorgaben nachweislich auf die Gestaltung von Unterricht auswirken. Unsere Arbeitsgruppe schließt sich der Einschätzung an, dass eine solch gravierende Einschränkung der Eigenschaften des digitalen Hilfsmittels in der Prüfung auch dazu führt, dass auch im vorausgehenden Unterricht das Hilfsmittel nur mit diesen Einschränkungen verwendet wird, um eine vermeintlich "optimale" Vorbereitung der Lernenden auf die Prüfung zu gewährleisten. Mit den aktuell vorliegenden Vorgaben an ein MMS hätte dies zur Folge, dass beispielsweise Simula-

[13] siehe: Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012), S. 20.

[14] siehe: Stellungnahme der GDM zu den Beschränkungen der digitalen Medien im Mathematik-Abitur vom 19.03.2025

tionen in der Stochastik oder Funktionen in der analytischen Geometrie aus dem Unterricht verschwinden, obgleich sie explizit in den Bildungsstandards bzw. Kernlehrplänen aufgeführt sind. Aus unserer Sicht wird in der Diskussion um die reduzierte Funktionalität von MMS zu wenig berücksichtigt, welcher didaktische Mehrwert durch den lernförderlichen Einsatz digitaler Hilfsmittel entsteht. Der Umfang der Streichungen für die Prüfungssituation gibt Anlass zu der Befürchtung, dass in der unterrichtlichen Situation im Sinne der Schülerschaft ebenfalls nur im Prüfungsmodus gearbeitet wird.

3. Bedeutung des MMS in den Abiturprüfungen

Die in den Bildungsstandards formulierte Kompetenz: „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ (K_5) „beinhaltet auch Faktenwissen und grundlegendes Regelwissen für ein zielgerichtetes und effizientes Bearbeiten von mathematischen Aufgabenstellungen, auch mit eingeführten Hilfsmitteln und digitalen Mathematikwerkzeugen.“[15] Diese Unterscheidung wird allerdings ohnehin durch die Verbindlichkeit eines hilfsmittelfreien Teils und der reduzierten Formelsammlung für Mathematik in den Abiturprüfungen garantiert. Die Anforderungen an die Dokumentation einer Aufgabenbearbeitung kann auch durch entsprechende Operatoren gesteuert werden. Eine Redundanz von Aufgabenformaten in Prüfungsteil 1 und 2 ist nicht notwendig. Damit schließen wir uns der Einschätzung des MNU an:

„*Wir sind der Meinung, dass diese Einschränkungen unsinnig und unnötig sind, insbesondere unter dem Aspekt, dass im Abitur ja ein hilfsmittelfreier Teil existiert, in dem man eben diese Algorithmen abfragen kann, deren Beherrschung man für grundlegend wichtig erachtet*.“[16]

4. Nutzung von MMS als eingeführtes Hilfsmittel auch in Naturwissenschaften

Bislang war es üblich, dass der an der Schule eingeführte Taschenrechner oder das Computeralgebrasystem auch als
Hilfsmittel im Abitur in anderen Fächern eingesetzt werden musste. Durch die in der aktuellen Form vorgesehenen Beschränkungen des MMS würde dies u.a. dazu führen, dass eine Sinus-Regression, die für physikalische Schwingungsbetrachtungen notwendig ist, nicht mehr mit diesem Hilfsmittel erfolgen könnte, auch Einheitenbetrachtungen sind dann nicht mehr möglich. Es wäre bedauerlich und nicht zielführend, wenn dies nur durch die Anschaffung weiterer Gerätschaften möglich wäre.

Das Lehrernetzwerk T³ fordert die KMK und das IQB auf, die Hinweise von GDM und MNU sowie die in den
Bildungsstandards formulierten Kompetenzen, die durch digitale Werkzeuge insbesondere im Mathematikunterricht erworben werden sollen, bei den Vorgaben für ein MMS zu berücksichtigen. Die Vorgaben müssen eindeutig, wissenschaftlich fundiert und zügig kommuniziert werden, um eine langfristige Vorbereitung und eine für Schulen und Lehrkräfte realistische Umsetzung bis zum Prüfungsjahr 2030 zu garantieren.

[15] siehe: Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012), S. 16.

[16] siehe: Elschenbroich, H.-J./Langlotz, H. (2025): digitalisierung klein geschrieben. in: MNU-Journal – Ausgabe 02.2025, S. 93.

 © 2025 T³ Deutschland

Anhang 2:
Maßnahmenkatalog der Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV), der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) und des Verbands zur Förderung des MINT-Unterrichts (MNU)

Mathematik:
19 Maßnahmen für einen konstruktiven Übergang Schule – Hochschule

Im Wintersemester 2017/18 gab es rund 2,8 Mio. Studentinnen und Studenten an Universitäten und Hochschulen, davon rund 47 % in Studienfächern der Wirtschafts-, Ingenieur- und Naturwissenschaften, der Mathematik und der Informatik, die mathematisches Wissen und Können verlangen und deshalb prüfungsrelevante Anteile in Mathematik beinhalten. Das mathematische Wissen und Können der Studienanfängerinnen und -anfänger jedoch ist divers und oftmals unzureichend. Die Ursachen sind vielfältig und dabei nicht allein begründet durch Unterschiede in Schulart, nach Bundesland oder im Umfang des erlebten Mathematikunterrichts. Deshalb gelingt der Übergang von der Schule zur Hochschule allzu oft nicht oder fällt schwer.

Es bedarf einer gemeinsamen Anstrengung von Politik in Bund und Ländern, von Schule, Hochschule und Wissenschaft, um Bedingungen für einen konstruktiven Übergang von der Schule zur Hochschule zu schaffen. Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV), die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) und der Verband zur Förderung des MINT-Unterrichts (MNU) empfehlen die Umsetzung der nachstehenden Maßnahmen, die von der gemeinsamen Mathematik-Kommission Übergang Schule–Hochschule erarbeitet wurden.

Nachhaltiger Mathematikunterricht

1. Alle Schülerinnen und Schüler erhalten durchgehend mindestens vier Wochenstunden Mathematikunterricht von professionell aus- und fortgebildeten Mathematiklehrkräften.
2. Alle Lehrkräfte qualifizieren sich regelmäßig und systematisch zu fachlichen und fachdidaktischen Inhalten weiter. Entsprechende Angebote werden geschaffen, genügen dabei grundlegenden Standards (z. B. den Gestaltungsprinzipien effektiver Fortbildungen des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik DZLM) und beinhalten unter anderem praktische Erprobungsphasen mit anschließender Reflexion.
3. Als verbindlicher Teil der Prüfungen zur (Fach-) Hochschulreife absolvieren alle Schülerinnen und Schüler deutschlandweit zeitgleich eine zentrale Mathematikprüfung. Diese Teilprüfung ist hilfsmittelfrei und bezieht sich auch auf das Wissen und Können der Sekundarstufe I. Sie ersetzt nicht die Abiturprüfung Mathematik, die weiterhin länderspezifisch mit Hilfsmitteln durchgeführt wird.
4. In Zusammenarbeit mit regionalen Hochschulen und Universitäten werden – gerne in Kooperation mit Nachbarschulen – Angebote initiiert, durch die Schülerinnen und Schüler der Oberstufe interessengeleitet an spätere Studienoptionen (insbesondere im MINT- Bereich) herangeführt werden.

Konkretisierung der Bildungsstandards

5. Die Bildungsstandards werden bezüglich der inhaltlichen Anforderungen konkretisiert. Hierbei spielen Beispielaufgaben eine wesentliche Rolle.
6. Die Bildungsstandards werden bezüglich Lerngelegenheiten zum grundlegenden Argumentieren und zu Begründungs- bzw. Beweisstrategien an exemplarischen Inhalten konkretisiert. Hierzu eignen sich zum Beispiel Inhalte der elemen-

taren Zahlentheorie (Teilbarkeit natürlicher Zahlen).

7. Die Bildungsstandards werden vollumfänglich und verbindlich als Ländercurricula umgesetzt.

Bei der Entwicklung und Konkretisierung der Bildungsstandards und bei deren Umsetzung als Ländercurricula werden die Fachgesellschaften wie Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV), Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) und der Verband zur Förderung des MINT-Unterrichts (MNU) in deutlich stärkerem Maße als bisher beteiligt und einschlägige Forschungsergebnisse (z. B. die MaLeMINT-Studie des Leibniz-Instituts für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik) berücksichtigt.

Gestaltung des Übergangs Schule – Hochschule

8. Mit Blick auf das tatsächliche Wissen und Können der Studienanfängerinnen und -anfänger werden studienrichtungsspezifische Vor- und Brückenkurse sowie semesterbegleitende Unterstützungsmaßnahmen eingeführt, um den Übergang von der Schule zur Hochschule zu erleichtern.
9. Mit Blick auf das tatsächliche Wissen und Können der Studienanfängerinnen und -anfänger werden flexible Studieneingangsphasen („Studieren in verschiedenen Geschwindigkeiten“) eingeführt.
10. Maßnahmen zur besseren Gestaltung des Übergangs führen nicht zu Nachteilen beim Bezug von BAföG.
11. Die mathematikspezifische und allgemeine Forschung zum Übergang von Schule zu Hochschule wird ausgebaut und intensiviert.

Mathematikausbildung im Studium

12. Schule und Hochschule stimmen sich genau und verbindlich über das mathematische Wissen und Können der Studienanfängerinnen und -anfänger ab. An den Universitäten und Hochschulen werden die Curricula entsprechend dieser Abstimmung und unter Berücksichtigung der mathematischen Anforderungen der einzelnen Studienfächer sowie der beruflichen und gesellschaftlichen Anforderungen weiterentwickelt.
13. In der Lehre wird berücksichtigt, dass es in Schule und Hochschule Unterschiede in den Traditionen der Arbeitsformen und Aneignungsprozesse gibt.
14. Alle Hochschullehrenden qualifizieren sich regelmäßig und systematisch zu fach- und hochschuldidaktischen Inhalten weiter. Fort- und Weiterbildungen werden geschaffen, genügen wissenschaftlichen Erkenntnissen und beinhalten unter anderem praktische Erprobungsphasen mit anschließender Reflexion.

Rahmenbedingungen

15. Die Entwicklung von Maßnahmen jeder Art berücksichtigt einschlägige Forschungsergebnisse und die Durchführung wird **durch mathematikdidaktische Forschung** begleitet und evaluiert.
16. Damit die hier vorgestellten Maßnahmen umgesetzt werden können, bedarf es einer neuen **Kultur des Austauschs**, die alle Beteiligten aktiv in die Pflicht nimmt: Es braucht einen ständigen Austausch zwischen Lehrkräften an Schulen sowie an Universitäten und Hochschulen, um gegenseitiges Verständnis zu fördern. Die Lehrkräfte an den Universitäten und Hochschulen müssen die Rahmenbedingungen des Mathematik-Unterrichts an der Schule kennen. Die Lehrkräfte an den Schulen müssen in die Lage versetzt werden, die Rahmenbedingungen des Studiums an Universitäten und Hochschulen insbesondere im Fach

Mathematik für nichtmathematische Studiengänge zu kennen. Dieser Austausch kann in Kommunikationszirkeln an den Universitäten und Hochschulen realisiert werden.

17. Eine zentrale Rolle für eine erfolgreiche Überwindung der Übergangsproblematik spielen die Lehrerinnen und Lehrer. Dementsprechend muss die **Ausbildung angehender Mathematiklehrkräfte** an den Universitäten und Hochschulen an die aktuellen Rahmenbedingungen angepasst werden. Die Ausbildung berücksichtigt in allen Studiengängen die Erfordernisse der späteren beruflichen Praxis, insbesondere auch in der fachwissenschaftlichen Ausbildung (vgl. hierzu auch die Forderungen der Gemeinsamen Kommission Lehrerbildung der GDM, DMV und MNU).
18. Die **Finanzierung** zusätzlicher Angebote an den Schulen, an den Universitäten und Hochschulen, der Fort- und Weiterbildung und der Begleitforschung ist durch Bund und Länder sicherzustellen. Es bedarf einer bundesweiten Anstrengung, mehr und geeignete Menschen für ein Lehramtsstudium im Bereich MINT zu gewinnen.

Gezeichnet am 18. Februar 2019:

Prof. Dr. Wolfram Koepf, Vorsitzender der Mathematik-Kommission Übergang Schule-Hochschule
Prof. Dr. Friedrich Götze, Präsident der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV)
Prof. Dr. Andreas Eichler, 1. Vorsitzender der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM)
Gerwald Heckmann, Vorsitzender des Verbands zur Förderung des MINT-Unterrichts (MNU)

www.t3deutschland.de

education.ti.com

T³ DEUTSCHLAND

Teachers Teaching with Technology™

Texas Instruments