3- Differentialgleichungen - Erinnerungen und Ergänzungen

Wenn man sein BACC an der ETS gemacht hat, wurde kein Beweis für das Existenz- und Eindeutigkeitstheorem gegeben. Wir sprechen hier darüber, da der Beweis immer noch die Idee eines festen „Punktes“ verwendet.

3.1 Satz: Das Problem sei $\frac{dy}{dx} = f(x,y),\ y(x_0) = y_0$. Nehmen wir an, dass sowohl *f* als auch $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig sind auf einem bestimmten Rechteck $R = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$ und den Punkt (x_0, y_0) enthalten. Dann gibt es eine positive Zahl *h* und eine eindeutige Funktion $\varphi\ : [x_0 - h,\ x_0 + h] \to \mathbf{R}$ so, dass

$$\varphi(x_0) = y_0,$$
$$\frac{d\varphi}{dx} = f(x, \varphi(x)),\ x_0 - h < x < x_0 + h.$$

Der Beweis dieses Satzes (der auf Systeme von Differentialgleichungen verallgemeinert werden kann: siehe Theorem 3.3) besteht darin, zu zeigen, dass die Folge von Funktionen, die durch $y_{n+1} = T[y_n],\ y_0(x) = y_0$ definiert ist, auf $[x_0 - h,\ x_0 + h]$ (gleichmäßig) gegen diese Lösung konvergiert. Hier wird *T* der (nichtlineare) Operator sein, der definiert ist durch

$$T[y](x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\ dt.$$

Die Folge $y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\ dt, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ wird als Iterationsfolge von Picard bezeichnet.

Beweis: wir setzen daher $y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\ dt, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ und wir merken an, dass

$y_n(x) = y_0(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(y_k(x) - y_{k-1}(x)\right)$. Die Folge $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert also, dann und nur dann, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{n} \left(y_k(x) - y_{k-1}(x)\right)$ konvergiert. Die Teilschritte dazu folgen:

a) *f* und $\frac{\partial f}{\partial y}$ sind auf *R* beschränkt, da sie stetig sind. Dann gibt es Konstante *M* und *K* so dass

$$|f(x,y)| \le M, \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le K \quad \forall (x,y) \in R.$$

Mithilfe des Mittelwertsatzes kann man schreiben, dass

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y^*)\right| |y_1 - y_2| \le K |y_1 - y_2|$$

für jedes Punktepaar $(x, y_1), (x, y_2) \in R$. Man kann also ein positives *h* wählen, so dass $K\,h < 1$ und dass das Rechteck $R' = \{(x,y) : |x - x_0| \le h, |y - y_o \le M\,h|\} \subset R.$

b) Wir zeigen, dass die Reihe konvergiert: man bemerkt, dass jede der Funktionen $y_n(x)$ einen Graphen besitzt, der in *R´* enthalten ist. Tatsächlich ist es klar für $y_0(x)$ und

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_0(t)\right) dt \right| \le M\,h\,.$$

So sind die Punkte $\left(t, y_1(t)\right) \in R'$, also $\left| f\left(t, y_1(t)\right)\right| \le M$ und weiters

$$|y_2(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_1(t)\right) dt \right| \le M\,h$$

und so weiter. Die Funktion $y_1(x)$ ist stetig auf dem abgeschlossenen Intervall $|x - x_0| \le h$, hat also ein Maximum. Dann setzen wir $a = \max|y_1(x) - y_0|$. Somit ergibt sich

$$\left| f\left(t, y_1(t)\right) - f\left(t, y_0(t)\right)\right| \le K|y_1(t) - y_0(t)| \le K\,a\,,$$

Woraus folgt $|y_2(x) - y_1(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} \left(f\left(t, y_1(t)\right) - f\left(t, y_0(t)\right)\right) dt \right| \le K\,a\,h = a(K\,h)$. Auf die gleiche Weise,

$$\left| f\left(t, y_2(t)\right) - f\left(t, y_1(t)\right)\right| \le K|y_2(t) - y_1(t)| \le K^2 a\,h\,,$$

Daher: $|y_3(x) - y_2(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} \left(f\left(t, y_2(t)\right) - f\left(t, y_1(t)\right)\right) dt \right| \le \left(K^2 a\,h\right) h = a(K\,h)^2$. Dann aber,

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le a\,(K\,h)^{n-1}$$

und unsere Reihe konvergiert nach dem Vergleich mit der geometrischen Reihe! Wir zeigen die Summe *y*(*x*):

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(y_n(x) - y_{n-1}(x)\right).$$

Es ist zu beachten, dass die Konvergenz sogar gleichmäßig ist und somit ist *y*(*x*) eine stetige Funktion mit einem Graphen in *R´*.

c) Wir zeigen, dass *y*(*x*) gut der Differentialgleichung genügt. Die Anfangsbedingung ist trivialerweise erfüllt und wir werden zeigen, dass

$$y(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt = 0\,.$$

Wir wissen, dass $y_n(x) - y_0 - \int\limits_{x_0}^{x} f\left(t, y_{n-1}(t)\right) dt = 0$. Also

$$y(x) - y_0 - \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt = y(x) - y_n(x) + \int\limits_{x_0}^{x} \left(f\left(t, y_{n-1}(t)\right) - f\left(t, y(t)\right) \right) dt$$

und somit

$$\left| y(x) - y_0 - \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \right| \le \left| y(x) - y_n(x) \right| + \left| \int\limits_{x_0}^{x} \left(f\left(t, y_{n-1}(t)\right) - f\left(t, y(t)\right) \right) dt \right| \le$$

$$\le \left| y(x) - y_n(x) \right| + K\, h \max \left| y_{n-1}(x) - y(x) \right|$$

da der Graph von $y(x)$ in *R'* und damit auch in *R* liegt. Die gleichmäßige Konvergenz sorgt dafür, dass man die letzte Summe so klein machen kann, wie man will, indem man *n* hinreichend groß wählt.

d) Zur Eindeutigkeit: es wird ähnlich wie beim Beweis von Theorem 2.1 argumentiert, da das gleiche Kontraktionsprinzip verwendet wurde. ♦

3.2 Beispiele

3.2.1 Für die Differentialgleichung $y' = -y + 2x + 1,\ y(0) = 1$ ergibt die Folge der Iterationen von Picard genau die Taylor-Entwicklung der Lösung $2e^{-x} + 2x - 1$. Man beachte, dass diese Lösung auf der gesamten rechten Seite definiert ist. Noch vor dem Lösen der DGL kann man sich der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung in der Nähe des Punktes (0, 1) sicher sein, da die Funktion $f(x, y) = -y + 2x + 1$ und seine partielle Ableitung nach *y* in einem (beliebig großen) Rechteck, das den Punkt (0, 1) einschließt, stetig sind.

3.2.2 Für die Differentialgleichung $y' = 1 + y^2,\ y(0) = 0$ wird die Folge der Picard-Iterationen der Taylor-Entwicklung der Lösung $y = \tan x$ „ähnlich". Wir sehen, dass man hier, obwohl *f* und $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ in jedem Rechteck, dass den Ursprung enthält – so groß es auch sein mag - stetig sind, die Lösung nicht über π/2 hinaus erweitern kann. Dies <u>geschieht nicht bei einer linearen Gleichung</u> (eine lineare DGL gab es in 3.2.1).

3.2.3 Für die Differentialgleichung $y' = 3y^{2/3},\ y(2) = 0$ gilt der Satz nicht. Hier gibt es übrigens zwei Lösungen: $y(x) \equiv 0$ (die identische Nullfunktion) und $y(x) = (x-2)^3$.

3.2.4 Das gleiche gilt für die DGL $y' = \sqrt{y},\ y(0) = 0$. Man findet zwei Lösungen: $y(x) = 0$ (die identische Nullfunktion) und

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & \text{für } x \ge 0 \end{cases}.$$

3.2.5 Beispiel: Die einzige Lösung, die durch das Existenz- und Eindeutigkeitstheorem vorhergesagt wird, kann sehr wohl komplexe Zahlen beinhalten. In Fällen, in denen es möglich ist, die Einzellösung explizit zu identifizieren, empfiehlt es sich, den Bereich für diese anzugeben. Betrachten wir die folgenden DGL („separierbar“ und auch „linear: siehe die Erinnerung in 3.5 weiter unten).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x^2-9},\ y(0) = 5$$

Der Satz von Existenz und Eindeutigkeit gilt, da die Funktion $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4}{x^2-9}$ sowie ihre partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4}{x^2-9}$ in der Umgebung des Punkts (0, 5) stetig sind. Es ist jedoch klar, dass der Bereich hier eine Teilmenge des Intervalls -3 < x < 3 sein wird.

3.2.6 Beispiel Die einzige Lösung, die durch den Existenz- und Eindeutigkeitssatz vorhergesagt wird, kann nicht immer explizit gefunden werden. Und wenn es möglich ist, ist es wichtig, das Intervall, in dem die Lösung existiert, genau anzugeben. Nehmen wir das folgende Beispiel: eine separierbare, aber nicht lineare DGL, die leicht von Hand zu lösen ist: $\frac{dy}{dx} = y^3,\ y(0) = 1.$ Offensichtlich sind die Annahmen aus Satz 3.1 erfüllt, da die Funktionen y^3 und $3y^2$ in der Umgebung des Punktes (0, 1) stetig sind. Es ist zu beachten, dass diese beiden Funktionen in der gesamten Ebene stetig sein können, wobei nicht gesagt ist, dass das Intervall in dem die Lösung existiert, so groß ist, wie wir wollen!
Man trennt die Variablen und integriert auf jeder Seite:

$$\int_1^y \frac{1}{s^3}\,ds = \int_0^x 1\,dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2y^2} = x$$

Glücklicherweise kann man hier nach der Variablen y auflösen und findet nach Lösung der entsprechenden quadratischen Gleichung heraus, dass man die Lösung beibehalten muss:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}},\ x < \frac{1}{2}.$$

Man kann verifizieren, dass die Funktion $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2x}},\ x < \frac{1}{2}$ die DGL erfüllt und auch die Anfangsbedingung $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1.$ $\frac{d\varphi}{dx} - \varphi(x)^3 = \frac{1}{(1-2x)^{3/2}} - \frac{1}{(1-2x)^{3/2}} = 0.$

In Zusammenfassung 2 werden wir über DGL-Systeme erster Ordnung sprechen und Ergebnisse wie die der nächsten beiden Sätze werden angekündigt. Die Beweise werden hier nicht gegeben.

3.3 Satz (Picard Iterationen für DGL-Systeme).
Nehmen wir an, dass **f** und $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i}$ (i = 1, 2, ..., n) in der folgenden offenen Menge stetig sind

$R = \{(t,\ x_1, x_2,\ \ldots,\ x_n) :\ a < t < b,\ c_i < x_i < d_i,\ i = 1,\ \ldots,\ n\}$ und, dass die Menge den Punkt $(t, \mathbf{x}_0)$ enthält, wobei $\mathbf{x}_0 = \left[x_{1,0}\ \ x_{2,0}\ \ldots\ x_{n,0} \right]^T$. Dann hat das Problem

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

eine eindeutige Lösung in einem bestimmten Intervall $[t_0 - h,\ t_0 + h]$.

3.4 Satz Es sei $\mathbf{A}(t)$ eine quadratische Matrix der Ordnung n und $\mathbf{f}(t)$ eine Vektorfunktion, die beide auf dem Intervall $a < t < b$ stetig sind und den Punkt t_0 enthalten. Dann gibt es für jeden Vektor $\mathbf{x}_0$ eine eindeutige Lösung des Problems

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

und diese Lösung ist für das ganze Intervall $a < t < b$ definiert.

3.5 Erinnerung Die lineare DGL erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)\,,$$

hat die allgemeine Lösung

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)q(x)dx + C\right)$$

wobei $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$. Erinnern wir uns daran, woher diese Formel stammt. Wir möchten, dass der linke Term der DGL die Ableitung eines Produkts ist. Es sei also eine unbekannte Funktion $\mu(x)$ und wir betrachten die DGL

$$\mu(x)y' + p(x)y\mu(x) = \mu(x)q(x)\,.$$

Da $\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu y' + y\mu'$ wählen wir μ so, dass $\mu' = \mu p$ wobei $\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$. Dann erhält man die oben angegebene Formel. Wenn es eine Anfangsbedingung der Art $y(x_0) = y_0$ gibt, dann fahren wir fort wie folgt: wir haben μ wie oben gewählt und somit

$$\frac{d}{dx}(\mu y) = \mu q\,.$$

Wir integrieren auf beiden Seiten von x_0 bis x und erhalten schließlich die Formel

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int_{x_0}^{x} \mu(s)\,q(s)\,ds + y_0\mu(x_0)\right)$$

3.6 Beispiele Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung oder leicht lösbare lineare Systeme erster Ordnung

3.6.1 Wie lange braucht ein Fallschirmspringer mit einer Gesamtmasse von 75 kg, um den Boden zu erreichen, wenn er aus einer Höhe von 4000 m springt und angenommen wird, dass die Luftwiderstandskraft proportional zur Geschwindigkeit mit einer Proportionalitätskonstante von 15 kg/s für die ersten 60 Sekunden des Falls (vor dem Öffnen des Fallschirms) und 105 kg/s für den Rest des Falls ist?

(Antwort: 241,56 Sekunden bei g = 9,81 m/s^2).

https://mse.redwoods.edu/darnold/math55/DEproj/sp04/coleron/paper1.pdf

3.6.2 Zwei große Tanks, die jeweils 50 Liter (L) Flüssigkeit enthalten, sind durch einen Schlauch miteinander verbunden Die Flüssigkeit fließt mit einer Rate von 5 L/min von Behälter A zu Behälter B. Wir halten die Flüssigkeit in jedem Behälter durch Umrühren gleichmäßig. Eine Salzlösung mit einer Konzentration (Salz) von 3 kg/L wird mit einer Rate von 5 L/min in den Behälter A gefüllt. Die Lösung

fließt aus dem Behälter B mit einer Rate von 5 L/min. Anfänglich sind 50 kg Salz in Tank A und 100 kg Salz in Tank B befinden. Gesucht ist die Masse Salz in jedem der Tanks für jedes t ≥ 0.

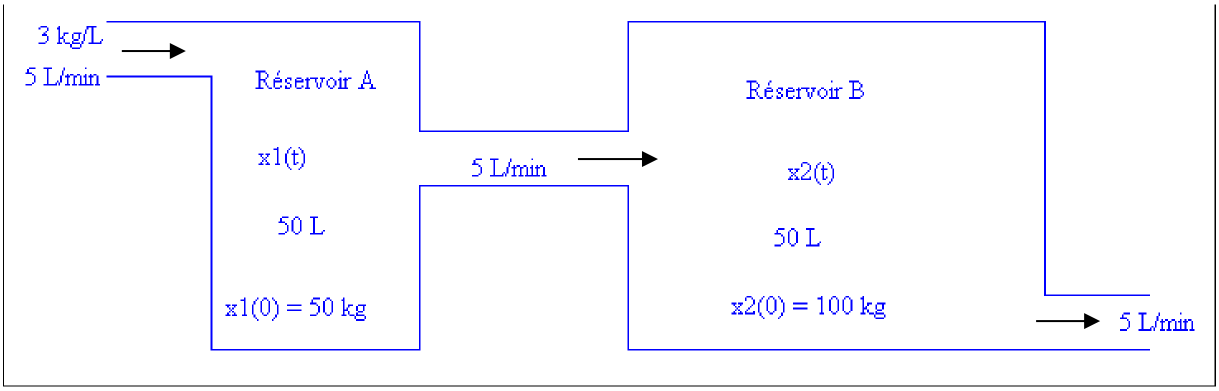


Abbildung 3.1

Man bestätige, dass $150-100e^{-t/10}$ für A gilt und $150-(10t+50)e^{-t/10}$ für B.

Da wir uns mit Systemen von Differentialgleichungen befassen werden, wollen wir einige Ergebnisse für den Fall der linearen DGL der Ordnung 2 anstelle der Ordnung „*n*" in Erinnerung rufen. Daher gilt

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=r(x)$$

wobei die Funktionen *p*, *q* und *r* in einem bestimmten Intervall $a<x<b$ stetig sind.

3.7 Satz Nehmen wir an, dass die Funktionen *p*, *q* und *r* im Intervall]*a*, *b*[stetig sind und dass x_0 ein Punkt in diesem Intervall ist. Dann besitzt die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=r(x),\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=v_0$$

eine eindeutige Lösung *y*(*x*) auf diesem Intervall.

Die Eindeutigkeit der Lösung kann durch Anwendung der Sätze 3.3 und 3.4 auf das folgende System bewiesen werden, ein System, das äquivalent zur DGL. ist. (Dazu setzt man $y' = z$)

$$\begin{cases} y'=z & y(x_0)=y_0 \\ z'=-p(x)z-q(x)y+r(x) & z(x_0)=v_0 \end{cases}$$

Im Gegensatz zur linearen Gleichung erster Ordnung, bei der es eine geschlossene Formel für die Lösung gibt, müssen wir hier wie folgt vorgehen, um die Lösung unseres Problems zu finden. Man findet zunächst zwei Funktionen y_1 und y_2 welche die („komplementäre" oder „homogene") Gleichung

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \text{ erfüllen}$$

und mit $y_1(c)y_2'(c)-y_1'(c)y_2(c)\neq 0$ für einen Punkt c im Intervall]*a*, *b*[. Anschließend findet man eine partikuläre Lösung $\phi(x)$. Dann lautet die Lösung

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \phi(x),$$

wobei c_1, c_2, die über die so genannte Wronski-Determinante von y_1 und y_2 berechnet und gefunden werden.

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix},$$

wenn diese von Null verschieden ist: man sagt dann, dass das Lösungspaar y_1, y_2 eine Fundamentalbasis der Lösungen bildet oder, dass sie linear unabhängig auf $]a, b[$ sind.

Wenn man nur eine Lösung finden kann, erhält man eine zweite Lösung, die unabhängig von der ersten durch die Methode der Reduzierung der Ordnung. Das führt zum folgenden Ergebnis:

$$y_2 = v\, y_1 \text{ wobei } v' = \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2}.$$

Wenn man aber nicht einmal eine Lösung finden kann, kann man mit Potenzreihen vorgehen Diese Methode erlaubt es, einige spezielle Funktionen einzuführen. Die partikuläre Lösung findet sich durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten in dem Fall, in dem die DGL konstante Koeffizienten hat, wobei $r(x)$ Summe oder Produkt von Polynomen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Cosinusfunktionen ist. Im allgemeinen Fall kann eine partikuläre Lösung $\phi(x)$ immer durch die Methode der Variation der Parameter erhalten werden. Das ergibt mit W (wie oben definiert) folgendes

$$\phi(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)r(x)}{W}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)r(x)}{W}dx.$$

3.8 Erinnerung Seien a, b und c drei reelle Zahlen mit $a \neq 0$. Dann hängt die allgemeine Lösung von

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$$

ab von der Diskriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ und den Wurzeln der damit verbundenen charakteristischen Gleichung

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

3.8.1

Wenn $\Delta > 0$, dann ist die allgemeine Lösung der DGL $y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ wobei λ_1, λ_2 die beiden reellen und verschiedenen Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind.

3.8.2 Wenn $\Delta = 0$, dann lautet die allgemeine Lösung $y = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t)$ mit λ als Doppellösung der charakteristischen Gleichung.

3.8.3 Wenn $\Delta < 0$, dann lautet die allgemeine Lösung $y = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))$ wobei α und ω der reelle bzw. imaginäre Teil der Lösungen der charakteristischen Gleichung sind.

3.9 Beispiele

3.9.1 Die Amplitude der Lösung im stationären Zustand bei einer erzwungenen gedämpften harmonischen Bewegung mit sinusförmiger Kraft.

Wir betrachten die Masse-Feder-Gleichung. In der folgenden DGL sind *m*, *b*, *k*, *F* feste positive Größen und $b^2 < 4mk$.

$$m\,y'' + b\,y' + k\,y = F\cos(\omega\, t)$$

Unabhängig vom Vorzeichen von $b^2 < 4mk$ und den Anfangsbedingungen wird die Komplementärlösung gegen 0 tendieren, wenn *t* gegen unendlich geht (weil $b > 0$). Da $b \neq 0$, hat der Kandidat für eine partikuläre Lösung - hier Lösung im stationären Zustand genannt - notwendigerweise die Form: $A\cos(\omega\, t) + B\sin(\omega\, t)$. Wir werden sehen, dass im Fall der ungedämpften Bewegung ($b^2 < 4mk$) die Amplitude der Lösung im stationären Zustand gegeben ist durch

$$M(\omega) = \frac{F/m}{\sqrt{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2 \omega^2}}$$

und, dass diese Funktion ihr Maximum erreicht im Punkt

$$\omega = \omega_r = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}} \quad \text{wenn } b^2 < 2mk\,.$$

3.9.2 Hier ist ein Spezialfall für Beispiel 3.9.1. Wir betrachten das folgende Masse-Feder-Problem:

$$y'' + \frac{1}{4}y' + 2y = 2\cos(\omega\, t),\;\; y(0) = 0,\; y'(0) = 2 \quad [\omega > 0].$$

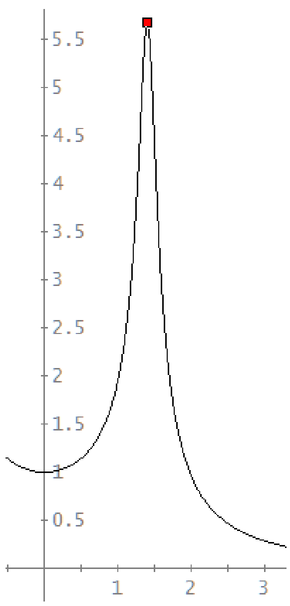


Abbildung 3.2

Wir zeichnen den Graphen der Amplitude des stationären Zustands als Funktion von ω und suchen nach ihrem Maximum. Es wird erwartet, dass das Maximum für $\omega = \frac{3\sqrt{14}}{8} \approx 1.40312$ erreicht wird und den Wert $\frac{64\sqrt{127}}{127} \approx 5.67908$ annimmt. Man kann das überprüfen.
(siehe Abbildung 3.2).

3.9.3 Man beachte, dass die DGL $a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0$ äquivalent ist zum System 1. Ordnung:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -\dfrac{b}{a}z - \dfrac{c}{a}y \end{cases} \quad \text{oder in Matrixschreibweise} \quad \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{a} & -\dfrac{b}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

Wir werden sehen, dass die "Eigenwerte" der obigen quadratischen Matrix nichts anderes sind als die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$!

3.9.4 Harmonische Schwingung

Im Fall der einfachen harmonischen Bewegung, $m\,y'' + k\,y = 0$, erhält man durch Multiplikation mit y'

$$m\,y'y'' + k\,y'\,y = 0\,,$$

woraus sich durch Integration folgt: $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\,y^2 = E_0$ = konstant ($v = y'$ ist die Geschwindigkeit). Der erste Term ist die kinetische Energie, der zweite die potentielle und E_0 die gesamte Energie. Wir wissen aber, dass die Lösung der einfachen harmonischen Bewegung lautet, wie folgt:

$$y = a_1\cos\left(\omega_0\,t\right) + b_1\sin\left(\omega_0\,t\right) = c_1 e^{i\,\omega_0\,t} + c_{-1}e^{i\,\omega_0\,t}$$

wobei $\varpi_0^2 = \dfrac{k}{m}, c_1 = \dfrac{a_1 - ib_1}{2}, c_{-1} = \bar{c}_1$. Setzen wir $A = c_1 e^{i\,\omega_0 t}, B = c_{-1}e^{-i\,\omega_0 t}$. Dann ist $y = A + B$ und man erhält durch Ableitung $v = y' = A' + B' = i\omega_0(A - B)$. So ergibt die direkte Berechnung;

$$E_0 = \frac{1}{2}m\left(i\omega_0(A-B)\right)^2 + \frac{1}{2}k(A+B)^2 =$$
$$\frac{1}{2}m\,\omega_0^2\left(-A^2 + 2AB - B + A^2 + 2AB + B^2\right) =$$
$$2k\,AB = 2k\left|c_1\right|^2$$

Die Energie ist proportional zum Quadrat der Amplitude $\left|c_1\right|$: $E_0 = 2k\left|c_1\right|^2$. Dieses interessante Ergebnis wird in der Fourier Analyse wiederkehren.

3.9.5 Beispiel Die „gute alte“ Methode der unbestimmten Koeffizienten (und die Verwendung von komplexen Zahlen) ist sehr hilfreich. Wir suchen die stationäre Lösung des Problems

$$y'' + 6y' + 13y = 3\cos(2t), \quad y(0) = 0, y'(0) = 0\,.$$

Die partikuläre Lösung ist nichts anderes als der Realteil der partikulären komplexen Lösung der Gleichung $y'' + 6y' + 13y = 3e^{2it}$. Eine direkte Berechnung zeigt, dass, wenn man den komplexen Kandidaten Ae^{2it} ausprobiert, $A = \dfrac{3}{9+12i} = \dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}i$ erhält. All diese Berechnungen lassen sich noch leicht automatisieren; wir dürfen nicht vergessen, Nspire darüber zu informieren, dass die Variablen komplex und nicht reell sind (daher der Zusatz "_" am Anfang der Berechnungen). Abschließend wird überprüft, ob die gefundene partikuläre Lösung richtig ist.

$$can:=a\_\cdot e^{2\cdot i\cdot t\_} \qquad a\_\cdot e^{t\_\cdot 2\cdot i}$$

$$\frac{d^2}{dt\_^2}(can)+6\cdot\frac{d}{dt\_}(can)+13\cdot can \qquad e^{t\_\cdot 2\cdot i}\cdot a\_\cdot(9+12\cdot i)$$

$$\mathrm{cSolve}(a\_\cdot(9+12\cdot i)=3,a\_) \qquad a\_=\frac{3}{25}-\frac{4}{25}\cdot i$$

$$\mathrm{real}\left(\left(\frac{3}{25}-\frac{4}{25}\cdot i\right)\cdot e^{2\cdot i\cdot t}\right) \qquad \frac{3\cdot\cos(2\cdot t)}{25}+\frac{4\cdot\sin(2\cdot t)}{25}$$

$$sp:=\frac{3\cdot\cos(2\cdot t)}{25}+\frac{4\cdot\sin(2\cdot t)}{25} \qquad \frac{3\cdot\cos(2\cdot t)}{25}+\frac{4\cdot\sin(2\cdot t)}{25}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(sp)+6\cdot\frac{d}{dt}(sp)+13\cdot sp \qquad 3\cdot\cos(2\cdot t)$$

Abbildung 3.3

Nun folgen die Lösungen zu den von Michel Beaudin gegebenen Beispielen mit TI-NspireCAS bzw. DERIVE (JB)

3.6.1

The Parachutist

Parachutist

m=75, k1=15, k2=105

m*v1'(t)=g*m−k1*v1(t), v1(0)=0 ; y1'(t)=v1(t), y1(0)=0

m*v2'(t)=g*m−k2*v2(t), v2(0)=v1(60); y2'(t)=v2(t), y2(0)=y1(60)

y2(t)=4000; t=?; total time = 60+t

$m:=75:k1:=15:k2:=105:g:=9.81 \blacktriangleright 9.81$

$\mathrm{deSolve}(m\cdot v1'=g\cdot m-k1\cdot v1 \text{ and } v1(0)=0,t,v1) \blacktriangleright v1=49.05-49.05\cdot(0.818731)^t$

$v1:=49.05-49.05\cdot(0.818731)^t|t=60 \blacktriangleright 49.0497$ = velocity after 60 seconds

$\mathrm{deSolve}(y1'=49.05-49.05\cdot(0.818731)^t \text{ and } y1(0)=0,t,y1) \blacktriangleright y1=245.25\cdot(0.818731)^t+49.05\cdot t-245.25$

$y1:=245.25\cdot(0.818731)^t+49.05\cdot t-245.25|t=60 \blacktriangleright 2697.75$ = fallen height after 60 seconds

$\mathrm{deSolve}(m\cdot v2'=g\cdot m-k2\cdot v2 \text{ and } v2(0)=v1,t,v2) \blacktriangleright v2=42.0426\cdot(0.246597)^t+7.00714$

$v2:=42.0426\cdot(0.246597)^t+7.00714 \blacktriangleright 42.0426\cdot(0.246597)^t+7.00714$

$\mathrm{deSolve}(y2'=v2 \text{ and } y2(0)=y1,t,y2) \blacktriangleright y2=^-30.0304\cdot(0.246597)^t+7.00714\cdot t+2727.78$

$y2:=^-30.0304\cdot(0.246597)^t+7.00714\cdot t+2727.78 \blacktriangleright {}^-30.0304\cdot(0.246597)^t+7.00714\cdot t+2727.78$

$60+\mathrm{nSolve}(y2=4000,t) \blacktriangleright 241.561$ = **total time**

3.6.2

Two Tanks

Δx = amount input − amount output

= (concentration_in x rate_in) x Δt − (concentration_out x rate_out) x Δt

For A:

dx1(t)/dt = 3 * 5 − 5x1(t)/50 * 5, x1(0) = 50

$$\text{deSolve}\left(\mathbf{x1}'=15-\frac{5\cdot \mathbf{x1}}{50} \text{ and } \mathbf{x1}(0)=50,t,\mathbf{x1}\right) ▸ \mathbf{x1}=150-100\cdot e^{\frac{-t}{10}}$$

$$\mathbf{x1}:=150-100\cdot e^{\frac{-t}{10}} ▸ 150-100\cdot e^{\frac{-t}{10}}$$

For B:

dx2(t)/dt = x1(t)/50 * 5 − x2(t)/50 * 5, x2(0) = 100

$$\text{deSolve}\left(x2'=\frac{\mathbf{x1}}{50}\cdot 5-\frac{x2}{50}\cdot 5 \text{ and } x2(0)=100,t,x2\right) ▸ x2=10\cdot e^{\frac{-t}{10}}\cdot\left(15\cdot e^{\frac{t}{10}}-t-5\right) = 150-10\, e^{-0.1t}(10t+50)$$

#1: $\displaystyle\int \frac{1}{15 - 0.1\cdot x}\,dx = \int 1\,dt + c$

#2: $-10\cdot \text{LN}(x - 150) = c + t$

#3: $\text{SOLVE}(-10\cdot \text{LN}(x - 150) = c + t,\ x)$

#4: $x = e^{-c/10 - t/10} + 150$

#5: $x = c\cdot e^{-t/10} + 150$

#6: $\text{SOLVE}(50 = c\cdot e^{-0/10} + 150,\ c) = (c = -100)$

#7: $x = 150 - 100\cdot e^{-t/10}$

#8: $\text{DSOLVE1}(0.1\cdot y - 15 - 10\cdot e^{-0.1\cdot t},\ 1,\ t,\ y,\ 0,\ 100)$

#9: $e^{t/10}\cdot(y - 150) - 10\cdot t = -50$

#10: $\text{SOLVE}(e^{t/10}\cdot(y - 150) - 10\cdot t = -50,\ y)$

#11: $y = e^{-t/10}\cdot(10\cdot t - 50) + 150$

3.9.2

y''+1/4·y'+2y = 2 cos(ω t), y(0) = 0, y'(0) = 2 [ω>0]

Solving the homogeneous differential equation:

characteristic equation: $\text{cZeros}\left(s^2+\frac{s}{4}+2,s\right) \blacktriangleright \left\{\frac{-1}{8}+\frac{\sqrt{127}}{8}\cdot i,\frac{-1}{8}-\frac{\sqrt{127}}{8}\cdot i\right\}$

complementary solution: $\mathbf{yc}(t):=e^{\frac{-t}{8}}\cdot\left(a\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{127}}{8}\cdot t\right)+b\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{127}}{8}\cdot t\right)\right) \blacktriangleright \textit{Fertig}$

$\mathbf{yc1}(t):=\frac{d}{dt}(\mathbf{y}(t)) \blacktriangleright \textit{Fertig}$

$\mathbf{yc1}(t)$

$$\blacktriangleright \frac{8\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega\cdot t)}{16\cdot\omega^4-63\cdot\omega^2+64}+\frac{32\cdot\omega\cdot(\omega^2-2)\cdot\sin(\omega\cdot t)}{16\cdot\omega^4-63\cdot\omega^2+64}+2\cdot e^{\frac{-t}{8}}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{127}\cdot t}{8}\right)-\frac{2\cdot\sqrt{127}\cdot e^{\frac{-t}{8}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{127}\cdot t}{8}\right)}{127}$$

$\text{solve}(\mathbf{yc}(0)=0 \text{ and } \mathbf{yc1}(0)=2,\{a,b\}) \blacktriangleright a=0 \text{ and } b=\boldsymbol{c1} \text{ and } \omega=0$

$\mathbf{ycc}(t):=\frac{e^{\frac{-t}{8}}\cdot 16\cdot\sqrt{127}}{127}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{127}}{8}\cdot t\right) \blacktriangleright \textit{Fertig}$

Check the solution: $\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{ycc}(t))+\frac{1}{4}\cdot\frac{d}{dt}(\mathbf{ycc}(t))+2\cdot\mathbf{ycc}(t) \blacktriangleright 0$

particulary solution applying variation of parameters:

$\mathbf{yp}(t):=\frac{-32\cdot(\omega^2-2)}{16\cdot\omega^4-63\cdot\omega^2+64}\cdot\cos(\omega\cdot t)+\frac{8\cdot\omega}{16\cdot\omega^4-63\cdot\omega^2+64}\cdot\sin(\omega\cdot t) \blacktriangleright \textit{Fertig}$

$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{yp}(t))+\frac{1}{4}\cdot\frac{d}{dt}(\mathbf{yp}(t))+2\cdot\mathbf{yp}(t)=2\cdot\cos(\omega\cdot t) \blacktriangleright \text{true}$

Compare the coefficients of cos and sin and solve for {aa,bb}

$\text{solve}\left(aa\cdot(2-\omega^2)+\frac{bb\cdot\omega}{4}=2 \text{ and } bb\cdot(2-\omega^2)-\frac{aa\cdot\omega}{4}=0,\{aa,bb\}\right)$

$\blacktriangleright aa=\frac{-32\cdot(\omega^2-2)}{16\cdot\omega^4-63\cdot\omega^2+64} \text{ and } bb=\frac{8\cdot\omega}{16\cdot\omega^4-63\cdot\omega^2+64}$

$\mathbf{yp}(t):=\frac{-32\cdot(\omega^2-2)}{16\cdot\omega^4-63\cdot\omega^2+64}\cdot\cos(\omega\cdot t)+\frac{8\cdot\omega}{16\cdot\omega^4-63\cdot\omega^2+64}\cdot\sin(\omega\cdot t) \blacktriangleright \textit{Fertig}$

$\mathbf{y}(t):=\mathbf{ycc}(t)+\mathbf{yp}(t) \blacktriangleright \textit{Fertig}$

$$\mathbf{y}(t) \blacktriangleright \frac{-32\cdot(\omega^2-2)\cdot\cos(\omega\cdot t)}{16\cdot\omega^4-63\cdot\omega^2+64}+\frac{8\cdot\omega\cdot\sin(\omega\cdot t)}{16\cdot\omega^4-63\cdot\omega^2+64}+\frac{16\cdot\sqrt{127}\cdot\mathbf{e}^{\frac{-t}{8}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{127}\cdot t}{8}\right)}{127}$$

$$\text{tCollect}(\mathbf{yp}(t)) \blacktriangleright \frac{-8\cdot\left(4\cdot(\omega^2-2)\cdot\cos(\omega\cdot t)-\omega\cdot\sin(\omega\cdot t)\right)}{16\cdot\omega^4-63\cdot\omega^2+64}$$

$\mathbf{f1}(x):=\mathbf{yp}(x)|\omega=\mathbf{w}$ ▸ *Fertig*

Use the following identity (DERIVE) to find the amplitude of the oscillation:

```
a·COS(x) + b·SIN(x)
```

$$\sqrt{(a^2+b^2)}\cdot\text{SIGN}(a)\cdot\text{COS}\left(\text{ATAN}\left(\frac{b}{a}\right)-x\right)$$

$$\frac{-8\cdot\sqrt{16\cdot(\omega^2-2)^2+\omega^2}\cdot\text{sign}(\omega^2-2)}{16\cdot\omega^4-63\cdot\omega^2+64} \blacktriangleright \frac{-8\cdot\text{sign}(\omega^2-2)}{\sqrt{16\cdot\omega^4-63\cdot\omega^2+64}}$$

$$\text{zeros}\left(\frac{d}{d\omega}\left(\frac{-8\cdot\text{sign}(\omega^2-2)}{\sqrt{16\cdot\omega^4-63\cdot\omega^2+64}}\right),\omega\right) \blacktriangleright \left\{\frac{-3\cdot\sqrt{14}}{8},0,\frac{3\cdot\sqrt{14}}{8}\right\}$$

$\mathbf{f1}(x):=\mathbf{yp}(x)|\omega=\mathbf{w}$ ▸ *Fertig*

Use the following identity (DERIVE) to find the amplitude of the oscillation:

```
a·COS(x) + b·SIN(x)
```

$$\sqrt{(a^2+b^2)}\cdot\text{SIGN}(a)\cdot\text{COS}\left(\text{ATAN}\left(\frac{b}{a}\right)-x\right)$$

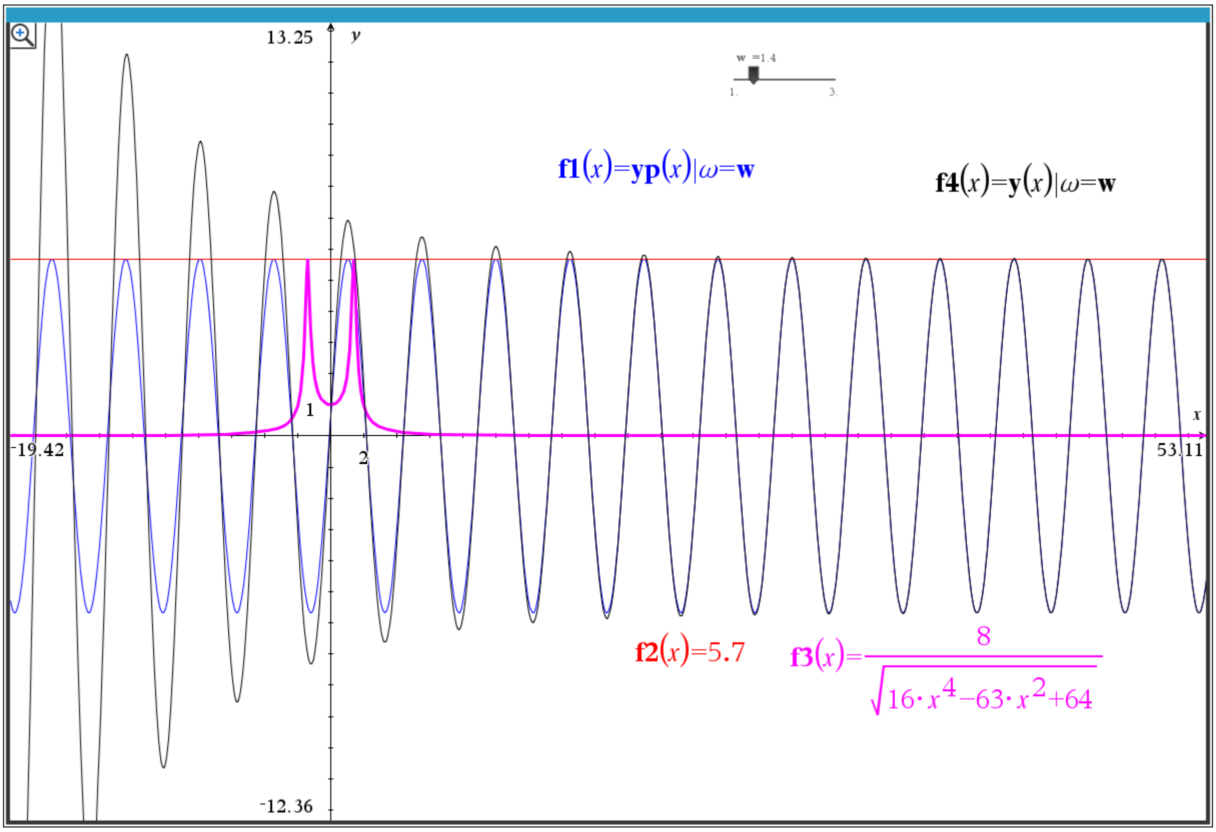
$$\frac{-8\cdot\sqrt{16\cdot(\omega^2-2)^2+\omega^2}\cdot\text{sign}(\omega^2-2)}{16\cdot\omega^4-63\cdot\omega^2+64} \blacktriangleright \frac{-8\cdot\text{sign}(\omega^2-2)}{\sqrt{16\cdot\omega^4-63\cdot\omega^2+64}}$$

$$\text{zeros}\left(\frac{d}{d\omega}\left(\frac{-8\cdot\text{sign}(\omega^2-2)}{\sqrt{16\cdot\omega^4-63\cdot\omega^2+64}}\right),\omega\right) \blacktriangleright \left\{\frac{-3\cdot\sqrt{14}}{8},0,\frac{3\cdot\sqrt{14}}{8}\right\}$$

$$\frac{-8\cdot\text{sign}(\omega^2-2)}{\sqrt{16\cdot\omega^4-63\cdot\omega^2+64}}\Big|\omega=\frac{3\cdot\sqrt{14}}{8} \blacktriangleright \frac{64\cdot\sqrt{127}}{127}$$

$$\mathbf{f3}(x):=\frac{8}{\sqrt{16\cdot x^4-63\cdot x^2+64}} \blacktriangleright \textit{Fertig}$$

$\mathbf{f4}(x):=\mathbf{y}(x)|\omega=\mathbf{w}$ ▸ *Fertig*



13.25
y
w =1.4
1.
3.
f1(x)=yp(x)|ω=w
f4(x)=y(x)|ω=w
1
x
-19.42
2
53.11
f2(x)=5.7
f3(x)=8/√(16·x^4−63·x^2+64)
-12.36