# TI83 - Programm GERGERPT Ac

Das Programm untersucht die **Inzidenz** zweier Geraden g: $\overrightarrow{OX} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$ und h: $\overrightarrow{OX} = \vec{b} + \mu\vec{v}$
Es ermittelt ferner den **Abstand** d sowie alle dazu nötigen Zwischenergebnisse.
Alle Ergebnisse werden sowohl in Bruchform als auch in Dezimalschreibweise angegeben .
Es sind sowohl 3-dimensionale als auch 2-dimensionale Probleme (z-Komponente = 0 !) lösbar.
Der Sonderfall **Punkt-Gerade** kann bei der Abstandsbestimmung gleichfalls untersucht werden.

**<u>Vor</u>** dem Programmstart müssen die 4 Listen L1 bis L4 mit den Komponenten der Vektoren $\vec{a}, \vec{u}, \vec{b}, \vec{v}$ (Reihenfolge beachten !) belegt werden.

Während der Programmabarbeitung werden noch die Listen L5 (für $\vec{b} - \vec{a}$) und L6 (für temporäre Berechnungen von Vektoren) belegt.
Außerdem werden Matrizen A,B,C,D,E,F,G verwendet.

Ferner wird ein „Fallunterscheider“ P verwendet mit folgenden Belegungsmöglichkeiten:
P=1 g,h sind parallel und nicht gleich
P=2 g,h sind gleich
P=3 g,h sind windschief
P=4 g,h schneiden sich im Punkt S

## <u>Programmablauf:</u>

1) Im Programm erfolgt zunächst die Parallelitätsprüfung ( Gibt es ein k mit $\vec{u} = k\vec{v}$ ? ).

Dies führt zum vektoriellen Ansatz $\begin{pmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} v1 \\ v2 \\ v3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot v1 \\ k \cdot v2 \\ k \cdot v3 \end{pmatrix}$ und somit k=u1/v1=u2/v2=u3/v3 .
Aus Gründen der Rechengenauigkeit wird äquivalent umgeformt: u1*v2=u2*v1 und u1*v3=u3*v1.
Sind diese Bedingungen erfüllt, dann sind die Geraden parallel. Im Programm ist dann P=1, sonst 3 .

Ist P=1, so wird auf Gleichheit geprüft. $\vec{b} - \vec{a} = k\vec{v}$ ? . Ähnliche Vorgehensweise wie bei 1).

2) Ist P weder 1 noch 2, so wird jetzt auf Windschiefheit oder Schnittpunkt geprüft.
Hierzu ist das LGS $\vec{a} + \lambda\vec{u} = \vec{b} + \mu\vec{v}$ zu lösen . Bei eindeutiger Lösung existiert ein Schnittpunkt, bei einem Widerspruch sind g und h windschief. S wird ggfs. berechnet .

3) Die jeweilige Lösung wird am Bildschirm ausgegeben. Für S wird ggfs. sein Ortsvektor ausgegeben.

4) Nun werden die jeweiligen Abstände berechnet und ausgegeben.
Bei Gleichheit von g und h (Fall P=2) sowie bei Existenz eines Schnittpunktes S (Fall P=4) ist natürlich nichts zu rechnen, denn der Abstand ist d=0 !
Relativ aufwändig sind jedoch die Rechnungen zu den Fällen P=1 und P=3 .

5) Abstand d bei Parallelität:
Hierbei wird die Orthogonalität verwendet. Man fällt das Lot vom „Stützpunkt“ A der Gerade g auf die Gerade h mittels des Skalarproduktansatzes $(\vec{b} - \vec{a} + \mu\vec{v}) * \vec{v} = 0$.
Man erhält dann das zum Lotfußpunkt F auf h gehörende $\mu$, womit sich F berechnen lässt.
Der Abstand d ist dann der Betrag des Vektors $\overrightarrow{AF}$. ( Abstand Punkt-Gerade !)

6) Abstand d bei Windschiefheit:
Hierbei werden zwei (Lotfuß-)Punkte P auf g und Q auf h gesucht durch die Ansätze:
$\overrightarrow{OP} = \vec{a} + \lambda\vec{u}$ $\overrightarrow{OQ} = \vec{b} + \mu\vec{v}$ $\overrightarrow{PQ} * \vec{u} = 0$ sowie $\overrightarrow{PQ} * \vec{v} = 0$

Das aus den beiden Orthogonalitätsbedingungen resultierende LGS lautet wie folgt:

$$\lambda\vec{u}^2 - \mu\vec{u} * \vec{v} = (\vec{b} - \vec{a}) * \vec{u} \quad \wedge \quad \lambda\vec{u} * \vec{v} - \mu\vec{v}^2 = (\vec{b} - \vec{a}) * \vec{v}$$

Mit dem TI83 lassen sich die Skalarprodukte (Koeffizienten von $\lambda, \mu$) so berechnen:

$\vec{u} * \vec{v}$ = sum(L2L4)
$\vec{u}^2$ = sum(L2$^2$)
$\vec{v}^2$ = sum(L4$^2$)
$(\vec{b} - \vec{a}) * \vec{u}$ = sum(L5L2)
$(\vec{b} - \vec{a}) * \vec{v}$ = sum(L5L4)

Anschließend werden die entsprechenden Koeffizienten von $\lambda, \mu$ in eine Matrix [A] geschrieben ( beispielsweise: -sum(L4$^2$) STO [A](2,2) ) und mittels rref([A]) gelöst.
Mithilfe der Parameter $\lambda, \mu$ lassen sich die Punkte P, Q berechnen und somit auch d = $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$.

**Beispiele:**

1)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

```
L1      L2      L3     1
3       2       0
-1      -3      5
5       -1      -3
------  ------  ------

L1 ={3, -1,5}
```

```
L2      L3      L4     4
2       0       -4
-3      5       6
-1      -3      2
------  ------  ------

L4 ={-4,6,2}
```

```
INZIDENZ VON G,H

DIE VEKTOREN
A,U,B,V MUESSEN
IN L1 BIS L4
VORLIEGEN !!
             [ENTER]
```

```
G,H PARALLEL

        [ENTER]
```

```
LAMBDA=
                -4/7
```

```
LOTFUSSP.: OF=
          [[16/7 ]
           [11/7 ]
           [-29/7]]
[[2.285714286 ]
 [1.571428571 ]
 [-4.142857143]]
```

```
VEKTOR AF=
          [[-5/7 ]
           [18/7 ]
           [-64/7]]
[[-.7142857143]
 [2.571428571 ]
 [-9.142857143]]
```

```
 [2.571428571 ]
 [-9.142857143]]
QUAD. ABST. D²=
               635/7
ABSTAND D=
         9.524404743
                Done
█
```

2)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 19 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

```
G,H WINDSCHIEF

             [ENTER]
```

```
LAMBDA=
                 1/2
MUE=
                  -1
```

```
LOTFUSSP.: OP=
              [[2]
               [3]
               [6]]
              [[2]
               [3]
               [6]]
```

```
LOTFUSSP.: OQ=
             [[-9]
              [13]
              [-1]]
             [[-9]
              [13]
              [-1]]
```

```
VERB.VEKTOR PQ=
          [[-11]
            [10 ]
            [-7 ]]
          [[-11]
            [10 ]
            [-7 ]]
```

```
             [10 ]
             [-7 ]]
QUAD. ABST. D²=
                 270
ABSTAND D=
         16.43167673
                Done
█
```

3)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
ORTSVEKTOR OS=
          [[2 ]
            [1 ]
            [-3]]
          [[2 ]
            [1 ]
            [-3]]
```

```
ABSTAND=0
                Done
█
```

4)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

```
G=H
```

```
ABSTAND=0
             Done
```

5)

A(3/0/7)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Achtung: Hier sollte

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

gewählt werden !

```
G,H PARALLEL
```

```
LAMBDA=
           -11/28
```

```
LOTFUSSP.: OF=
       [[11/7   ]
        [37/14  ]
        [-53/14]]
[[1.571428571 ]
 [2.642857143 ]
 [-3.785714286]]
```

```
VEKTOR AF=
       [[-10/7   ]
         [37/14   ]
         [-151/14]]
[[-1.428571429]
 [2.642857143 ]
 [-10.78571429]]
```

```
 [2.642857143 ]
 [-10.78571429]]
QUAD. ABST. D²=
          1755/14
ABSTAND D=
      11.19630041
             Done
```

6)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

z-Komp = 0 !!

```
L1      L2      L3     1
5       -2      8
5       -4      -1
0       0       0
------  ------  ------

L1 ={5,5,0}
```

```
G,H PARALLEL
```

```
LAMBDA=
              9/5
```

```
LOTFUSSP.: OF=
          [[49/5]
            [13/5]
            [0   ]]
           [[9.8]
             [2.6]
             [0  ]]
```

```
VEKTOR AF=
          [[24/5 ]
            [-12/5]
            [0    ]]
           [[4.8 ]
             [-2.4]
             [0   ]]
```

```
            [-2.4]
            [0   ]]
QUAD. ABST. D²=
            144/5
ABSTAND D=
      5.366563146
             Done
```