C A l i M E R O

Computer-Algebra im Mathematikunterricht
Entdecken, Rechnen, Organisieren

A R B E I T S M A T E R I A L I E N

BAND 5

Arbeitsmaterialien für Schülerinnen und Schüler

mit den Themen:

Problemlösen lernen

Quadratische Zusammenhänge

Vorwort

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler:

Ihr habt für den Mathematikunterricht einen Taschencomputer (**TC**) zur Verfügung, der euch helfen kann, Mathematik noch besser zu verstehen und viel unnötige Rechen- und Zeichenarbeit abnehmen wird. Damit das gut gelingen kann, ist dieses Lernmaterial in einem Schulversuch des Landes Niedersachsen extra für diesen Zweck für euch erarbeitet worden. Neben neu entwickelten Aufgaben wurden auch Aufgaben aus bisherigen Lehrbüchern ausgewählt, die speziell für einen Unterricht mit dem Einsatz eines Taschencomputers geeignet sind.
Im Schulversuch konnte gezeigt werden, dass ein Unterricht mit diesem Aufgabenmaterial und dem Einsatz eines Taschencomputers einen Mehrwert an mathematischer Kompetenz erbringen bzw. diese wesentlich unterstützen kann. Es konnte auch gezeigt werden, dass durch den Einsatz des Taschencomputers die Kommunikation der Schülerinnen und Schülern unterstützt und eine Vorgehensreflexion gefördert wurde. Von großer Bedeutung für eine erfolgreiche Arbeit mit einem Taschencomputer ist ein ganzheitliches Unterrichtskonzept, in dem darauf geachtet wird, dass neben offenen, kreativitätsfördernden Aufgaben mit Rechnerunterstützung immer wieder auch mathematisches Grundkönnen ohne Rechner gefördert und eingefordert wird.
Die Aufgabensammlungen für die einzelnen Unterrichtseinheiten sind so zusammengestellt, dass sie die in den Bildungsstandards geforderten Kompetenzen unterstützen und fördern. Zu diesem Themenheft für euch gibt es auch noch entsprechend entwickelte Handreichungen für die Lehrer.

Dieses vierte Themenheft hat vier Kapitel.

1. **Problemlösen lernen**
2. **Quadratische Zusammenhänge**
3. **TC-Hilfen**
4. **Kopfübungen - Basiswissen**

Im ersten Kapitel steht das Erarbeiten und Entdecken von Problemlösestrategien im Vordergrund. Ihr sollt euch bewusst machen: *Was hat mir geholfen, eine schwierige Aufgabe oder ein Problem zu lösen?* Mit den Beispielen könnt ihr euren eigenen „Werkzeugkasten“ mit Strategien und Hilfsmitteln füllen, die euch befähigen, auch künftige Probleme mathematisch zu meistern. Es bietet sich an, auf die erlernten Problemlösestrategien auch in den folgenden Unterrichtseinheiten immer wieder zurückzugreifen und sie gegebenenfalls mit den Aufgaben wieder zu trainieren. Daher haben wir zu den Problemlöseaufgaben auch Lösungsmöglichkeiten hinzugefügt.

Der Einstieg in die Unterrichtsreihe erfolgt über Optimierungsaufgaben. Die dazu benötigten quadratischen Funktionen werden zum einen in faktorisierter Form (Kaninchenstall, Theatereinnahmen), zum anderen in allgemeiner Form (Acapulco-Springer, Benzinverbrauch) in arbeitsteiliger Gruppenarbeit untersucht. Die Vorstellung der Ergebnisse durch die Gruppen mündet in die Einführung des neuen Graphentyps und der zugehörigen Begriffe quadratische Funktion, Parabel, allgemeine Form, faktorisierte Form, Normalparabel, Scheitelpunkt.

Arbeitsteilig werden im Anschluss mithilfe des TC sowohl die allgemeine Form als auch die faktorisierte Form der Funktionsgleichung hinsichtlich des Einflusses der Parameter auf die Lage des Graphen untersucht. Dabei ist die Untersuchung durch die Formulierung der Aufgabenstellung zunächst sehr angeleitet und dann schrittweise offener angelegt. Es ist bewusst intendiert, dass die Schülerinnen und Schüler die für sie neuen Terme mehrfach eingeben müssen und eingabeverkürzende Möglichkeiten des TC im Hintergrund bleiben. Die Zusammenführung der Ergebnisse ermöglicht eine gründliche Strukturanalyse: Streckung, Streckfaktor a, Öffnung, Symmetrie der Parabel, y-Achsenabschnitt c, Zusammenhang zwischen Lage der Nullstellen (m und n) und x-Wert des Scheitelpunktes.

Im Rahmen von als Selbstlerneinheit konzipierten Langzeitaufgaben sollen die Schülerinnen und Schüler parallel zur Fortführung des Unterrichtsganges händische Grundfertigkeiten (Zeichnen, Bestimmen von Nullstellen und Scheitelpunkten, Lösen einfacher quadratischer Gleichungen) erlernen und üben.

In einem weiteren Graphenlabor wird die Wirkung der Parameter a, d und e in der Scheitelpunktform $f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$ untersucht. Im Gegensatz zur den vorigen Untersuchungen werden hier weitere Möglichkeiten des TC (CAS, Makro, "with"-Operator) genutzt.

In einer Standortbestimmung werden tabellarisch die Vorzüge der einzelnen Darstellungsformen der quadratischen Funktionen aufgelistet und den Schülerinnen und Schülern somit jeweils günstige Darstellungsformen zum Lösen von Standardaufgaben an die Hand gegeben.

Es schließt sich eine intensive Übungs- und Anwendungsphase an, in der mit Rechnerhilfe variantenreich Problemstellungen zu bearbeiten sind. Hier wird auch der Wechsel zwischen den einzelnen Formen thematisiert. Im vorliegenden Konzept soll dieser Wechsel unter Verzicht auf pq-Formel und quadratische Ergänzung erreicht werden. Als Strategien werden Ausmultiplizieren bzw. Faktorisieren mit TC-Befehlen ("expand" und "factor") verwendet. Analytisch konstruktiv kann über Mittelwertbildung (Nullstellen → x-Koordinate des Scheitelpunktes → y-Koordinate des Scheitelpunktes) bzw. bei nicht faktorisierbaren Funktionstermen über die TC-Befehle "fMin" und "fMax" die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform aufgestellt werden.

In der folgenden Sequenz werden aus vorgegebenen Punkten Funktionsgleichungen von Parabeln erstellt. Zunächst erfolgt dies auf der Basis dreier ausgezeichneter Punkte (Scheitelpunkt und zwei weitere) händisch. An dieser Stelle wird auf die Lösung über lineare Gleichungssysteme bewusst verzichtet. Im Folgenden werden Punktwolken durch die Nutzung des Regressionsmoduls beschrieben. Grenzen der Modellierung werden ebenfalls aufgezeigt.

Im Sinne der Ergebnissicherung werden mit den Schülerinnen und Schülern abschließend zu einzelnen grundlegenden Problemstellungen Flussdiagramme erarbeitet, die die Vorgehensweise zu deren Lösung veranschaulichen. Dabei fließen auch die Ergebnisse aus den Langzeitaufgaben ein.

Bei der Betrachtung der Parabel als Ortslinie wird die Untersuchung auf den Ort aller Punkte beschränkt, die zu einem Punkt und zu einer Geraden gleichen Abstand haben.

Die TC-Hilfen sind eine Sammlung der in diesem Themenheft für euch neuen Rechnerfertigkeiten. Die Arbeitsblätter der TC-Hilfe sollen ein Nachschlagewerk entstehen lassen, auf das bei Bedarf zurückgegriffen werden kann. Dieses Konzept wird während der folgenden Unterrichtseinheiten beibehalten. Die Arbeitsblätter sind anfangs weitgehend vorgefertigt, später wird ihr Inhalt auf die wichtigsten Informationen reduziert, um den Umfang des Nachschlagewerks überschaubar zu halten. Am Ende eines jeden neuen Kapitels werden noch einmal die neuen Rechnerfertigkeiten mit Beispielen zusammengefasst.

Den Abschluss bilden einige sogenannte Kopfaufgaben und Aufgaben zum Basiswissen. In diesem Teil findet ihr Aufgaben, die alle wichtigen Basiskompetenzen der vergangenen Jahre aus den Bereichen "Zahl, Messen, Raum und Form", "Funktionale Zusammenhänge" sowie "Daten und Zufall" wiederholen. Hier findet ihr einfache Aufgaben, für den Fall, dass ihr wenig Erinnerung habt, aber auch komplexere Aufgaben, wenn ihr testen möchtet, wie viel ihr noch könnt. Die Aufgaben aus diesem Teil helfen euch durch regelmäßige eigenständige Arbeit die Wissenslücken wieder zu schließen, ihr erinnert euch an eure mathematischen Kenntnisse und mobilisiert eure Fertigkeiten sowie Fähigkeiten. Langfristig entwickelt ihr so eine hohe mathematische Kompetenz und erhaltet euch ein gutes Basiswissen.

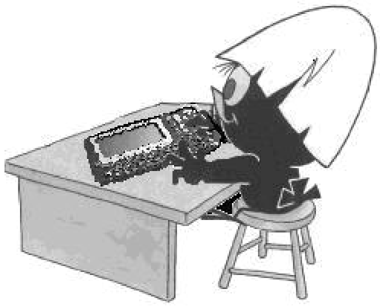
Die Autoren dieses Themenheftes wünschen euch mit dem Taschencomputer und diesem Heft viel Erfolg!

Bergkirchen im Januar 2009

INHALTSVERZEICHNIS

C A l i M E R O

Computer-Algebra im Mathematikunterricht
Entdecken, Rechnen, Organisieren



Problemlösen lernen

Arbeitsmaterialien für Schülerinnen und Schüler

Klasse	1. Probleme mathematisch lösen mit Marinda	Blatt: 1.1	Datum:

In der folgenden Geschichte sind 5 unterschiedlich schwierige Knobelaufgaben versteckt. Du sollst mindestens 3 der 5 Aufgaben lösen und in der abschließenden 6.Aufgabe noch einmal die Strategien (Heurismen) notieren, die Dir geholfen haben, die Knobelaufgaben zu lösen. Lies den Text genau durch und versuche Marinda bei ihren Problemen zu helfen!

Marinda
und
die Heurismen

Vielleicht kennt auch ihr jenes ferne Land, weit, weit im Osten, hinter den allerhöchsten Bergen, in dem der König der Bären mit seiner Familie und seinen Freunden wohnt. In diesem Land fließen Milch und Honig und gegen Mittag fliegen einem entweder gebratene Tauben oder Cheeseburger TS in den Mund. Das macht die Leute in den Nachbarländern leider neidisch und schafft eine Reihe von Problemen. Dieses Abenteuer soll euch zeigen, wozu Strategien zum Problemlösen hilfreich sein können.

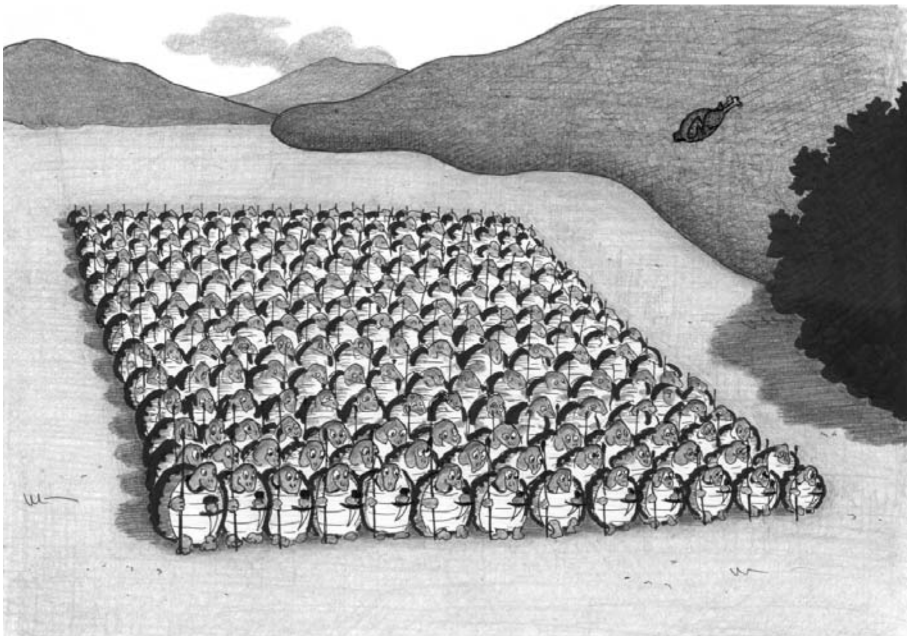
Gleich neben dem Land des Königs der Bären wohnen die streitlustigen Nunja-Schildkröten, die immer wieder versuchen, den König und seine Leute aus diesem paradiesischen Land zu vertreiben, um ganz allein an die mittäglichen Cheeseburger TS zu gelangen. Bisher haben der König und seine Leute jeden Ansturm der Schildkröten mit einigen kräftigen Fußtritten abwehren können, aber inzwischen sind die Schildkröten zahlreicher geworden und haben eine neue, gefährliche Eroberungsweise entwickelt. Sie greifen nämlich in einer Rechteckformation an, so dass sie sich gegenseitig festhalten und dabei weitermarschieren können.

Der König braucht dringend Verstärkung. Er schickt seine Eule mit einer Botschaft los, um die befreundete Hexe Marinda herbeizurufen. Als Marinda von der Notlage erfährt, setzt sie sogleich ihren großen Zauberhut auf, ruft ihre tapfere Katze, schwingt sich auf ihren Besen und fliegt los, um dem König der Bären beizustehen. Der Weg ist weit. Die Eule muss sich ganz schön anstrengen, um mit der ungeduldigen, zur Eile drängenden Hexe schnell genug mitfliegen zu können.

Klasse	1. Probleme mathematisch lösen mit Marinda	Blatt: 1.2	Datum:

Die Katze hingegen bleibt ganz ruhig und hält sich mit ihren langen Krallen gut an Marindas Kleid fest. „Wie viele angreifende Schildkröten hast du denn beim Herflug gezählt?“, fragt Marinda die Eule. Doch die Eule ist derart außer Atem, dass sie die Antwort erst geben kann, als Marinda landet, um dem Besen eine kurze Verschnaufpause zu gönnen.

Auf ihrem Flug zu Marinda zählte die Eule, dass sich genau **208 Schildkröten** zum Angriff versammelt haben. Auf dem Bild hier sind die letzten Schildkrötenreihen schon nicht mehr zu erkennen.



Aufgabe 1: Wie viele Schildkröten stehen außen?

Die Nunja-Schildkröten greifen stets in einer bestimmten Rechtecksformation an, die 13 Schildkröten breit ist. Noch ist Marinda nicht da und der König der Bären hat leider lediglich 70 Leute zur Verfügung. Doch bräuchten ja auch nur die Schildkröten, die außen stehen, jeweils einen auf den Deckel zu bekommen, um ihr Vordringen zu stoppen.
Kannst du dem König der Bären dabei helfen zu klären, wie viele Leute er mindestens braucht, um jede der außen stehenden Schildkröten in eine einzelne Keilerei zu verwickeln?

Klasse	1. Probleme mathematisch lösen mit Marinda	Blatt: 1.3	Datum:

Es gelingt. Durch den klugen Plan konnte der König der Bären die Nunja-Schildkröten zermürben und wieder nach Hause schicken. Kurz darauf trifft endlich Marinda beim König ein. Dieser begrüßt sie herzlich, zeigt sich von dem fliegenden Besen begeistert und sagt: „Ich freu mich schon darauf, einmal mit dem Ding zu fliegen.“ Er möchte unbedingt zusammen mit Ferdi, der besonders gut sehen kann, und Trudl, die für ihr scharfes Gehör bekannt ist, auf einen Erkundungsflug gehen, um zu sehen, was die Schildkröten jetzt unternehmen. Doch da muss Marinda das Gesicht verziehen. Marinda weiß nämlich nicht sofort, ob der Besen sie, den Bärenkönig, Ferdi, Trudl und die Katze tragen kann. Sie weiß nur, dass sie mit dem Besen bereits einmal mit einem Kamel und dessen zwei, gleich schweren Reitern zu einem Kamelrennen geflogen ist. Das Kamel hatte 248 kg, Kamel und ein Reiter besaßen zusammen 307 kg und Marinda selbst ist 52 kg schwer. Das hatte der Besen damals problemlos geschafft. Und bei dem jetzt vom König gewünschten Flug hat Trudl 75 kg, Marinda und die Katze haben zusammen 58 kg und Ferdi wiegt genauso viel wie Trudl.

Aufgabe 2: Was kann der Besen alles tragen?

a) Fülle die vorgegebene Additionsmauer aus!
   Tour zum Kamelrennen - Masse von 4 Fluggästen in kg
   Masse von jeweils 2 Personen
   (Kamel und 1 Reiter sowie Marinda und der 2.Reiter
   Masse von jeweils einem Fluggast (Kamel, Reiter, Marinda)

b) Wie viel kg darf der König der Bären wiegen, wenn der Besen gerade so viel trägt wie im Falle des Kameltransports? Notiere die geplante Tour mit dem Bärenkönig auch als Additionsmauer!

307		
248		52

Auf der Reise bekommt der König der Bären plötzlich riesigen Hunger. Beim Flug über das weite Land bleibt den Fünfen nichts anderes übrig, als ein kleines Gasthaus der Nunja-Schildkröten anzusteuern, in dem sie auf eine Handvoll Schildkröten stoßen, die sie verblüfft anstarren. Da Marinda nicht möchte, dass sich der Bärenkönig und seine beiden Freunde mit den Schildkröten prügeln, überlegt sie sich, die ohnehin eingeschüchterten Kröten mit einem Spiel zu überlisten.

Klasse	1. Probleme mathematisch lösen mit Marinda	Blatt: 1.4	Datum:

Aufgabe 3: Nimm-Spiel

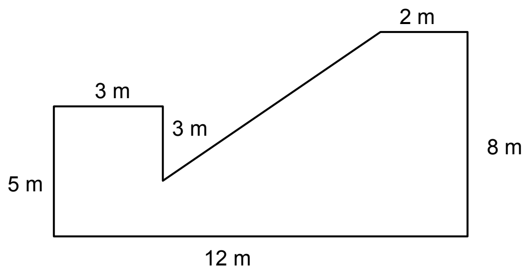
In dem Gasthaus befinden sich 36 kleine Teller mit Süßigkeiten darauf. Marinda überlegt kurz und schlägt dann folgende Regeln vor:
Die Schildkröten sollen beginnen; beide (Marinda und ein Sprecher der Kröten) sollen abwechselnd jeweils eine Anzahl von Tellern zwischen 1 und 5 nehmen. Wer den oder die letzten Teller nehmen kann, hat das Spiel gewonnen und darf alle Süßigkeiten aufessen.

a) Warum kann Marinda immer gewinnen? Welche Rolle spielt dabei die Zahl 6?
b) Wie würde Marinda die Regeln wählen, wenn es 35 Teller wären?
c) Wie könnten die Regeln lauten, wenn es 37 Teller wären (oder allgemein bei einer Anzahl an Tellern, die eine Primzahl ist)?

Zwar sind die Schildkröten im Laufen und Denken etwas langsam, aber während der Bärenkönig und seine Freunde genüsslich aufessen, was das Gasthaus zu bieten hat, können die Schildkröten nahezu alle Kröten ihrer Nachbarschaft zu Hilfe holen. So kommt es doch noch zu einem Kampf, den die Nachwelt später als „Schlacht am Melonenfeld" in ihre Geschichtsbücher schreiben wird.

Aufgabe 4: Das Melonenfeld

Hinter dem Gasthaus befindet sich ein Feld voller Wassermelonen. An diesem Feld stehen sich die Schildkröten und die Bären gegenüber. Schnell greifen sich die Streitenden einige Melonen, um sie sich gegenseitig an den Kopf zu werfen. Das Melonenfeld hat folgende Maße und sieht so aus:



Auf einem Quadratmeter wachsen 16 Melonen. Wie viele Melonen stehen den Streitenden also insgesamt zur Verfügung?

Klasse	1. Probleme mathematisch lösen mit Marinda	Blatt: 1.5	Datum:

Schon nach wenigen Treffern sind die Felle der Bären und die Schilde der Schildkröten ganz verklebt von dem Melonensaft, aber keine Seite gibt auf. Zum Schluss stecken alle fußtief im vom Melonensaft blutroten, matschigen Melonenfeld fest und sehen allesamt erschreckend aus.

Marinda, die sich zusammen mit der Katze den Kampf aus sicherer Entfernung angesehen hat, schüttelt den Kopf, nimmt ihren Besen und beginnt die Bären aus dem roten Sumpf herauszuziehen, was ihr mit viel Mühe nach und nach gelingt. Die fest sitzenden Schildkröten sehen ihnen wütend zu, können sie aber nicht aufhalten. Nun ist es höchste Zeit, nach Hause zu fliegen.

Klasse	1. Probleme mathematisch lösen mit Marinda	Blatt: 1.6	Datum:

Als sie sich dem Land des Bärenkönigs nähern, bemerken sie eine Gruppe von Nunja-Schildkröten, die gerade dabei sind, sich im Schutz des Waldes an das Schloss des Königs heranzuschleichen. Wütend fordert der König die Hexe Marinda auf zu landen, damit Ferdi, Trudl und er die Strauchdiebe vertreiben können. Es kommt abermals zu einer turbulenten Auseinandersetzung, an der diesmal auch die Katze teilnimmt. Von diesem Schlagabtausch blieb folgender Bericht erhalten, welchen eine der beteiligten Schildkröten später zu Hause abgab.

Aufgabe 5: Wie viele Schildkröten waren es?

„Als wir gerade aus dem Wald kamen, überfielen sie uns, und dabei ist bereits die Hälfte meiner Schildkröten plus 3 einfach abgehauen. Als sie uns eine Meute von Bestien [der Berichtende meint die kratzende Katze] auf den Hals hetzten, flohen ein Drittel der Übriggebliebenen und noch 5. Dann kam dieser dicke König und haute mit einem Streich zwei Drittel der noch Verbliebenen und noch 3 windelweich. Daraufhin flohen von den Verbleibenden noch mal die Hälfte und dann mussten wir 5 uns noch mal so richtig verhauen lassen!“

Wie viele Schildkröten waren also anfangs zum Schloss unterwegs gewesen?

Klasse	1. Probleme mathematisch lösen mit Marinda	Blatt: 1.7	Datum:

Die Nachrichten von den mehrmaligen Niederlagen der Nunja-Schildkröten verbreiten sich schnell in allen Ländern der Region. Der König der Bären und seine Freunde haben nun für längere Zeit ihre Ruhe. Sie feiern ausdauernd mit viel Gesang, Milch, Honig, gebratenen Tauben und Cheeseburger TS. Nur Marinda ist noch nachdenklich: „Ohne fremde Hilfe seid ihr sehr verwundbar!“

Doch der König der Bären entgegnet ihr: „Ach, Marinda, du und die Abenteuer haben uns etwas ganz Entscheidendes gelehrt: Ganz wichtig in allen Auseinandersetzungen ist die Fähigkeit, nachzudenken und Probleme lösen zu können. Das werden wir in Zukunft noch stärker beherzigen.“ Marinda erwidert lächelnd: „Dann kann ich ja ganz beruhigt sein.“

Aufgabe 6: Überlege und beschreibe in Stichworten!

Welche Hilfsmittel und Strategien waren nützlich, um die Probleme zu lösen, vor denen Marinda mit ihren Freunden stand?

Klasse	2. Lösungsvorschläge	Blatt: 2.1	Datum:

Aufgabe 1

16 Reihen zu 13 Schildkröten ergeben 208 Schildkröten. Es stehen vorne und hinten jeweils 13 in einer Reihe und an den beiden Seiten dann noch je 14, weil die Schildkröten an den Ecken ja nicht doppelt gezählt werden müssen. Summe: 54 Schildkröten benötigen einen Kampfpartner.
Strategie: Vorwärtsarbeiten, Hilfsmittel: Informative Figur – Rechteck

Aufgabe 2

Insgesamt kann der Besen 418 kg tragen. Der König der Bären dürfte dann max. 210 kg wiegen.
Strategie: Vorwärts- und Rückwärtsschließen in Kombination, Hilfsmittel: Additionsmauer als eine Möglichkeit zur Veranschaulichung der Teilschritte

Aufgabe 3

a) Gewinnstrategie: Marinda muss die von der Schildkröte jeweils gezogene Tellerzahl bis 6 ergänzen. 36 ist durch 6 teilbar, also kann Marinda bei Einhaltung dieser Strategie immer gewinnen.
b) Wenn es nun 35 Teller wären, gäbe es z. B. folgende Möglichkeiten, die Regeln neu zu bestimmen: Entweder entnimmt man eine Zahl Teller zwischen 1 und 4, man würde damit zu allen Vielfachen der Zahl 5 (also auch 35) ergänzen können, oder man entnimmt eine Zahl zwischen 1 und 6, womit zu allen Vielfachen der Zahl 7 ergänzt werden könnte. In beiden Fällen müssten aber auf alle Fälle die Schildkröten beginnen. Vergisst man diese Klausel, hat man das Spiel sicher verloren.
c) Im Falle der Zahl 37 müsste Marinda die Regeln so ändern, dass sie beginnt und die zu entnehmende Tellerzahl auf 1 bis 5 festlegt. Würde sie dann beginnen, indem sie einen Teller wegnimmt, wären schließlich wieder die Bedingungen der Teilaufgabe a) gegeben.

Strategie: Rückwärtsarbeiten und Invarianzprinzip, Tabelle als Darstellungsmöglichkeit der verschiedenen Fälle

Aufgabe 4

1056 Melonen
Strategie: Zerlegungs- bzw. Ergänzungsprinzip

Aufgabe 5

Es waren 138 Schildkröten zum Schloss unterwegs.
Strategie: Visualisierung der Anteile anhand eines Streifens oder einer Strecke, Rückwärtsarbeiten

Aufgabe 6

—

C A l i M E R O

Computer-Algebra im Mathematikunterricht
Entdecken, Rechnen, Organisieren

Quadratische Zusammenhänge

Arbeitsmaterialien für Schülerinnen und Schüler

Klasse	1. Einführung quadratischer Zusammenhänge	Blatt: 1.1	Datum:

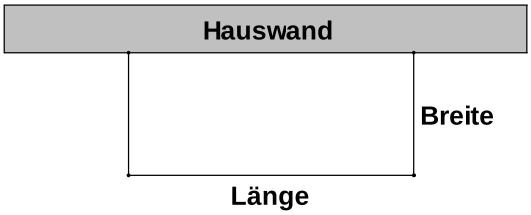
Aufgabe 1[1]

Tom möchte für sein Kaninchen im Garten ein Gehege mit rechtwinkliger Grundfläche an eine Hauswand bauen. Im Keller hat er eine Rolle mit 21 m Maschendraht gefunden.

a) Die Tabelle enthält verschiedene mögliche Breiten und Längen und daraus resultierende Rechtecksflächen. Ergänzt.

b) Den Flächeninhalt des Kaninchenstalls kann man allgemein aus der Breite x ermitteln.
Bestimmt den Term für die Länge und dann den Funktionsterm A(x) für den Flächeninhalt in Abhängigkeit von der Breite x.

c) Zeichnet den Graphen der Funktion A und bestimmt die Breite und Länge, für die sich der größtmögliche Flächeninhalt ergibt.



Breite in m	Länge In m	Fläche in m²
1	19	19
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Aufgabe 2[1]

Im vergangenen Jahr kosteten die Eintrittskarten des Riemann-Gymnasiums 5 €. Es kamen 300 Besucher. In diesem Jahr möchten die Veranstalter einen höheren Gewinn erzielen und beabsichtigen die Eintrittspreise zu ändern. Man vermutet, dass bei einer Erhöhung des Preises einer Karte um einen Euro ungefähr 30 Besucher weniger kommen, bei einer Preissenkung um einen Euro kämen 30 Besucher mehr.

a) Die Tabelle enthält verschiedene mögliche Preisänderungen und die sich daraus ergebenden Eintrittspreise, Besucherzahlen und Einnahmen.
Ergänzt die Tabelle für Preisänderungen von -2 € bis 4 €.

b) Ergänzt in der letzten Zeile den Funktionsterm E(x) zur Berechnung der Einnahmen in Abhängigkeit von der Preisänderung x.

c) Zeichnet den Graphen der Funktion E und bestimme die Preisänderung x, bei der man die größten Einnahmen erhält.

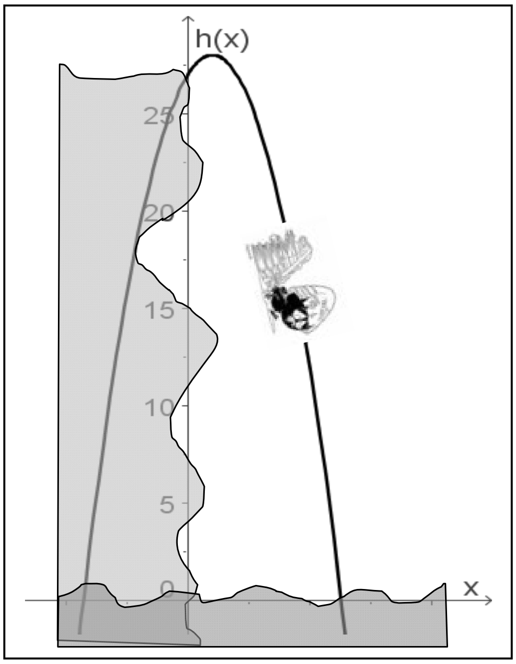
Preisänderung in €	Eintrittspreis in €	Besucherzahl	Einnahmen in €
-2			
-1			
0	5	300	1500
1	6	270	1620
2	7	240	
3	8		
4			
x	5 + x	300 – 30·x	

[1] NW 8, 978-3-507-85504-5, Schroedel

Klasse	1. Einführung quadratischer Zusammenhänge	Blatt: 1.2	Datum:

Aufgabe 3[1]

In Acapulco in Mexiko springen Wagemutige mit einem Kopfsprung von einem 27 m hohen Felsen. Dabei müssen sie darauf achten, dass sie genau eine ankommende Welle treffen, denn sonst ist das Wasser nicht tief genug. Die Flugbahn eines Springers wird durch die Funktionsgleichung $h(x) = -x^2 + 2x + 27$ modelliert. Dabei bezeichnet h die Höhe über dem Wasser und x die horizontale Entfernung vom Absprungpunkt, jeweils in Metern.



a) Zeichnet den Graphen von h mit dem TC.
b) Bestimmt die Entfernung vom Fuß des Felsens, in der der Springer auf dem Wasser aufkommt.
c) Wie hoch ist der Springer zunächst gesprungen?

Aufgabe 4[2]

Für den Benzinverbrauch B (in l pro 100 km) in Abhängigkeit von der im 5. Gang gefahrenen Geschwindigkeit v (in km/h) gilt: $B(v) = 0{,}001v^2 - 0{,}1v + 6{,}3$.

a) Zeichnet den Graphen von B mit dem TC.
b) Bei welcher Geschwindigkeit beträgt der Benzinverbrauch 7 l pro 100 km?
c) Bei welcher Geschwindigkeit ist der Benzinverbrauch minimal?

[1] NW 8, 978-3-507-85504-5, Schroedel
[2] EdM 8, 978-3-507-87208-0, Schroedel

Klasse	2.1. Graphenlaboratorium	Blatt: 2.1.1	Datum:

Graphenlaboratorium 1

Die „Mutter aller Parabeln" ist die Normalparabel $y(x) = x^2$.
Sie ergibt sich aus der allgemeinen Form $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, wenn man a = 1, b = 0 und c = 0 setzt.
Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich der Graph der Funktion im Vergleich zur Normalparabel ändert, wenn man die Parameter variiert.
Denkt bei der Bearbeitung der Aufgaben daran, dass ihr Eure Ergebnisse mithilfe des TC den anderen Schülern vorführen könnt!

a) Wir beschäftigen uns zunächst nur mit dem Parameter c. Dazu vergleichen wir die Graphen von Funktionen mit unterschiedlichen Werten des Parameters c und konstanten Parametern a und b. Gebt folgende Funktionsgleichungen in den y-Editor ein:

$y1(x) = x^2 \quad y2(x) = x^2 - 2 \quad y3(x) = x^2 - 1 \quad y4(x) = x^2 + 1 \quad y5(x) = x^2 + 2$

Experimentiert mit weiteren Werten von c. Beschreibt den Einfluss des Parameters c.

b) Führt auf ähnliche Weise eine Untersuchung von $f(x) = a \cdot x^2$ für den Parameter a durch.

c) Versucht, einen entsprechenden Zusammenhang für den Parameter b zu finden.

Graphenlaboratorium 2

Die „Mutter aller Parabeln" ist die Normalparabel $y(x) = x^2$.
Sie ergibt sich aus der allgemeinen Form $f(x) = a \cdot (x - m) \cdot (x - n)$, wenn man a = 1, m = 0 und n = 0 setzt.
Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich der Graph der Funktion im Vergleich zur Normalparabel ändert, wenn man die Parameter variiert.
Denkt bei der Bearbeitung der Aufgaben daran, dass ihr Eure Ergebnisse mithilfe des TC den anderen Schülern vorführen könnt!

a) Wir beschäftigen uns zunächst nur mit dem Parameter a. Dazu vergleichen wir die Graphen von Funktionen mit unterschiedlichen Werten des Parameters a und konstanten Parametern m und n. Gebt folgende Funktionsgleichungen in den y-Editor ein:

$y1(x) = x^2 \quad y2(x) = 2x^2 \quad y3(x) = -2x^2 \quad y4(x) = 3x^2 \quad y5(x) = -3x^2$

Experimentiert mit weiteren Werten von a. Beschreibt den Einfluss des Parameters a.

b) Führt auf ähnliche Weise eine Untersuchung von $f(x) = (x - m) \cdot (x - n)$ für die Parameter m und n durch.

c) Formuliert eine Aussage über die Lage des Scheitelpunktes in Bezug auf m und n.

Klasse	2.1. Graphenlaboratorium	Blatt: 2.1.2	Datum:

Graphenlaboratorium 3

Vorbemerkungen

Ihr habt zwei Darstellungen für Parabeln kennen gelernt,
die allgemeine Form, z. B. $y(x) = 2x^2 - 4x + 1$ und die faktorisierte Form, z. B. $y(x) = 4 \cdot (x-5) \cdot (x+2)$.
Jede Darstellung hat ihre Vorteile. Hier werdet ihr noch eine weitere Darstellung kennen lernen:

$$\boxed{y(x) = a \cdot (x-d)^2 + e}.$$

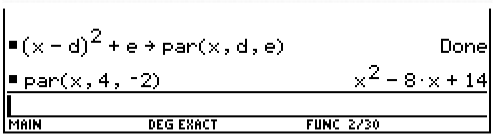
Hier geht es um die folgenden Fragen:

- Welche Auswirkungen haben die Parameter a, d und e auf die Form und Lage der Parabel im Vergleich zur Normalparabel?
- Was kann man aus dieser Gleichung direkt ablesen?

Um diese Fragen zu beantworten, wird zuerst $a = 1$ betrachtet. Es geht also um die Funktionsgleichung

$$\boxed{y(x) = (x-d)^2 + e}.$$

Zur Untersuchung sollt ihr im Rechner das Makro "par(x,d,e)" für die Funktionsgleichung erzeugen, um die Auswirkungen der beiden Parameter d und e komfortabel zu untersuchen.



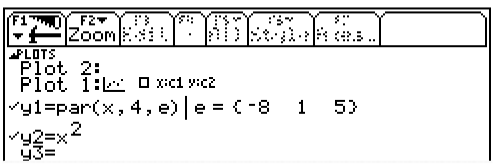
Vorsicht, der TC multipliziert sofort aus, ihr könnt also nach der Eingabe von par(x,4,-2) nicht mehr erkennen, dass es sich um die Form $y(x) = (x-4)^2 - 2$ handelt ($d = 4; e = -2$).

Folgendes Beispiel zeigt euch zur Erinnerung, wie man mit dem TC mit einer Eingabe Funktionen mit verschiedenen Parameterwerten erzeugen kann.

$y_1(x) = par(x,1,e) \mid e = \{-8,1,5\}$ → $y_1(x) = (x-1)^2 - 8$, $y_1(x) = (x-1)^2 + 1$, $y_1(x) = (x-1)^2 + 5$

Aufgabe 1

Untersucht die Auswirkungen des Parameters e auf die Form und Lage der Parabel im Vergleich zur Lage der Normalparabel und begründet eure Beobachtungen.



Aufgabe 2

Untersucht die Auswirkungen des Parameters d auf die Form und Lage der Parabel im Vergleich zur Lage der Normalparabel und begründet eure Beobachtungen.

Aufgabe 3

Bestimmt die Parameter d und e in $par(x,d,e)$, so dass für den Scheitelpunkt S gilt:

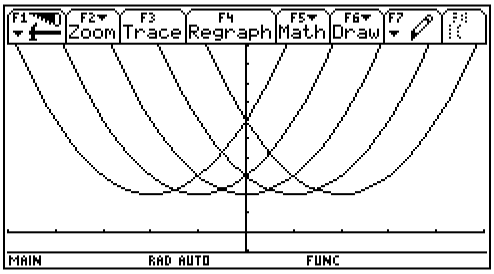
a) $S(-3 \mid 5)$.
b) $S(6 \mid -3)$.
c) Beide Koordinaten des Scheitelpunktes sind gleich.
d) Die x-Koordinate des Scheitelpunktes ist doppelt so groß wie die y-Koordinate.

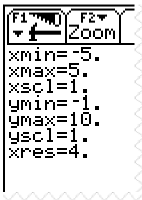
Klasse	2.1. Graphenlaboratorium	Blatt: 2.1.3	Datum:

Aufgabe 4

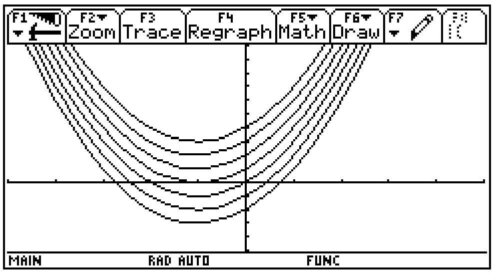
Erzeugt mit par(x,d,e) die beiden folgenden Grafiken und begründet eure Wahl von d und e.

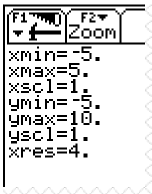
a)





b)





Aufgabe 5

Erzeugt ein Makro zu $y = a \cdot (x - d)^2 + e$ und untersucht die Auswirkungen des Parameters a. Für die beiden Parameter d und e wählt euch zwei Werte aus. Begründet die Auswirkungen des Parameters a.

Aufgabe 6

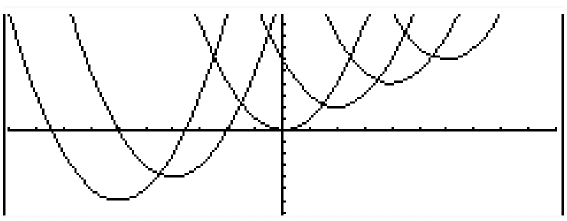
Beantwortet nun die in der Einleitung gestellten Fragen:

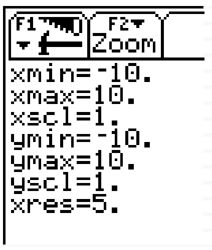
– Welche Auswirkungen haben die Parameter a, d und e auf die Form und Lage der Parabel im Vergleich zur Normalparabel?
– Was kann man aus dieser Gleichung direkt ablesen?

Zusatzaufgaben

Aufgabe 7

Begründet: Die Scheitelpunkte aller Parabeln mit $y(x) = (x - d)^2 + d$ liegen auf der Ursprungsgeraden.





Tipps:
– Benutzt par(x,d,d).
– Wählt für d verschiedene Werte.
– Ihr könnt auch die Ursprungsgerade einzeichnen.

Klasse	2.1. Graphenlaboratorium	Blatt: 2.1.4	Datum:

Aufgabe 8

Erzeugt mit $\text{par}(x,d,e)$ Parabeln, deren Scheitelpunkte auf der

- Geraden mit $y = 2x$ liegen,
- Geraden mit der Gleichung $y = -2x + 1$,
- Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ liegen.

Begründet jeweils euer Vorgehen.

Aufgabe 9

Erzeugt eigene „schöne“ Bilder und notiert die Werte für d und e.

Aufgabe 10

Untersucht die zugehörigen Graphen zu $\text{par}(x,2,1)$; $\text{par}(-x,2,1)$ und $\text{par}(-x,-2,1)$.
Nennt Gemeinsamkeiten und Unterschiede und begründet deine Erläuterungen.

Klasse	2.2. Tabellarische Zusammenfassung	Blatt: 2.2	Datum:

Drei Darstellungsformen einer quadratischen Funktion

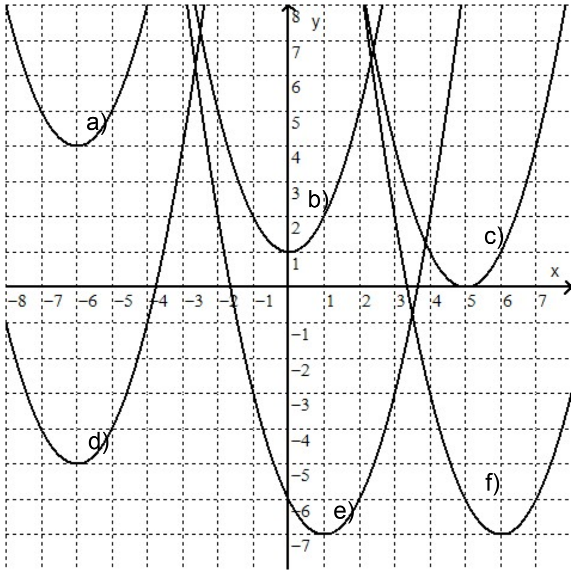
Hier sollst du dir zunächst mithilfe von Beispielen den Unterschied der drei Darstellungsformen verdeutlichen. Anschließend sollen die Vor- und Nachteile der einzelnen Formen z. B. im Hinblick darauf, welche Informationen direkt ablesbar sind, notiert werden.
Methode: Überlege zunächst 10 Minuten selbst („Ich“) und diskutiere dann 5 Minuten mit einem Partner („Du“). Dann wird in der Klasse besprochen („Wir“).

	Allgemeine Form	**Faktorisierte Form**	**Scheitelpunktform**
Beispiele			
Vorteile			
Nachteile			

Klasse	2.3. Vielfältiges Problemlösen und Üben	Blatt: 2.3.1	Datum:

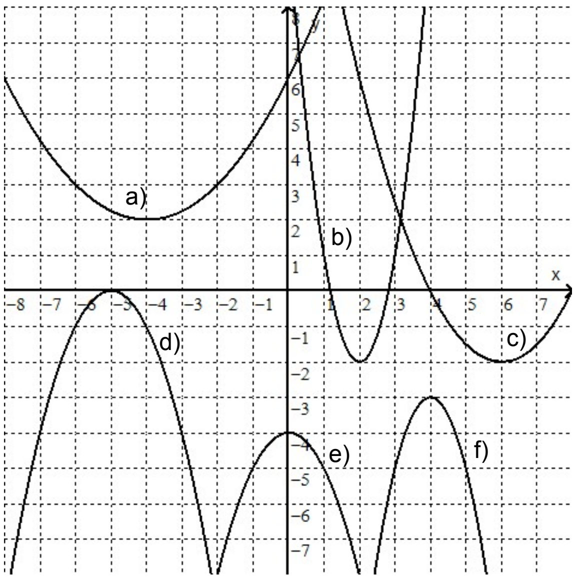
Aufgabe 1

Bestimme jeweils die Scheitelpunktform der Parabel.



Aufgabe 2

Bestimme jeweils die Scheitelpunktform der Parabel.



Aufgabe 3

Notiere die Koordinaten des Scheitelpunkts in der Form S(3 | 2). Schreibe auch auf, ob die Parabel im Vergleich zur Normalparabel "zusammen- oder auseinandergebogen" ist.

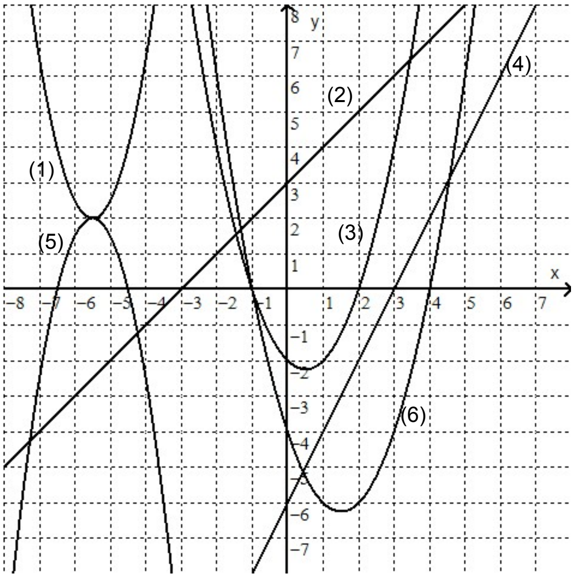
a) $f(x) = (x - 2)^2 + 4$
b) $f(x) = 2 \cdot (x + 3{,}5)^2 - 2$
c) $f(x) = (x + 1)^2$
d) $f(x) = 0{,}5 \cdot (x + 5)^2 + 2{,}5$
e) $f(x) = (x - 4)^2 - 1$
f) $f(x) = -0{,}5 \cdot (x + 1)^2 - 4$

Klasse	2.3. Vielfältiges Problemlösen und Üben	Blatt: 2.3.2	Datum:

Aufgabe 4

Ordne soweit möglich die Graphen einem Funktionsterm zu.

a) $f(x) = (x - 2) \cdot (x + 1)$
b) $f(x) = (x + 1) + 2$
c) $f(x) = 2{\cdot}(x + 5{,}5)^2 + 2$
d) $f(x) = 2{\cdot}(x - 3)$
e) $f(x) = (x - 4) \cdot (x + 1)$
f) $f(x) = -2{\cdot}(x + 3{,}5)^2 + 2$



Aufgabe 5

Skizziere die Parabeln zu den Funktionsgleichungen.

a) $f(x) = -(x - 2)^2 + 1$
b) $f(x) = 2{\cdot}(x - 2)^2 + 1$
c) $f(x) = (x + 4)^2 + 1$
d) $f(x) = 0{,}5{\cdot}(x + 4)^2 + 1$

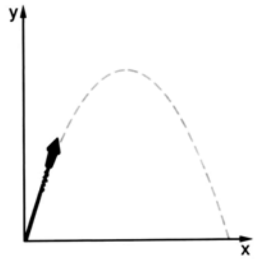
Aufgabe 6

Gib drei verschiedene Funktionsgleichungen in Scheitelpunktform an, so dass der Graph den Scheitelpunkt S hat.

a) S(4|3)
b) S(–1|7)
c) S(0|–2)
d) S(3|0)

Klasse	2.3. Vielfältiges Problemlösen und Üben	Blatt: 2.3.3	Datum:

Aufgabe 7[1]



Den Flug einer Feuerwerksrakete kann man mit der quadratischen Funktion h(x)= 15 x- 0,5 x² modellieren. Dabei ist x die Entfernung vom Abschussort in Meter und h(x) die Höhe der Rakete in Meter.

a) In welcher Entfernung vom Abschussort landet die Rakete?
b) In welcher Entfernung erreicht sie ihren höchsten Punkt?

Aufgabe 8

a) Wende den Befehl "factor" eventuell mit "approx" auf folgende Terme an:

i) $x^2 - 5x + 6$ ii) $x^2 - 6x + 9$ iii) $x^2 - 5x + 10$
iv) $x^2 - 16$ v) $x^2 + 20$ vi) $x^2 - 5x$

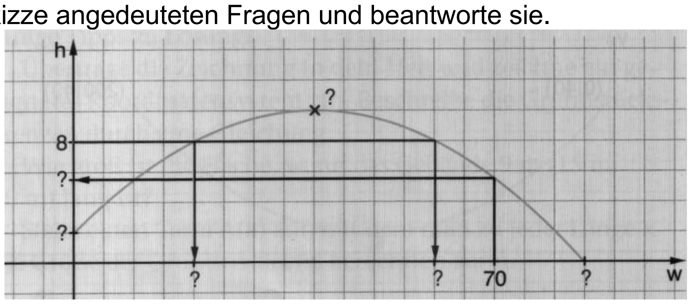
b) Erkläre, so weit du kannst die Ergebnisse. Du kannst auch einen Graphen zur Erklärung benutzen.
c) Formuliere mögliche Fragen, die noch geklärt werden sollten.

Aufgabe 9

Der Flug eines Speeres beim Speerwurf wird durch die folgende quadratische Funktion modelliert:

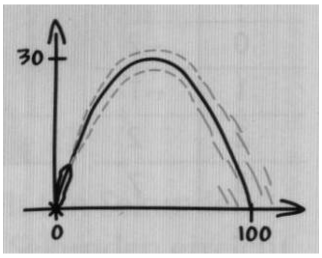
$$h(w) = -\frac{1}{200}(w - 40)^2 + 10$$

Dabei ist h die Flughöhe und w die Weite vom Abwurfpunkt in Metern.
Formuliere alle in der Skizze angedeuteten Fragen und beantworte sie.



Aufgabe 10[1]

Ein Wasserstrahl aus einer Wasserkanone spritzt 100 m weit und erreicht eine Höhe von 30 m.
Mit welcher Funktion kann man den Wasserstrahl modellieren?



Aufgabe 11[1]

Wie findest du den Scheitelpunkt und die Nullstellen der Parabel?
Dokumentiere dein Vorgehen.

a) $f(x) = x^2 + 4x - 2$ b) $f(x) = x^2 - 4$ c) $f(x) = x^2 - 5x - 6$
d) $f(x) = (x - 2)(x - 6)$ e) $f(x) = -0{,}2x (x - 10)$ f) $f(x) = x^2$

[1] NW 8, 978-3-507-85504-5, Schroedel

Klasse	2.3. Vielfältiges Problemlösen und Üben	Blatt: 2.3.4	Datum:

Aufgabe 12[1]

Ermittle aus den vorgegebenen Funktionsgleichungen folgende Informationen:
Scheitelpunkt, Nullstellen, nach oben/unten geöffnet, gestreckt/gestaucht, Schnittpunkt mit der y-Achse.
Dokumentiere dein Vorgehen.

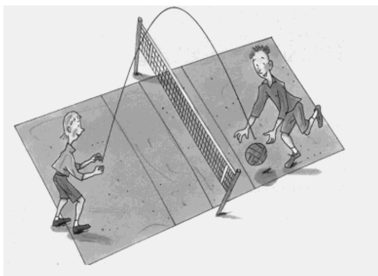
a) $f(x) = (x - 2)(x + 3)$ b) $f(x) = (x + 2)^2 - 4$ c) $f(x) = x^2 + 3$
d) $f(x) = -x^2 + 2x + 5$ e) $f(x) = 3x\,(x - 1)$ f) $f(x) = -0{,}5\,x^2$

Aufgabe 13

Ein Wasserstrahl beschreibt eine Parabelbahn. Die Bahn wird durch die Gleichung $h(x) = -0{,}02 \cdot x^2 + 0{,}4 \cdot x + 8$ beschrieben. x ist der waagerechte Abstand zur Austrittsdüse in dm, h(x) ist die Höhe über dem Boden in dm. Beantworte die folgenden Fragen mithilfe des Graphen:

a) In welcher Höhe befindet sich der Wasserstrahl in einem waagerechten Abstand von 2 dm (3 dm) von der Austrittsdüse?
b) In welcher Höhe befindet sich die Austrittsöffnung? Bis zu welcher Höhe steigt der Strahl maximal?
c) Wie weit reicht der Wasserstrahl?

Aufgabe 14



Das Volleyballfeld hat eine Größe von 2 x 9 m x 9 m. Das Netz ist 2,26 m hoch. Die Flugbahn einer Ballangabe, von der Aufschlaglinie aus gesehen, kann durch die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -0{,}1\,x^2 + x + 2{,}4$ beschrieben werden.
a) Bestimme die maximale Flughöhe des Balls.
b) Kommt der Ball noch im gegnerischen Spielfeld auf dem Boden auf oder wird er ins Aus gehen?
c) Kommt der Ball über das Netz?

Aufgabe 15
Gib die folgenden quadratischen Funktionen jeweils in Scheitelpunktform, faktorisierter Form und allgemeiner Form an. Dokumentiere dein Vorgehen.

a) $f(x) = 2(x - 5)(x - 1)$ b) $f(x) = 3x^2 - 12x + 10$ c) $f(x) = -2(x - 1)^2 + 8$

Aufgabe 16

Das Bild zeigt eine ICE-Brücke
Die untere Spannweite des Bogens ist 100 m.
Der Streckfaktor der Parabel ist 0,012.
Bestimme die Höhe des Bogens.

Aufgabe 17

In der Hausaufgabe soll Paul den Scheitelpunkt der Parabel $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$ bestimmen. Zu Hause zeichnet er dann den Graphen der Parabel und liest den Scheitelpunkt ab.

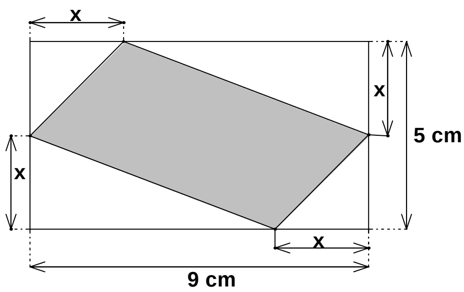
a) Finde durch die beschriebene Vorgehensweise die Scheitelpunktform der Parabel heraus.
b) Wie kann Paul überprüfen, ob er richtig gearbeitet hat?

[1] NW 8, 978-3-507-85504-5, Schroedel

Klasse	2.3. Vielfältiges Problemlösen und Üben	Blatt: 2.3.5	Datum:

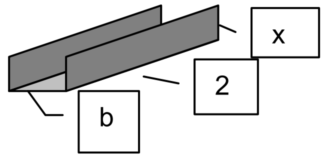
Aufgabe 18[1]

Einem Rechteck mit den Seitenlängen 9 cm und 5 cm wird ein Parallelogramm P einbeschrieben, indem man von jedem Eckpunkt des Rechtecks aus im Uhrzeigersinn eine gleich lange Strecke abträgt.
Hinweis: Der Flächeninhalt des Parallelogramms erhält man, indem man vom Flächeninhalt des Rechtecks den Flächeninhalt der vier Dreiecke subtrahierst.



Aufgabe 19:

Jan möchte aus einem rechteckigen Stück Blech eine Rinne biegen. Das Blech hat die Maße 40 cm x 200 cm. Je nach Höhe der Seitenteile erhält er eine andere Querschnittsfläche.



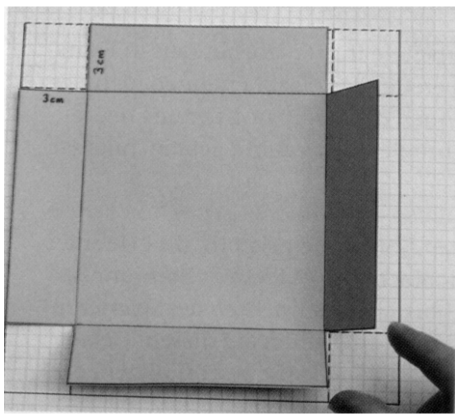
a) Ergänze die Tabelle.

x in cm	b in cm	Querschnittsfläche A in cm²
2	40 – 2 · 2	72
4	40 – 4 · 2	
6	40 – 8 · 2	
…		
8.4		
…		
x		

b) Die Querschnittsfläche der Rinne lässt sich als Funktion A(x) angeben. Bestimme den Funktionsterm.
c) Welche Maße muss Jan der Rinne geben, damit möglichst viel Wasser durchfließen kann?

Aufgabe 20[2]

Aus einem quadratischen Blatt Pappe soll ein Karton (ohne Deckel) hergestellt werden, indem man an jeder Ecke ein Quadrat der Kantenlänge 3 cm abschneidet und die Ränder des verbleibenden Papierstücks hochfaltet. Das Volumen des Kartons soll 75 cm³ betragen.
Bestimme die Größe des ursprünglichen Papierblattes.

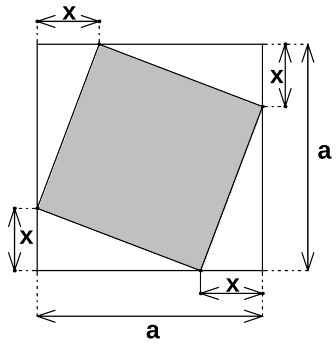


[1] EDM 9, 3-507-87123-8, Schroedel
[2] NW 9, 3-507-85459-7, Schroedel

Klasse	2.3. Vielfältiges Problemlösen und Üben	Blatt: 2.3.6	Datum:

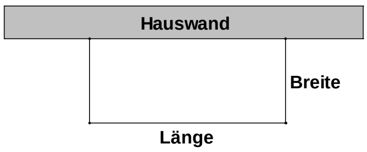
Aufgabe 21[1]

Einem Quadrat der Seitenlänge a wird ein neues Quadrat einbeschrieben, indem man von jedem Eckpunkt des äußeren Quadrates aus im Uhrzeigersinn eine Strecke gleicher Länge abträgt.
Bestimme das einbeschriebene Quadrat mit dem minimalen Flächeninhalt.



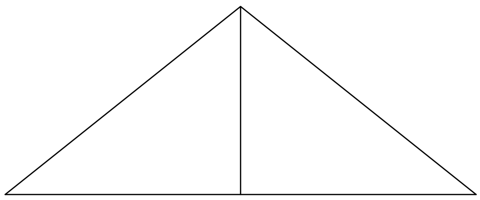
Aufgabe 22

Frauke, eine Freundin von Tom, möchte auch im Garten ein Kaninchengehege mit rechtwinkliger Grundfläche bauen, das 6 m² groß sein soll. Dabei möchte sie möglichst wenig Zaun einkaufen müssen. Finde eine optimale Lösung, wenn das Gehege an einer Hauswand gebaut werden soll.



Aufgabe 23

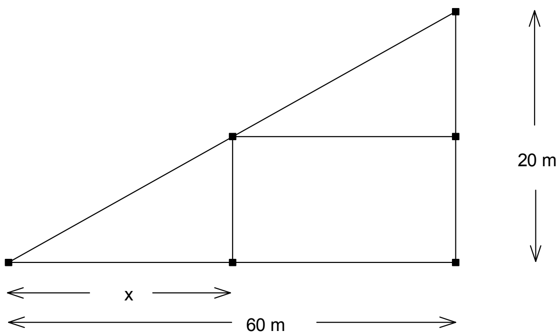
Im Dachgeschoss eines Hauses soll ein Malstudio eingerichtet werden. Das Studio soll möglichst viel Tageslicht durch eine rechteckige Glaswand im Hausgiebel erhalten. Welche Länge und Breite muss der Architekt dieser Glaswand geben, wenn das Haus 10 m breit und der Giebel 4 m hoch ist?



Aufgabe 24[2]

Ein Unternehmen hat ein dreieckiges Grundstück in der Innenstadt erworben und möchte es bebauen.
Den Zuschlag erhielt ein Bauentwurf, der für das neue Gebäude einen rechteckigen Grundriss vorsieht.
Ergänze die Tabelle:

x in m	Breite in m	Länge in m	Fläche in m²
30	30	10	300
x	60 – x		

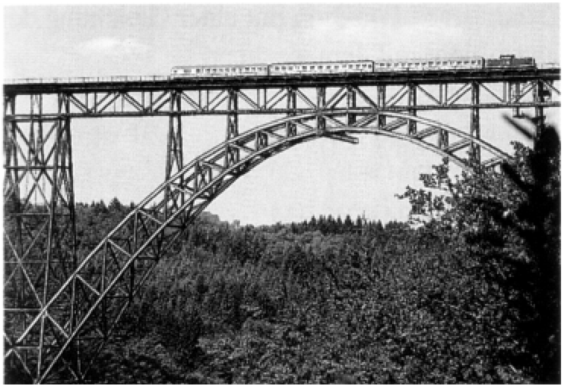


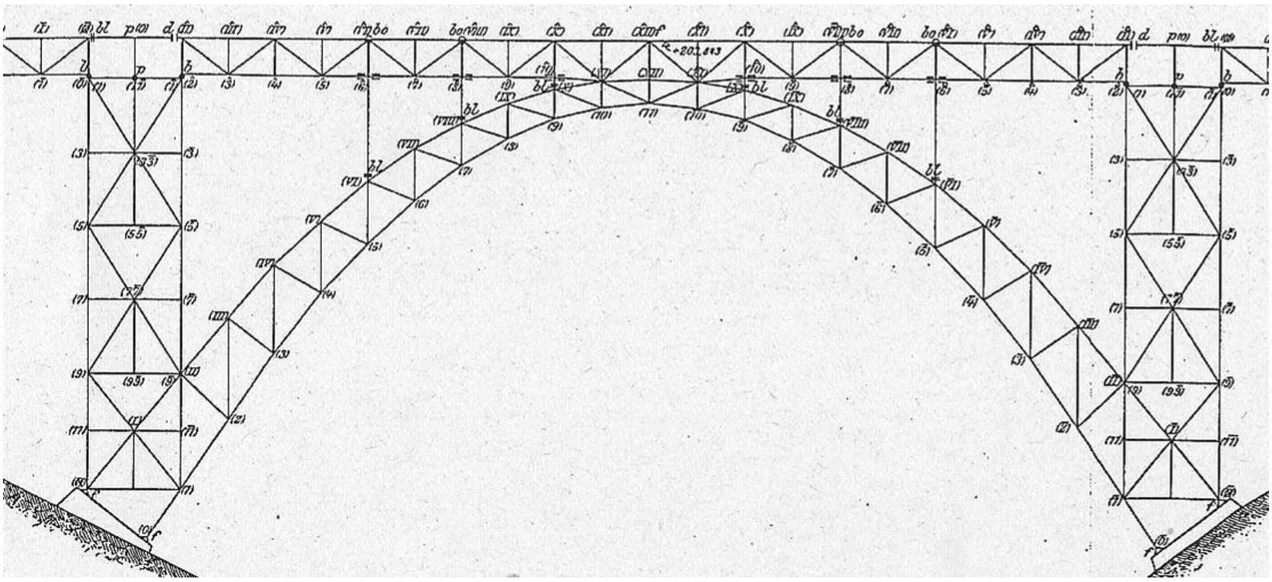
[1] EdM 9, 3-507-8123-8, Schroedel
[2] NW 8, 3-507-85504-5, Schroedel

Klasse	3. Modellbildung und Regression	Blatt: 3.1	Datum:

Aufgabe 1[1]

Die Müngstener Brücke über die Wupper ist eine der beeindruckendsten Eisenbahnbrücken. Zum 100-jährigen Jubiläum erschien sogar eine Briefmarke.
Der untere Brückenbogen hat eine Spannweite von w = 160 m und eine Höhe h = 69 m.
Untersuche, ob sich der untere Brückenbogen durch eine Parabel beschreiben lässt.





Aufgabe 2[2]

Bestimme die Gleichung der Parabel. Gegeben sind:

a) Scheitelpunkt S(- 2 | 3), Parabelpunkt P(1 | 5).
b) Nullstellen x_1 = - 4, x_2 = 5, kleinster Funktionswert - 10.

[1] EdM 9, 3-507-87123-8, Schroedel
[2] NW 8, 978-3-507-85505-5, Schoedel

Klasse	3. Modellbildung und Regression	Blatt: 3.2	Datum:

Aufgabe 3[1]

a) Zeichne zu der Tabelle ein Streudiagramm. Überzeuge dich davon, dass die Punkte in etwa auf einer Parabel liegen.
b) Berechne ein quadratisches Modell: Wähle dazu geschickt drei Punkte des Streudiagramms. Berechne mit diesen drei Punkten die Gleichung der Parabel, die durch diese Punkte geht.
c) Mit dem TC kann man eine Parabel besonders gut an die Punkte des Streudiagramms anpassen. Vergleiche mit der per Hand berechneten Parabel.

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	1	1,5	2	2,5	3	4	4,5	5	5,5	6	7
y	21	9,75	0	-8,25	-15	-24	-26,25	-27	-26,25	-24	-15	-8,25	0	9,75	21	48

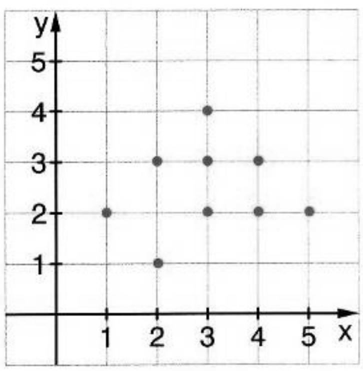
Information über Streudiagramme[1]

Den Zusammenhang zwischen zwei Größen kann man mit Messungen oder Datenerhebungen untersuchen. Wenn die Wertepaare im Streudiagramm in etwa auf einer Parabel liegen, ist es sinnvoll, nach einem entsprechenden **quadratischen Modell** zu suchen.
Es gibt zwei Wege, ein quadratisches Modell zu finden:

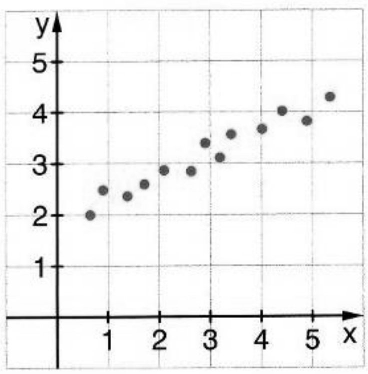
(1) Man sucht Punkte des **Streudiagramms** heraus und bestimmt eine quadratische Funktion mit $y = ax^2 + bx + c$ so, dass die Punkte auf dem Graphen liegen. Da drei Punkte a, b und c zu bestimmen sind, benötigt man drei Punkte.
(2) In der Regel liegen die Punkte im Streudiagramm nicht genau auf einer Parabel. In diesem Fall kann man mit den TC eine quadratische Funktion berechnen lassen. die sehr gut „passt“. Dieses Verfahren nennt man **„quadratische Regression“.**

Bei diesen Streudiagrammen kann man folgende Zusammenhänge zwischen x und y vermuten:

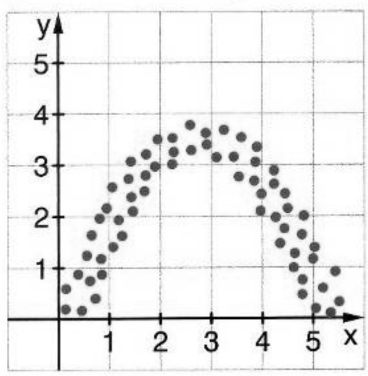
kein erkennbarer Zusammenhang



linearer Zusammenhang



quadratischer Zusammenhang



Klasse	3. Modellbildung und Regression	Blatt: 3.3	Datum:

Aufgabe 4[1]

Mithilfe von Messgeräten wurden die folgenden Daten für den Flug eines Hammers beim Hammerwerfen aufgezeichnet

Weite: x in m	0	10	20	30	40	50	60	70
Flughöhe h(x) in m	0	5,1	9,3	10,5	11	8,7	5,4	0

Übertrage die Werte aus der Tabelle in den TC und berechne ein quadratisches Modell.

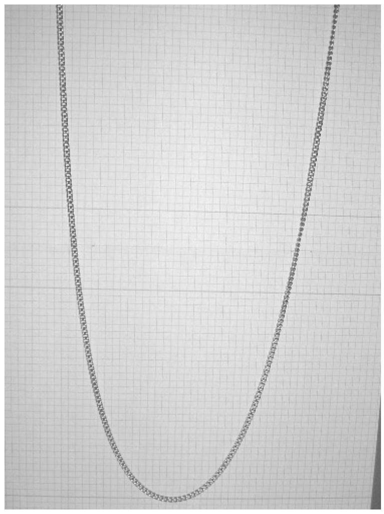
Aufgabe 5

Eine Kette ist wie in nebenstehender Abbildung aufgehängt worden.
Für folgende Tabelle ist ein Koordinatensystem zugrundegelegt worden, dessen Ursprung im tiefsten Punkt der Kette liegt.
Untersuche, ob sich der Verlauf der Kette durch eine Parabel beschreiben lässt.

x	y
- 9	61,5
- 8	45,5
- 7	29
- 6	19
- 5	12,1
- 4	7,2
- 3	4

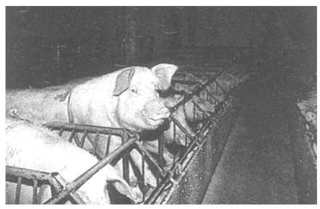
x	y
- 2	1,6
- 1	0,4
0	0
1	0,6
2	1,7
3	3,9
4	7,1

x	y
5	12,5
6	19,9
7	27
8	40,3
9	55,5



Aufgabe 6

Ein Tierarzt, der für einen großen Schweinemastbetrieb arbeitet, untersucht den Einfluss von Futterzusätzen auf die Gewichtszunahme der Tiere.
Experiment: 36 Schweine werden zufällig ausgewählt. Gruppen von vier Schweinen erhalten jeweils dieselbe Menge von Futterzusatz. Die durchschnittliche Gewichtszunahme der Schweine in jeder Gruppe wird festgestellt.



Futterzusatz in Einheiten	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Gewichtszunahme in %	10	13	22	23	21	19	17	13	10

a) Zeichne zu den Daten in der Tabelle ein Streudiagramm.
b) Ermittle mit dem TC ein quadratisches Modell.
c) Finde mit dem Modell heraus, bei welcher Menge von Futterzusatz die größte Gewichtszunahme erzielt wird.

[1] NW 8, 978-3-507-85505-5, Schroedel

Klasse	3. Modellbildung und Regression	Blatt: 3.4	Datum:

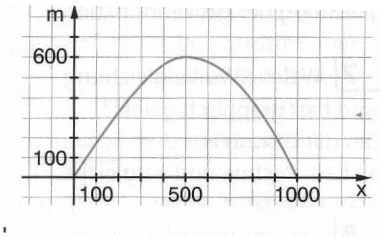
Aufgabe 7[1]

Stelle die Daten der Tabelle grafisch dar. Modelliere den Zusammenhang zwischen Benzinverbrauch und Geschwindigkeit mit einer quadratischen Funktion. Finde die Funktionsgleichung mit den TC mittels einer „quadratischen Regression“.

Geschwindigkeit v in km/h	50	70	90	110	130	150
Verbrauch b in Liter	6	6,5	7,2	8,1	9,4	11,1

Aufgabe 8[1]

Fische werden in einem Fischteich gezüchtet. Die Menge m an Fischen in Kilogramm, die man im Laufe eines Jahres entnehmen kann, hängt vom Fischbestand x in Kilogramm zu Beginn des Jahres ab.



a) Erläutere das Schaubild. Überlege unter anderem, was passiert, wenn in dem Teich immer mehr Fische sind.
b) Modelliere mit den Daten aus dem Schaubild die Funktion m.

Aufgabe 9

Anfahrt eines Zuges
An einem Bahnhof wird die Anfahrt eines Zuges beobachtet. Dazu stehen Schülerinnen und Schüler mit einer Stoppuhr jeweils zwischen zwei Waggons und starten diese, wenn der Zug anfährt. Die Stoppuhr wird gestoppt, wenn das Zugende am Schüler vorbeikommt. Gleichzeitig merkt sich der Schüler, wie viele Waggons an ihm vorbei gekommen sind.
Die Messdaten geben also den Zusammenhang zwischen dem zurückgelegten Weg und der Zeit seit Anfahrt des Zuges an.

Intercity „Westerland“ von Karlsruhe nach Westerland über Osnabrück

Zeit in s	19,5	28	34	39	44	48
Weg in m	26,4	52,8	79,2	105,6	132	158,4

Zeit in s	52	55	58,5	62	65	67
Weg in m	184,8	211,2	238,7	265,1	291,5	317,9

Bestimme eine Funktionsvorschrift, die die Daten „möglichst gut“ beschreibt.

Aufgabe 10

Zur Untersuchung des Fallverhaltens wird ein mit Wasser gefüllter Luftballon von einem Turm aus 15 m Höhe fallengelassen. Es wird die Zeit gemessen, zu der bestimmte Höhenmarken erreicht werden. Man erhält folgende Werte:

Fallstrecke in m	0	2	3	4	6	9	12
Zeit in s	0	0,64	0,8	0,95	1,22	1,6	1,98

Treffe begründete Aussagen zur Höhe des Luftballons nach 1 Sekunde und nach 3 Sekunden.

[1] NW 8, 978-3-507-85505-5, Schroedel

Klasse	3. Modellbildung und Regression	Blatt: 3.5	Datum:

Aufgabe 11

Um die Auslastung des Kraftwerks der „New Hampshire Electric Co-Op“ besser regulieren zu können, hat das Elektrizitätswerk in der Nacht vom 31. August zum 01. September 1997 den „Energieverbrauch“ aufgezeichnet.
Beginnend um 22 Uhr wurde zu jeder vollen Stunde die vom Kraftwerk bereitgestellte Energiemenge in folgender Tabelle protokolliert

Zeit in Stunden	0 (22 Uhr)	1	2	3	4	5
Energie in kWh	1707,5	1444	1205,3	1043,3	932,04	899,64

Zeit in Stunden	6	7	8	9	10	11
Energie in kWh	882,36	910,44	969,84	1059,5	1293,8	1674

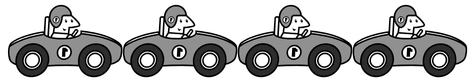
a) Stelle die Daten der Tabelle grafisch dar. Modelliere den Zusammenhang mit einer quadratischen Funktion. Finde die Funktionsgleichung mit den TC mittels einer „quadratischen Regression“.
b) Wie hoch ist der Verbrauch um 07:30 Uhr?

Aufgabe 12

Das Bild der Fontänen soll als “Desktop-Bild” für deinen TC erstellt werden.
Plane dein Vorgehen. Deine Lehrerin/dein Lehrer hat eine Folie, die auf das OHP-Display des TC gelegt werden kann.

Klasse	3. Modellbildung und Regression	Blatt: 3.6	Datum:

Aufgabe 13[1]



Der Anhalteweg eines fahrenden Autos setzt sich zusammen aus Bremsweg und Reaktionsweg. Man findet verschiedene Faustformeln zur Berechnung des Anhalteweges.
Z. B.

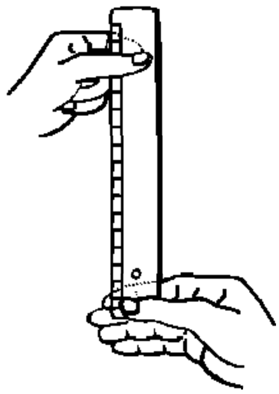
Reaktionsweg in Meter ungefähr $\frac{3}{10} \cdot v$

Bremsweg in Meter ungefähr $k \cdot v^2$

wobei man v in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ eingesetzt und bei trockener Fahrbahn $k = \frac{1}{100}$ eingesetzt wird.

a) Berechne den Anhalteweg bei 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und 100 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.
b) Bei welcher Geschwindigkeit beträgt der Anhalteweg 20 m, 40 m bzw. 60 m?
c) Auf **glatter** Fahrbahn beträgt der Anhalteweg eines Pkw 115 m. Entwirf eine Faustformel für den Anhalteweg auf glatter Fahrbahn.
d) Aus dem Protokoll einer Gerichtsverhandlung:
e) "*Ich bemerkte den Stau sehr spät, da er sich hinter einer Kurve befand. Ich schätze, dass das Fahrzeug, auf das ich dann auffuhr, ca. 150 m entfernt war, als ich die Gefahr bemerkte.Ich fuhr nicht schneller als die erlaubte Höchstgeschwindigkeit von 80 km/h und konnte dennoch nicht mehr rechtzeitig bremsen.*"
Nimm Stellung zu dieser Aussage.

Aufgabe 14



Diesen Test muss man zu zweit durchführen. Person 1 hält ein Lineal und Person 2 hält Daumen und Zeigefinger in Höhe der Null, bereit zum Zugreifen. Person 1 lässt das Lineal unvermittelt los und Person 2 muss es mit Daumen und Zeigefinger festhalten. Der Fallweg wird notiert.
Dazu standardisiert man vorher die Bedingungen:

- Die „Greiffinger“ sind jeweils ca. 1 cm vom Lineal entfernt.
- Abgelesen wird oberhalb des Daumens.

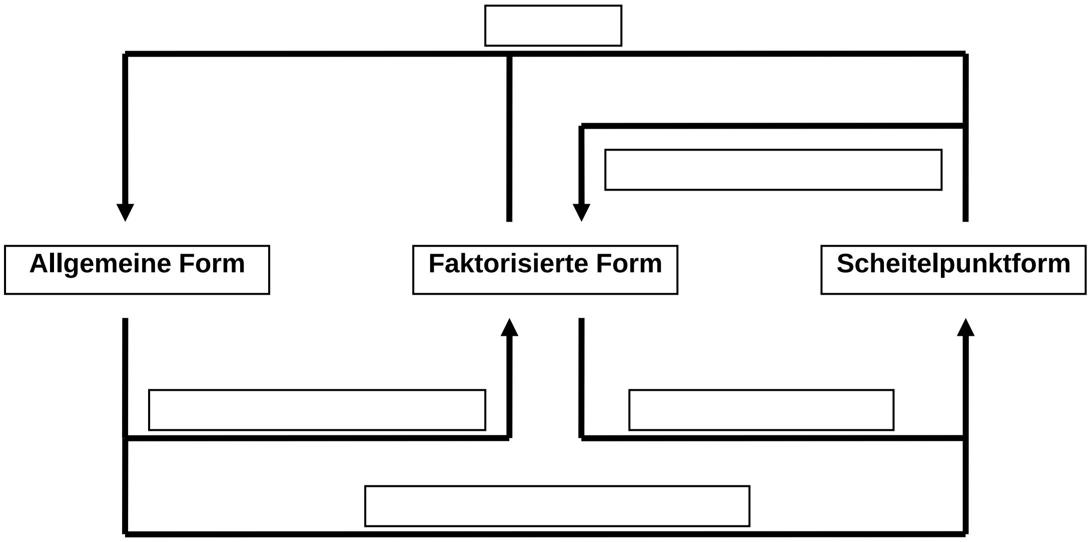
Bestimme mit diesem Versuch deine Reaktionszeit.

[1] NW 9, 3-507-85459-7, Schroedel

Klasse	4. Zusammenstellung von Grundstrategien	Blatt: 4.1	Datum:

Aufgabe 1

Im folgenden Schaubild werden die Übergänge von einer Darstellungsform in die andere veranschaulicht. Beschrifte an den Pfeilen, welche Methode dazu jeweils angewandt werden kann.



Aufgabe 2

In der folgenden Tabelle sind Lösungsstrategien für Standardprobleme zusammengestellt. Ergänze die rechte Spalte.

Was willst du?	Situation	Was tust du?
Nullstellen bestimmen	Funktion in faktorisierter Form gegeben	
	Funktion in allgemeiner oder Scheitelpunktform gegeben	
Scheitelpunkt (d | e) bestimmen	Funktion in Scheitelpunktform gegeben	
	Funktion in faktorisierter Form gegeben	
	Funktion in allgemeiner Form gegeben	
Schnittpunkt mit der y-Achse bestimmen	Funktion in allgemeiner Form gegeben	
	Funktion faktorisierter Form oder Scheitelpunktform gegeben	

Klasse	5. Geometrie der Parabel	Blatt: 5.1	Datum:

Aufgabe 1[1]

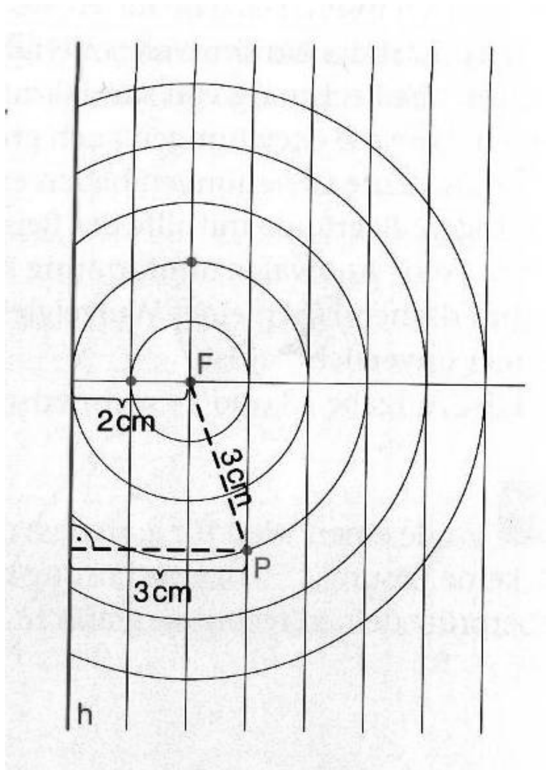
Die Schüler der 8. Klasse stellen sich auf dem Schulhof auf. Jeder sucht eine Position, von der der Abstand zur Mauer und zu dem Punkt jeweils gleich ist. Es sieht so aus, als würden sie auf einer Parabel stehen. Erfüllen die Punkte auf dem Graphen einer quadratischen Funktion auch diese Abstandsbedingung?

"Schülerparabel" auf dem Schulhof

a) Zeichne den Graphen der Funktion $y = \frac{1}{4}x^2$ in ein Koordinatensystem. (1 Einheit ≙ 1 cm)
   Zeichne auch den Graphen zu y = - 1 (Gerade g) und den Punkt F(0 | 1).
   Überprüfe nun für verschiedene Parabelpunkte, ob diese jeweils den gleichen Abstand zu F und g aufweisen.
b) Findest du auch für den Graphen der Funktion $y = \frac{1}{2}x^2$ $(y = \frac{1}{8}x^2)$ eine entsprechende Gerade g und einen Punkt F?
   Wie sieht es bei der Normalparabel aus?
c) Kannst du eine Beziehung zwischen der y-Koordinate des Punktes F und dem Faktor a in der jeweiligen Funktionsgleichung y = ax² finden?

Aufgabe 2[1]

a) Wo liegen alle Punkte, die von einem Punkt F und einer Geraden h den gleichen Abstand haben?
   Zeichne ab und konstruiere. Erkläre dein Vorgehen.
b) Verbinde die konstruierten Punkte durch eine passende Kurve. Kommt dir die Kurve bekannt vor? Finde eine Methode, mit der du deine Vermutung begründen kannst.
c) Konstruiere entsprechende Ortslinien für andere Abstände von F zu h (1 cm, 3 cm, 0,5 cm).
   Beschreibe, wie sich dieser Abstand auf die Gestalt der Kurve auswirkt.



[1] NW 8, 978-3-507-85505-5, Schroedel

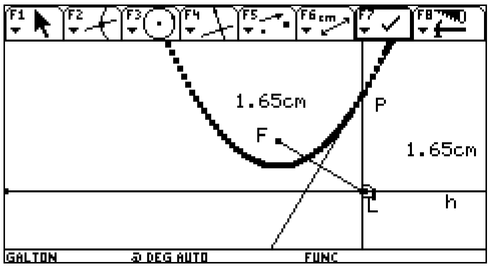
Klasse	5. Geometrie der Parabel	Blatt: 5.2	Datum:

Aufgabe 3[1]

Die Kurve ist eine Parabel. Sie ist als Ortskurve des Punktes P entstanden, wenn der Punkt L sich auf der Geraden bewegt.

Konstruktionsschritte:

1. Zeichne Gerade h und Punkt F
2. Punkt L auf h
3. Strecke $\overline{FL}$
4. Mittelsenkrechte g_1 zur Strecke $\overline{FL}$
5. Senkrechte g_2 zu h in L
6. Schnittpunkt g_1 mit g_2: Punkt P
7. Die Spur des Schittpunktes P beschreibt eine Parabel, wenn man am Punkt L zieht.

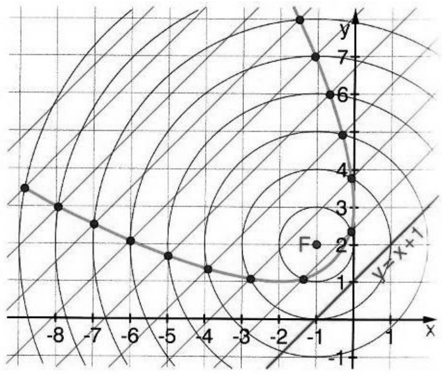


a) Führe die Konstruktion mit dem TC selbst aus.
b) Was passiert, wenn du einen anderen Abstand von F zu h wählst?
   Experimentiere mit verschiedenen Abständen.
   Behalten die Ortslinien die Form einer Parabel?
   Beschreibe möglichst genau, wie sich die Parabel in Abhängigkeit zum Abstand ändert.
c) Begründe mithilfe der Konstruktion:
   Für jeden Punkt der Ortslinie gilt: $\overline{PF} = \overline{PL}$
d) Mit der Konstruktion hast du eine geometrische Definition für die Parabel gefunden:
   "Die Parabel ist die Ortslinie aller Punkte, die … ."
   Vervollständige den Satz.

Aufgabe 4[1]

Konstruiere die Parabel mit der Leitgeraden y = x + 1 und dem Brennpunkt F (- 1 | 2).

(1) Zeichne Leitgerade und Brennpunkt.
(2) Zeichne Parallelen zur Leitgeraden in verschiedenen Abständen.
(3) Zeichne Kreise um F, deren Radien so groß sind wie die Abstände der Parallelen zur Leitgerade. Markiere Die passenden Schnittpunkte.
(4) Verbinde die Schnittpunkte durch eine möglichst glatte Kurve.



[1] NW 8, 978-3-507-85505-5, Schroedel

Klasse	5. Geometrie der Parabel	Blatt: 5.3	Datum:

Aufgabe 5[1]

Bestimme die Gleichung der Parabel mit der Leitgeraden $y = -2$ und dem Brennpunkt $F(0 \mid 2)$.
Kann man aufgrund der Lage von Leitgeraden und Brennpunkt bereits etwas über die Lage des Scheitelpunkts aussagen.

Aufgabe 6[1]

Konstruiere die Parabel mithilfe von Brennpunkt und Leitgerade. Falls möglich gib auch eine Funktionsgleichung für die Parabel an.

a) $F(1 \mid 1)$, $h: y = -x + 2$
b) $F(0 \mid 3)$, $h: y = -3$
c) $F(0 \mid 0{,}5)$, $h: y = -0{,}5$
d) $F(0 \mid 0)$, $h: y = 2$

Aufgabe 7[1]

Bestimme den Scheitelpunkt der Parabel.

a) $F(0 \mid 2)$, $h: y = 0$
b) $F(0 \mid 1)$, $h: y = 0{,}5$
c) $F(2 \mid 3)$, $h: y = 0$
d) $F(0 \mid -4)$, $h: y = 2$

[1] NW 8, 978-3-507-85505-5, Schroedel

Klasse	6. Langzeitaufgaben	Blatt: 6.1	Datum:

Aufgabe 1:

Erstelle zu den Funktionsgleichungen jeweils eine Wertetabelle und zeichne die zugehörigen Graphen in ein geeignetes Koordinatendiagramm ein.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^2 - 2$ c) $f(x) = (x+1)^2$ d) $f(x) = -x^2 + 3$ e) $f(x) = 2x^2$ f) $f(x) = -0{,}5x^2$

Aufgabe 2:

Durch die Tabelle ist eine Funktion gegeben. Zeichne den zugehörigen Graphen und bestimme die Funktionsgleichung.

a)

x	- 2	- 1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4

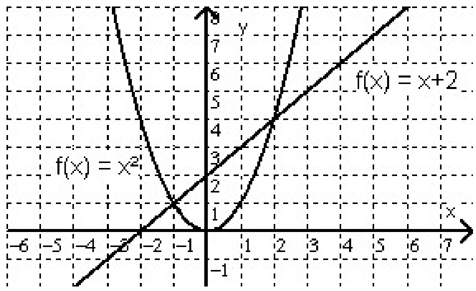
b)

x	- 2	- 1	0	1	2	3	4	5
y	12	5	0	- 3	- 4	- 3	0	5

Aufgabe 3:

a) Bestimme grafisch die Lösung der Gleichung $x^2 = x + 2$ mithilfe der nebenstehenden Zeichnung und mache die Probe.

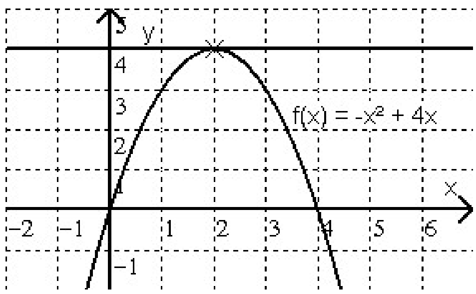
b) Bestimme grafisch die Lösung der quadratischen Gleichung. $x^2 = 2x + 3$

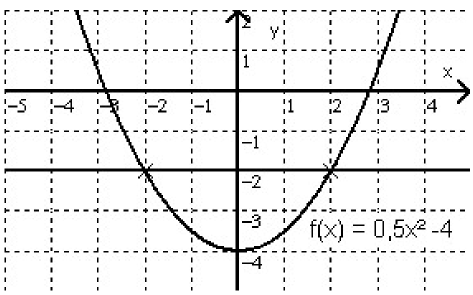


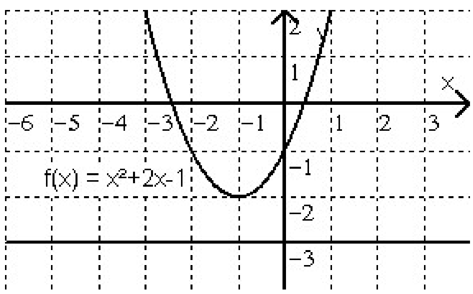
Aufgabe 4:

Welche Gleichungen werden hier grafisch gelöst? Lies die Lösungen ab. Mache die Probe, indem du die Lösungen in die von dir aufgeschriebene Gleichung einsetzt.

Zur Erinnerung:
$y = a$ liefert eine Parallele zur x-Achse.







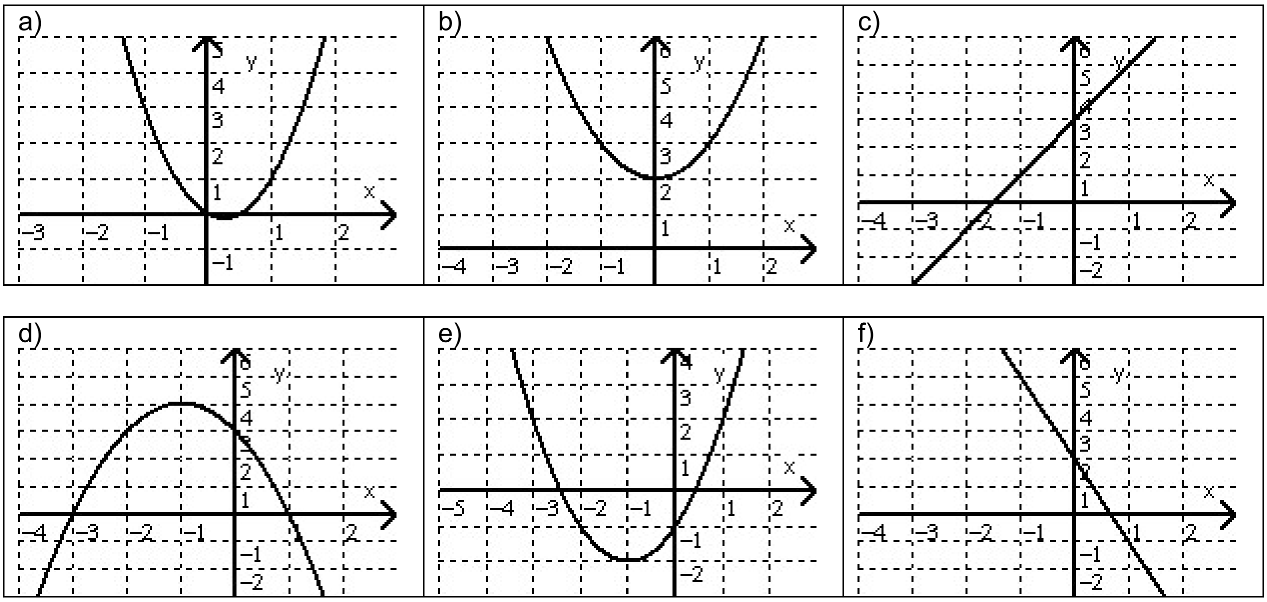
Man kann an den drei Aufgaben erkennen, wie viele Lösungen eine quadratische Gleichung haben kann. Was meinst du? Begründe deine Vermutung.

Klasse	6. Langzeitaufgaben	Blatt: 6.2	Datum:

Aufgabe 5:

Welcher Graph gehört zu welcher Funktionsgleichung?

(1) $f(x)=2x^2-x$	(2) $f(x)=2x+3$	(3) $f(x)=(x+1)^2-2$	(4) $f(x)=3x+2$
(5) $f(x)=-(x+3)\cdot(x-1)$	(6) $f(x)=x^2+2$	(7) $f(x)=0{,}5x^2-x$	(8) $f(x)=-3x+2$



Aufgabe 6:

Begründe auf zwei Arten, dass die Zahl 3 einzige Lösung der quadratischen Gleichung $(x-3)^2=0$ ist.

Erkläre: Die beiden quadratischen Gleichungen $x^2-6x+9=0$ und $x^2=6x-9$ haben die Zahl 3 als einzige Lösung.

Aufgabe 7:

a) Löse durch Wurzelziehen
(1) $x^2=64$
(2) $2x^2=32$
(3) $6x^2+25=175$
(4) $x^2=-9$
(5) $3x^2+5x-4=5x+104$
(6) $100-5x^2=0$

b) Löse durch Faktorisieren
(1) $x^2-4x=0$
(2) $3x^2-24x=0$
(3) $2x-3x^2=0$

c) Verwende eine binomische Formel
(1) $x^2+2x+1=0$
(2) $x^2-14x+49=0$

Klasse	6. Langzeitaufgaben	Blatt: 6.2	Datum:

Aufgabe 8

Erläutere die folgenden Aussagen. Sind sie richtig?
Beantworte Marens Frage.

Maren:
Die erste und zweite binomische Formel sind grafisch Parabeln mit dem Scheitelpunkt auf der x-Achse, aber was ist die dritte binomische Formel?

Julia:
Ich habe eine Parabel gefunden, die nur in einem Quadranten verläuft.

Timo:
Zwei verschobene Normalparabeln können nicht zwei gemeinsame Punkte haben.

Max:
Geometrisch bedeutet das Lösen einer quadratischen Gleichung immer eine Schnittpunktbestimmung von Parabeln mit Geraden?

Ronja:
Eine quadratische Gleichung kann nicht eine irrationale und eine rationale Lösung haben.

Klasse	6. Langzeitaufgaben (weitere Übungen)	Blatt: 6.4	Datum:

Aufgabe 1[1]

Ein Rettungshubschrauber schwebt 25 m über einem gekenterten Boot und wirft ein Rettungsfloß ab.
Die Höhe des Floßes über dem Wasser kann beschrieben werden mit

$h(t) = 25 - 5 \cdot t^2$ (Zeit in Sekunden, Höhe in m).

a) Nach wie vielen Sekunden trifft das Floß auf der Wasseroberfläche auf?
b) Wie ändert sich die Flugzeit des Rettungsbootes, wenn sich die Flughöhe des Rettungshubschraubers verändert?

Aufgabe 2[1]

Löse die folgenden Gleichungen ohne Rechner.

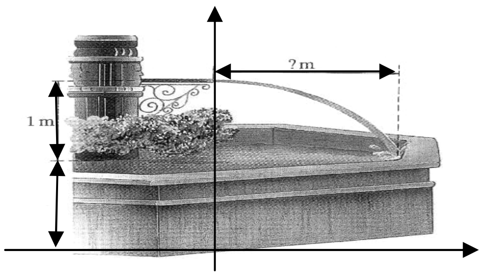
a) $x^2 = 16$
b) $4 \cdot x^2 + 25 = 205$
c) $2 \cdot x^2 = 8$
d) $x^2 + 49 = 0$
e) $x^2 = 50$
f) $3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 4 = 2 \cdot x$

Aufgabe 3

Bei dem Springbrunnen ist die randliche Ummauerung 1 m hoch. Die Bahn des Wassers, das 1 m darüber aus dem Rohr tritt, lässt sich mit der Funktion f mit der Gleichung

$f(x) = -0{,}25 \cdot x^2 + 2$

beschreiben.
Wie weit muss der Rand des Wasserbeckens mindestens von der Rohröffnung entfernt sein?



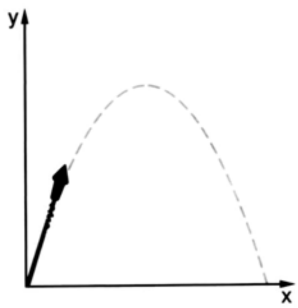
Aufgabe 4[1]

Den Flug einer Feuerwerksrakete kann man mit der quadratischen Funktion h mit der Gleichung

$h(x) = 15 \cdot x - 0{,}5 \cdot x^2$

modellieren. Dabei ist x die Entfernung vom Abschussort in Metern und h(x) die Höhe der Rakete in Metern.

a) In welcher Entfernung vom Abschussort landet die Rakete?
b) In welcher Entfernung erreicht sie ihren höchsten Punkt?



Aufgabe 5

Löse die Gleichungen ohne den Rechner. Überprüfe die Lösung mit dem Rechner.

a) $10 \cdot x - x^2 = 0$
b) $x^2 + 6 \cdot x = 0$
c) $2 \cdot x^2 - 11 \cdot x = 0$
d) $x^2 + 4 \cdot x = 6 \cdot x$
e) $x^2 - 12 \cdot x = 0$
f) $5 \cdot x - 10 \cdot x^2 = 3 \cdot x$
g) $(x - m) \cdot x = 0$
h) $3 \cdot x \cdot (8 - 2 \cdot x) = 0$
i) $(x + 3) \cdot (x - 7) = 0$

[1] NW 8, 978-3-507-85504-5, Schroedel

Klasse	6. Langzeitaufgaben (weitere Übungen)	Blatt: 6.5	Datum:

Aufgabe 6[1]

Gib zu der Lösungsmenge mindestens eine passende Gleichung an.

a) L = {3; 6} b) L = {3; 0} c) L = {- 3; 5} d) L = { -2, - 7}

Aufgabe 7[1]

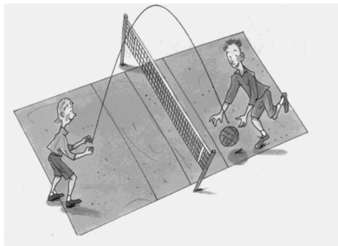
a) Erkläre, warum die quadratische Gleichung $x^2 + 100 = 0$ keine Lösung hat.
b) Für welche Werte von a hat die Gleichung $x^2 - a = 0$ keine Lösung?
c) Löse die Gleichung $x^2 - b \cdot x = 0$ für fünf verschiedene Werte b. Gibt es für alle Zahlen b eine Lösung?

Aufgabe 8[1]

Das Volleyballfeld hat eine Größe von 2 x 9 m x 9 m. Das Netz ist 2,26 m hoch. Die Flugbahn einer Ballangabe, von der Aufschlaglinie aus gesehen, kann durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -0{,}1\,x^2 + x + 2{,}4$$

beschrieben werden.
Betrachte den Graph: Welche Fragen, die sich mathematisch beantworten lassen, könnten interessieren?



Aufgabe 9[1]

Löse im Kopf:

a) $x^2 - 81 = 0$ b) $x^2 + 15 \cdot x = 0$ c) $x^2 + 12 \cdot x + 36 = 0$
d) $(x - 7) \cdot (2 + x) = 0$ e) $3 \cdot x^2 + 15 \cdot x = 0$ f) $7 \cdot x^2 = 63$
g) $(2 \cdot x + 4) \cdot (5 \cdot x - 20) = 0$ h) $4 \cdot (x - 7)^2 = 0$ k) $(x + 2)^2 = -9$

Aufgabe 10[2]

Wie muss man a wählen, damit die Gleichung zwei (eine, keine) Lösung hat?

a) $x^2 + a \cdot x + 1 = 0$ b) $x^2 + x + a = 0$ c) $x^2 + a \cdot x + a^2 = 0$

Aufgabe 11[3]

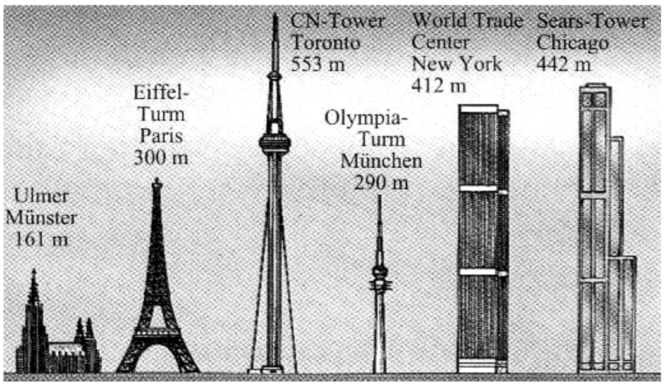
Beim senkrechten Fall einer Kugel von einem hohen Gebäude gilt für die Funktion

Fallzeit (in s) → Fallweg (in m)

angenähert die Zuordnung

$t \mapsto 5 \cdot t^2$.

Berechne die Fallzeit von der Spitze der Gebäude bei den angegebenen Höhen?



[1] NW 9, 978-3-504-85504-2, Schroedel
[2] MN 9, 3-14-123939-8, Westermann
[3] EdM 9, 978-3-507-87123-6,Schroedel

Wissensspeicher

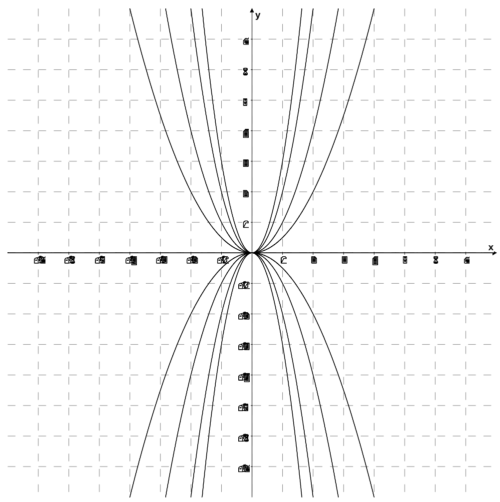
Funktionen mit Gleichungen der Art
$f(x)= a\cdot(x - m)\cdot(x - n)$, wobei $a \neq 0$ (**faktorisierte Form**)
oder
$g(x)= a\cdot x^2 + b\cdot x + c$, wobei $a \neq 0$ (**allgemeine Form**)
heißen **quadratische Funktionen.**

Der Graph einer quadratischen Funktion heißt **Parabel**. Die **Parabelform** ist typisch für Graphen quadratischer Funktionen.
Eine Parabel kann nach oben ($a > 0$) oder unten ($a < 0$) geöffnet sein.
Der höchste bzw. niedrigste Punkt der Parabel heißt **Scheitelpunkt**.
Die Parabel ist symmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse, die durch den Scheitelpunkt verläuft.
Die Schnittstellen der Parabel mit der x-Achse heißen **Nullstellen**.
Eine Parabel kann keine, eine oder zwei Nullstellen haben.

Die einfachste Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion ist: $f(x) = x^2$. Der zugehörige Funktionsgraph heißt **Normalparabel.**

a) Sie ist symmetrisch zur y-Achse.
b) Beim Zeichnen erhält man die Gitterpunkte, durch die die Parabel verläuft folgendermaßen:
   Vom Scheitelpunkt einen nach rechts, einen nach oben.
   Von dort einen nach rechts, 3 nach oben.
   Von dort einen nach rechts, 5 nach oben
   (…)

$f(x) = a\cdot x^2$:
$a > 0$: Graph ist nach oben geöffnet
$a < 0$: Graph ist nach unten geöffnet
durch den Parameter a wird die Normalparabel in y-Richtung, gestreckt', wenn $|a| > 1$ und ‚gestaucht', wenn $|a| < 1$
a heißt **Streckfaktor**.



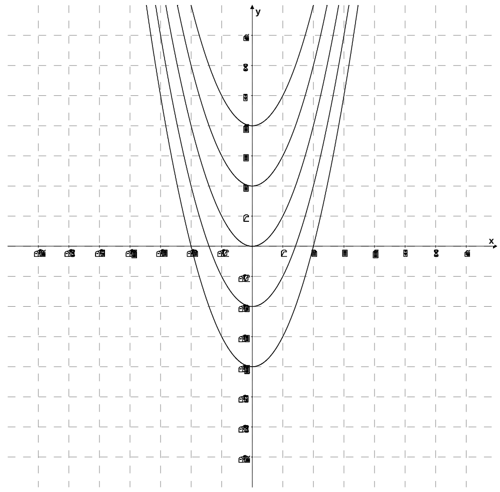
Informationen, die aus der allgemeinen Form $a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ abgelesen werden können
Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0 \mid c)$
Streckfaktor a

Informationen, die aus der faktorisierten Form $a\cdot(x - m)\cdot(x - n)$ abgelesen werden können
Schnittpunkte mit der x-Achse $(m \mid 0)$ und $(n \mid 0)$
Streckfaktor a

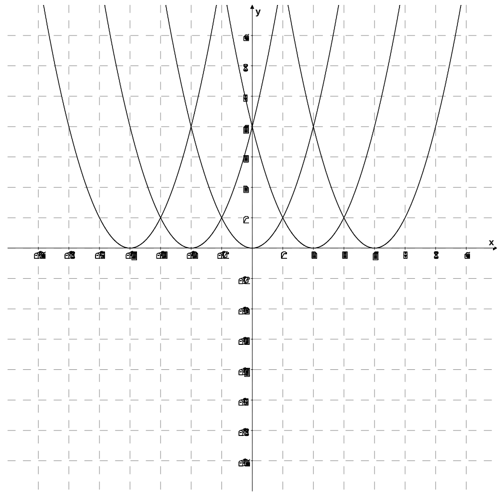
Scheitelpunktform
Quadratische Funktionen können auch in der Scheitelpunktform gegeben sein.
$$f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$$

Informationen, die aus der Scheitelpunktform $f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$ abgelesen werden können.

- $f(x)= x^2 + e$:
  Der Graph wird um $|e|$ verschoben und zwar
  nach oben für $e > 0$
  nach unten für $e < 0$.

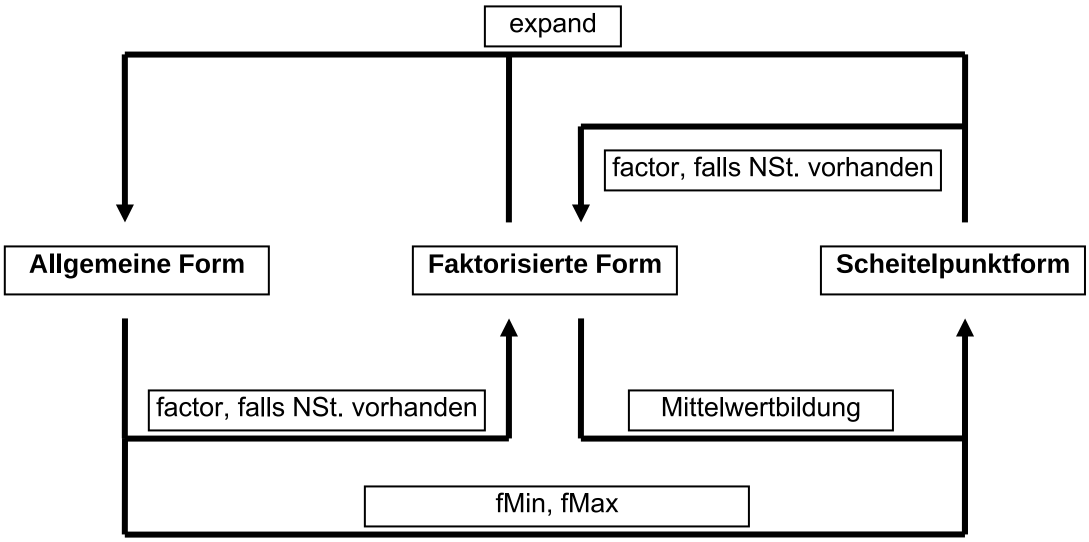


- $f(x) = (x - d)^2$: Der Graph wird um $|d|$ verschoben und zwar
  nach rechts für $d > 0$
  nach links für $d < 0$.



- $f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$: Der Graph der Normalparabel wird
  um d Einheiten in x-Richtung verschoben,
  um den Faktor a in y-Richtung gestreckt und
  um e Einheiten in y-Richtung verschoben.
  Der Scheitelpunkt des Graphen ist $S(d \mid e)$.

Rechnerisches Umwandeln in die verschiedenen Darstellungsformen



Strategien zum Lösen von Standardproblemen

Was willst du?	Situation	Was tust du?
Nullstellen bestimmen	Funktion in faktorisierter Form gegeben	m und n ablesen
	Funktion in allgemeiner oder Scheitelpunktform gegeben	"factor" oder "solve" → m und n ablesen
Scheitelpunkt (d | e) bestimmen	Funktion in Scheitelpunktform gegeben	d und e ablesen
	Funktion in faktorisierter Form gegeben	Mittelwert aus m und n ist d → Funktionswert an der Stelle d ist e
	Funktion in allgemeiner Form gegeben	*Entweder* in faktorisierte Form umwandeln, falls möglich *oder* mit "fMin" bzw. "fMax" d bestimmen → Funktionswert an der Stelle d ist e
Schnittpunkt mit der y-Achse bestimmen	Funktion in allgemeiner Form gegeben	c ablesen
	Funktion faktorisierter Form oder Scheitelpunktform gegeben	"expand" → c ablesen

Rechnerisches Lösen quadratischer Gleichungen

Quadratische Gleichungen lassen sich algebraisch, tabellarisch oder graphisch lösen.
Ist die quadratische Gleichung in der Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ gegeben, wobei a, b und c ungleich Null sind, so kannst du die Gleichung nur mithilfe des "solve"-Befehls lösen.

Folgende Gleichungen solltest du auch händisch lösen können.

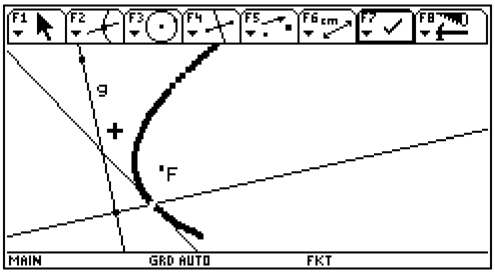
Quadratische Gleichungen, die außer Zahlen nur x^2 enthalten, lassen sich umformen zu
$x^2 = a$ oder $x^2 - a = 0$ (reinquadratische Gleichung).
Rechnerische Lösung durch Wurzelziehen.
$x^2 = a$
$a > 0$: Zwei Lösungen $x = \sqrt{a}$ oder $x = -\sqrt{a}$
$a = 0$: Eine Lösung $x = 0$
$a < 0$: Keine Lösung

Quadratische Gleichungen ohne lineares oder konstantes Glied sollten ebenfalls ohne TC-Hilfe gelöst werden können.

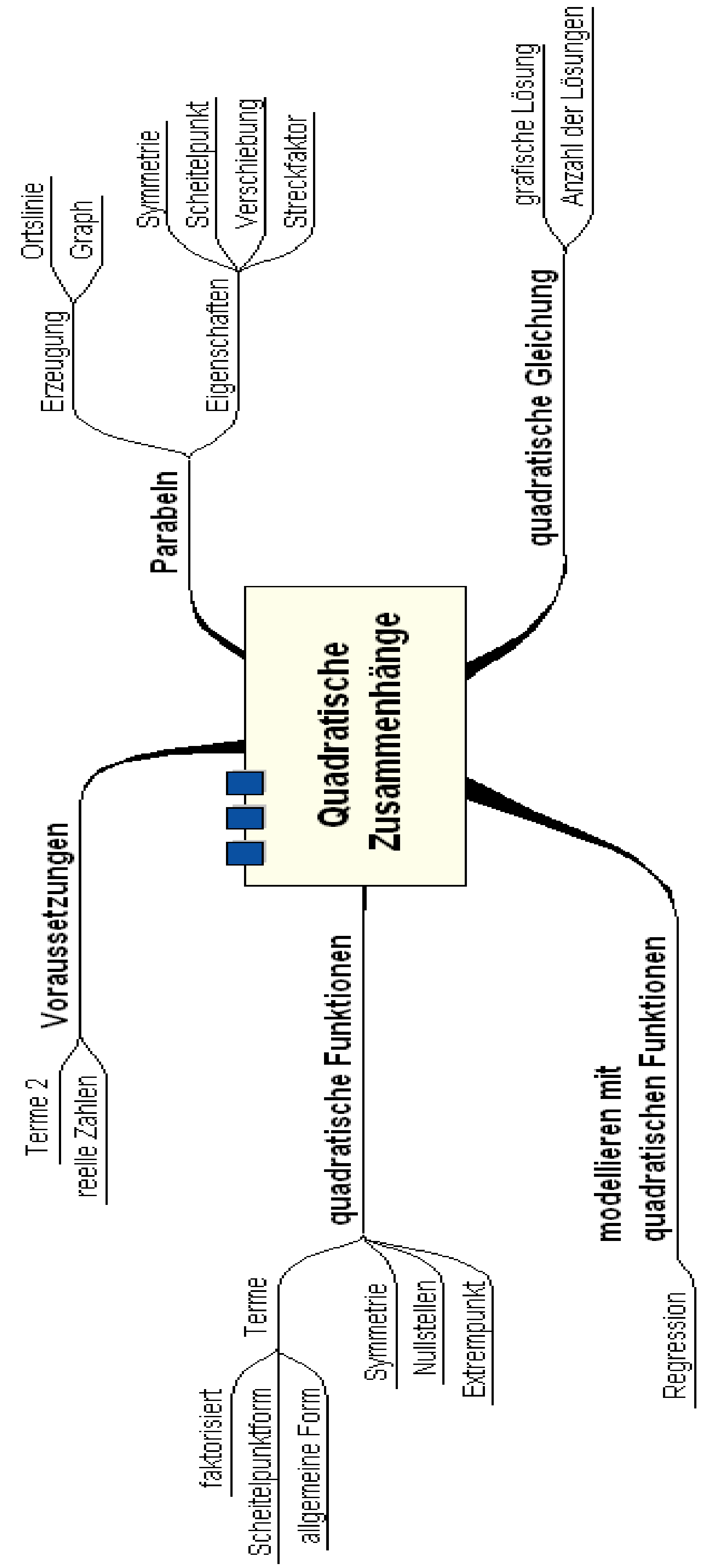
ohne konstantes Glied	ohne lineares Glied
$ax^2 + bx = 0$ $(ax + b) \cdot x = 0$ $x = 0 \ \text{ v } \ ax + b = 0$ $x = 0 \ \text{ v } \ x = -\dfrac{b}{a}$	$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = -\dfrac{c}{a}$ $x = -\sqrt{\dfrac{-c}{a}} \ \text{ v } \ x = \sqrt{\dfrac{-c}{a}}$

Parabel als Ortslinie

Eine Parabel ist die **Ortslinie** aller Punkte, die von einer Geraden g und einem Punkt F den gleichen Abstand haben. Den Punkt F nennt man den **Brennpunkt** der Parabel.



Das kannst du jetzt:



Hinweise zu rechnerspezifischen und rechnerfreien Fertigkeiten

Rechnerfreie Fertigkeiten

Obwohl die Einheit "Quadratische Zusammenhänge" mit Verwendung des TC als Werkzeug unterrichtet wird, sollst du bestimmte Fertigkeiten auch rechnerfrei erwerben und beherrschen. Diese Fertigkeiten wirst du in der Klassenarbeit oder in Kurztests nachweisen müssen.
Du sollst:

1. Anhand der jeweiligen Form des Terms der quadratischen Funktion Informationen über den Graphen entnehmen und je nach den gegebenen Informationen skizzieren können.
   - Scheitelpunktform: Scheitelpunkt, Öffnung, Streckung, Verschiebung
   - faktorisierte Form: Nullstellen, Öffnung, Symmetrieachse
   - allgemeine Form: Öffnung, Streckung

2. Lösen quadratischer Gleichungen
   - der Form $ax^2 + bx = 0$.
   - der Form $ax^2 + c = 0$.
   - in faktorisierter Form oder Scheitelpunktform

Beispiele:

Aufgabe 1

Gib zu den Parabeln mit den folgenden Terme die Koordinaten des Scheitelpunkts und die Nullstellen an, sofern sie existieren:

Funktionsterm	Nullstellen	Scheitelpunkt	
		x	y
$(x + 4)\cdot(x - 6)$			
$(x - 2)^2 - 4$			
$2\cdot(x + 3)\cdot(3\cdot x - 3)$			
$x^2 - 16$			
$-3\cdot x - 2$			

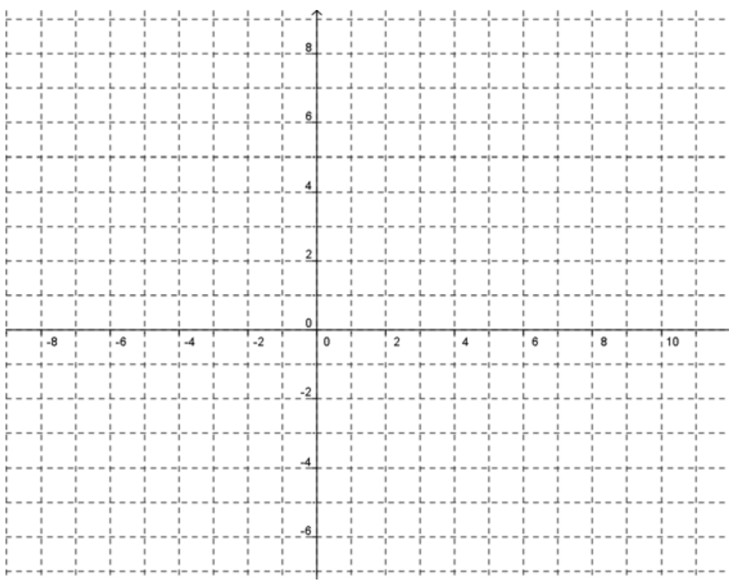
Aufgabe 2

Skizziere die Graphen zu folgenden Gleichungen in das gegebene Koordinatensystem:

$f(x) = (x + 1)^2 - 3$

$g(x) = \frac{1}{4} \cdot (x + 2)\cdot(x - 4)$

$h(x) = -2\cdot(x - 2)^2 + 2$



Aufgabe 3

Fülle die Lücken in der Tabelle aus:

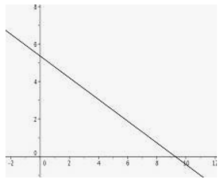
x	$f(x) = x^2 - 3 \cdot x$
- 3	
0	
2	

x	$f(x) = (x + 1) \cdot (x - 2)$
- 1	
0	
1	

x	$f(x) = -0{,}5 \cdot x^2 - 3$
- 2	
1	
2	

Aufgabe 4

Kreuze an, welche Eigenschaft zu welchem Funktionstyp passt.

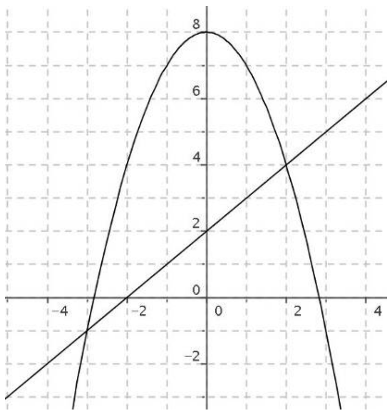
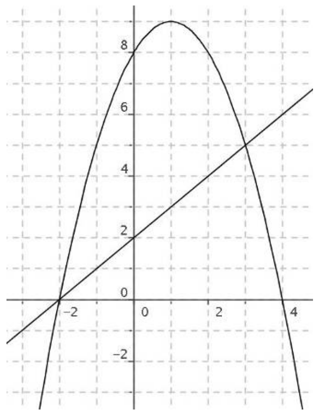
	x y 2 5 3 7,5 4 10		$y = -2x^2 - 1{,}25$	x y - 1 - 2 2 4 3 9
proportional linear quadratisch keine von den dreien	❑ ❑ ❑ ❑	❑ ❑ ❑ ❑	❑ ❑ ❑ ❑	❑ ❑ ❑ ❑

Aufgabe 5

Gegeben sind drei Gleichungen. Kreuze jeweils an:

	$x^2 = 7$	$4 \cdot x = -0{,}3$	$-3 = x^2$	$x^2 - 6 = 2x$
hat keine Lösung hat genau eine Lösung hat genau zwei Lösungen	❑ ❑ ❑	❑ ❑ ❑	❑ ❑ ❑	❑ ❑ ❑

Aufgabe 6

Welche Gleichung wird hier dargestellt? Mehrere Kreuze möglich:		
$x^2 + 8 = x + 2$ $(x - 1)^2 + 8 = x + 2$ $x + 2 = (x + 2) \cdot (x - 4)$	❑ ❑ ❑	❑ ❑ ❑
Lies jeweils die Lösungen ab:		

Aufgabe 7

Löse die Gleichungen

a) $-x^2 + 20 = 5$

b) $x^2 - 9 \cdot x = 0$

c) $2 \cdot x + 6 = 6 - x^2$

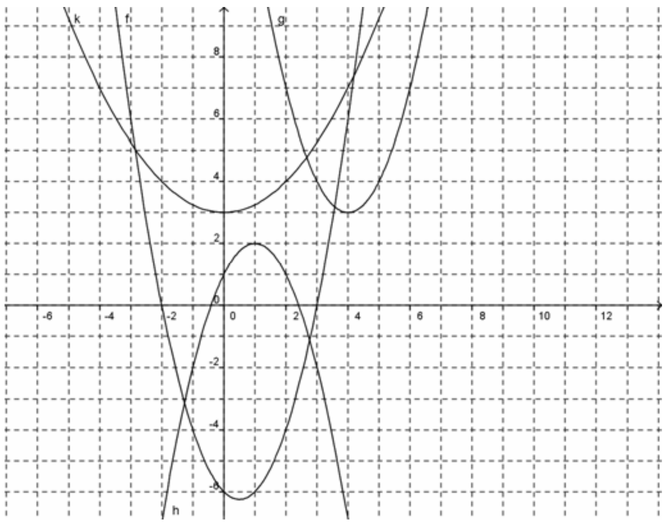
Aufgabe 8

Gib den Term einer Parabel mit den folgenden Eigenschaften an:

Nullstellen	Scheitelpunkt		Funktionsterm
	x	y	
- 2 ; 2			
	1	5	
	- 4	3	
- 2			

Aufgabe 9

Gib den Term einer Parabel mit den folgenden Graphen an:



f(x)=

g(x)=

h(x)=

k(x)=

CAS - Fertigkeiten

Im Umgang mit dem TC sollst du am Ende der Einheit über folgende Fertigkeiten verfügen:

1. Umformungen zwischen den unterschiedlichen Darstellungen durchführen.
2. $\frac{20}{3}x^2 - 2x + \frac{3}{20} = 0$ mittels solve-Befehl bzw. graphisch lösen.
3. graphische und durch fMin und fMax Minimum und Maximum bestimmen.
4. Regression und Modellkritik von Punktwolken mittels TC durchführen.
5. QuadReg kennen und anwenden.

Beispiele:

Aufgabe 1

Gegeben sind die Funktion f und g mit $f(x) = 3x^2 + 17x - 45$ und $g(x) = \frac{20}{3}x^2 - 2x + \frac{3}{20}$.
Bestimme den Scheitel und die Nullstellen des Graphen zu f grafisch und zu g algebraisch.
Gib die Funktionsterme in der Scheitelpunktform und in der faktorisierten Form an.

Aufgabe 2

Bestimme für die Parabel mit der Gleichung $f(x) = -5x^2 - 17x + 38$ den Scheitel und die Nullstellen algebraisch.

Aufgabe 3

Gib den Funktionsterm $-(x-3)^2 - 15$ in allgemeiner und faktorisierter Form an.

Aufgabe 4

Die Entwicklung der Siegerzeiten bei den Olympischen Sommerspielen seit 1948 sowohl bei den Frauen als auch bei den Männern zeigt die folgende Tabelle.

Jahr	1948	1952	1956	1960	1964	1968	1972	1976	1980	1984	1988	1992	1996	2000	2004
Zeiten Männer in s	10,30	10,40	10,50	10,20	10,00	9,90	10,14	10,06	10,25	9,99	9,92	9,96	9,84	9,87	9,85
Zeiten Frauen in s	11,90	11,50	11,50	11,00	11,40	11,00	11,07	11,01	11,06	10,97	10,54	10,82	10,94	10,75	10,93

a) Bestimme zu beiden Punktmengen eine Regressionsgerade
b) Bestimme den Zeitpunkt, ab dem die Frauen schneller sind als die Männer.
c) Bewerte deine Ergebnisse.

Aufgabe 5

In einer amerikanischen High School wurden Schüler nach einem Mathematiktest befragt, wie viele Stunden sie in die Vorbereitet investiert hatten. Die Angaben wurden in Beziehung zu ihren Ergebnissen gesetzt. So besagt das Zahlenpaar (3 | 77), dass bei 3 Stunden Vorbereitung der Schüler 77 von 100 möglichen Punkten erreicht hat.

Stunden	3,0	2,5	1,5	2,6	1,0	5,5	4,2	3,7	0,5	3,5	8,2	5,4	9,3	7,0	5,2	8,4
Punkte	82	71	73	75	47	78	90	85	56	87	94	70	89	96	74	100

Bestimme die Regressionsgerade zu der Punktmenge und bewerte dein Ergebnis.

Aufgabe 6

Die Tabelle beschreibt den Bremsweg in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit wieder.

Geschwindigkeit in km/h	40	60	80	100	120
Bremsweg im m	5	15	25	60	95

Beschreibe die Beziehung durch eine geeignete Funktion und bewerte dein Ergebnis

Aufgabe 7

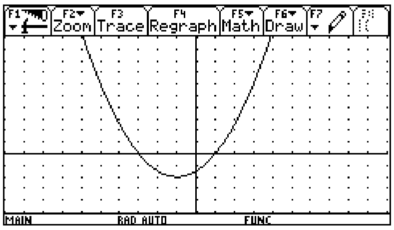
Die folgende Tabelle gibt den Schlüpferfolg eines Flohkrebses in Abhängigkeit der Temperatur wieder. Dabei ist auf der Temperaturstufe jeweils die gleiche Anzahl von Eiern betrachtet worden.

Temperatur in °C	2	4	6	8	10	12	16	20	24
Schlüpferfolg in %	34,6	50,3	68,3	75,6	75,4	74,1	59,0	46,3	11,6

Bestimme eine geeignete Regression und bewerte dein Ergebnis.

Selbsteinschätzung

Schätze deine Kenntnisse ein und mache ein Kreuz in der entsprechenden Spalte.

<table>
<tr><th>Ich kann</th><th>ich bin sicher</th><th>ich muss noch üben</th><th>ich brauche Hilfe</th></tr>
<tr><td>• zu einfachen quadratischen Funktionen ohne TC Wertetabellen erstellen und die Wertepaare in ein geeignetes Koordinatensystem eintragen
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>• Graphen quadratischer Funktionen ihren Funktionsgleichungen zuordnen und umgekehrt
a) $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x+3)$
b) $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-3)$

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>• den Funktionsterm einer quadratischen Funktion von der allgemeinen Form in die faktorisierte Form überführen und umgekehrt.
$3x^2 + 17{,}5x - 45$
$(x-3)(x+8)$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>• von der allgemeinen Form des Funktionsterms über die faktorisierte Form die Scheitelpunktform ermitteln und umgekehrt.
$x^2 - 2x + 5$
$-(x+2)^2 - 5$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>• von der allgemeinen Form des Funktionsterms mithilfe der TC-Befehle "fMin" und "fMax" deren Scheitelpunktform ermitteln.
$x^2 + 5x + 15$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>• zu einem vorgegebenen Funktionsterm einer quadratischen Funktion den Scheitelpunkt und – falls vorhanden – die Nullstellen angeben und umgekehrt.
<table>
<tr><th rowspan="2">Funktionsterm</th><th rowspan="2">Nullstellen</th><th colspan="2">Scheitelpunkt</th></tr>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>(x – 3) (x + 5)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(x – 1)² + 4</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>- 2 ; 2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>- 4</td><td>3</td></tr>
</table>
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>• folgende Typen quadratischer Gleichungen ohne TC rechnerisch lösen:
$x^2 - 36 = 0$
$2x^2 + 8x = 0$
und folgende Arten quadratischer Gleichungen ohne TC graphisch lösen:
$x^2 + 5x + 6 = 0$
$x^2 = 2x + 8$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Ich kann</th><th>ich bin sicher</th><th>ich muss noch üben</th><th>ich brauche Hilfe</th></tr>
<tr><td>

- eine Parabel als Ortslinie konstruieren.
  Bestimme die Gleichung der Parabel mit der Leitgeraden f(x) = - 2 und dem Brennpunkt F(0; 2).

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

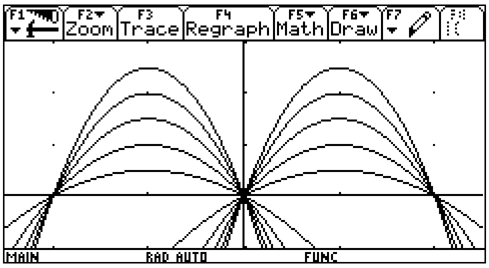
- eine quadratische Regression mit dem TC-Befehl "QuadReg" durchführen und bewerten.
  Mithilfe von besonderen Messgeräten wurden die folgenden Daten für den Flug eines Hammers beim Hammerwerfen aufgezeichnet.

<table>
<tr><td>x [m]</td><td>0</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td><td>60</td><td>70</td></tr>
<tr><td>h(x) [m]</td><td>0</td><td>5,1</td><td>9,3</td><td>10,5</td><td>11</td><td>8,7</td><td>5,4</td><td>0</td></tr>
</table>

Übertrage die Werte aus der Tabelle in deinen TC und berechne ein quadratisches Modell.

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

- zu vorgegebenen parabelförmigen Objekten eine passende quadratische Funktion finden
  Zeichne folgendes Bild auf deinem Rechner:



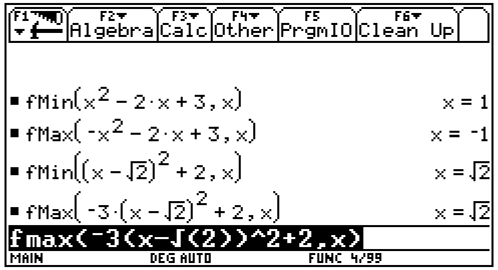
$x_{min} = -2,5$ $y_{min} = -1$
$x_{max} = 2,5$ $y_{max} = 3$

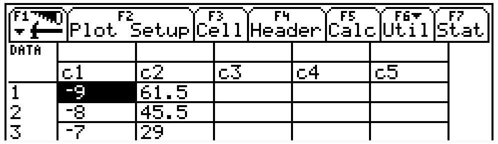
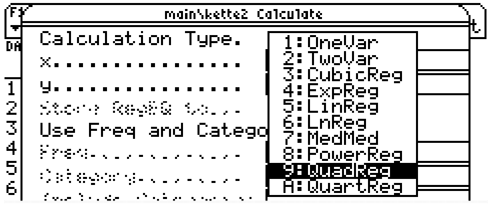
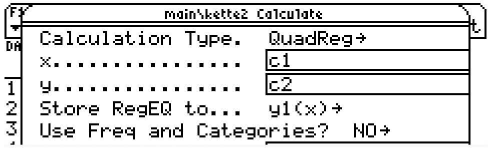
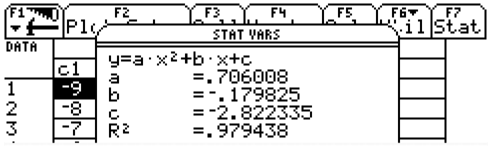
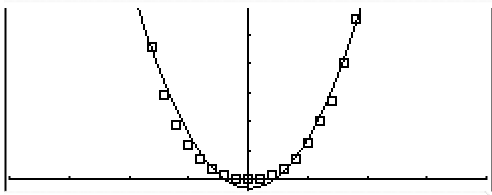
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

- mithilfe einer quadratischen Funktion einen Vorgang modellieren.
  Aus einer quadratischen Pappe soll ein Karton (ohne Deckel) hergestellt werden, indem man an jeder Ecke ein Quadrat der Seitenlänge 4 cm abschneidet und die Ränder des verbleibenden Pappstücks hochfaltet. Das Volumen des Kartons soll 156 cm³ betragen. Bestimme die Größe der ursprünglichen Pappe.

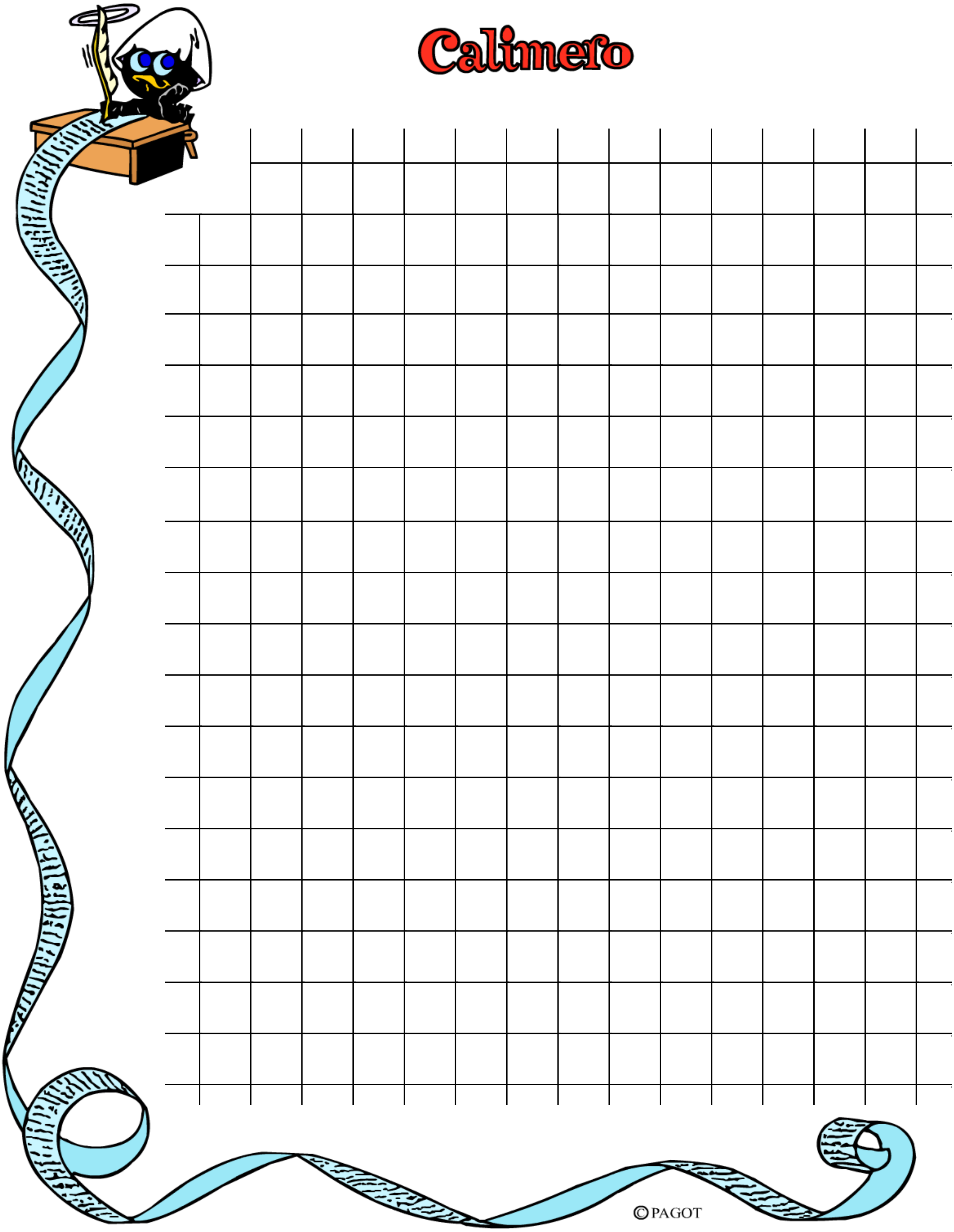
</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

TC-Hilfe: Quadratische Zusammenhänge

Was willst Du?	Was tust Du?	Was siehst Du?	Hinweise
Einen quadratischen Funktionsterm in allgemeiner Form **faktorisieren**. $f(x) = x^2 - 4 \cdot x + 3$	Mit dem Befehl "factor" kannst du faktorisieren. Bsp.: factor($x^2 - 4 \cdot x + 3$)		Bei irrationalen Nullstellen empfiehlt es sich, den Approximate-Modus zu verwenden.
Einen faktorisierten Funktionsterm **ausmultiplizieren**. $f(x) = (x - 3) \cdot (x - 1)$	Mit dem Befehl "expand" kannst du ausmultiplizieren. Bsp.: expand($(x - 3) \cdot (x - 1)$)		
Du willst das **Minimum** oder **Maximum** einer Funktion algebraisch berechnen.	Im ∀-Bildschirm gibst du fMin(f(x),x) bzw. fMax(f(x),x)		Der TC berechnet die Stelle, an der die Funktion minimal bzw. maximal wird. Dabei arbeitet der TC exakt!

Was willst Du?	Was tust Du?	Was siehst Du?	Hinweise
Eine (quadratische) Regression durchführen Du möchtest einen geeigneten Graphen durch eine Punktwolke legen.	Im Data-Matrix-Editor gibst du die Daten ein.		
	Mit □ CALC rufst du den Editor zur Berechnung geeigneter Ausgleichskurven auf. In diesem Fall wählst du mit **9:QuadReg** die Funktionenklasse der quadratischen Funktionen auf.		
	Trage ein, welche Spalten x- und y-Koordinaten sein sollen. Du kannst die vom TC bestimmte Regressionsfunktion über ´Store RegEQ to´ im y-Editor speichern lassen.		Vgl. das Vorgehen beim Zeichnen von Funktionen
	Der TC gibt die Werte für die jeweiligen Koeffizienten an. ´c´ und ´R^2´ sind Maße für die Güte der Regression.		
	Die Darstellung der Messwerte und des Graphen der Regression gibt die Möglichkeit zur Kontrolle des Ergebnisses.		

Calimero



Das sollst du im Kopf können

Aufgabe 1

a) Berechne:

$3{,}4 - 4{,}8 - 1{,}6$ $\quad (-1) \cdot (-2) : (-1)$ $\quad 25 \cdot 0{,}3$ $\quad 16^2$

b) Welchen Wert bekommt der Term 3 (5x - 2) für:

x = 2, x = 0, $x = \frac{3}{5}$?

c) Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind 6 cm und 8 cm lang. Wie lang ist die Hypotenuse?

d) Berechne:

$\sqrt{100-51}$ $\quad \sqrt{4^2+3^2}$ $\quad \sqrt{10000}$ $\quad 0{,}0016$

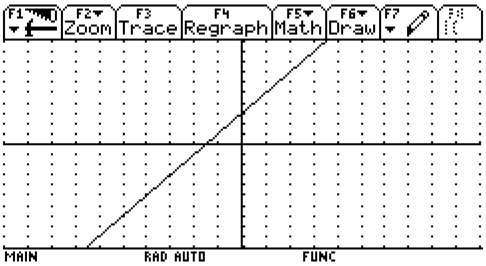
e) Zwei Würfel werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass deren Augensumme 3 (10, 12) beträgt?

f) Wie groß sind die Winkel im gleichseitigen Dreieck?

g) Notiere als Bruchzahl und als Prozentzahl: 0,21

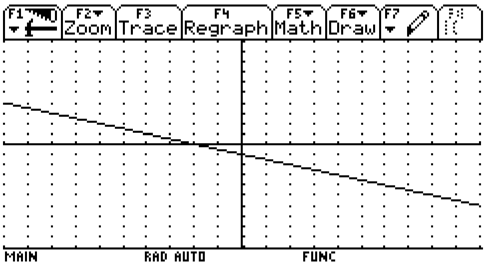
h) 60 % von 120 Schülern kommen mit dem Bus zur Schule. Ein Drittel dieser Schüler bringen ein Getränk mit. Wie viele Schüer sind das?

i) Bestimme die Steigung der Geraden.



j) Multipliziere aus: $x \cdot (x+7)$, $(x-2) \cdot (x+3)$, $(x+4) \cdot (x+4)$

k) Stelle die Geradengleichung auf.



Aufgabe 2

a) Wandle um:

0,01 m in cm, 2,3 t in kg, 235 mm in m, 500 ml in l, 0,08 m^2 in m

b) Wie viele Symmetrieachsen hat ein Quadrat (ein gleichseitiges Dreieck)?

c) 0,75 l Lack reichen für 12 m^2. Für wie viel Fläche reicht ein ganzer Liter?

d) Schreibe als Dezimalbruch: $9\frac{3}{8}$.

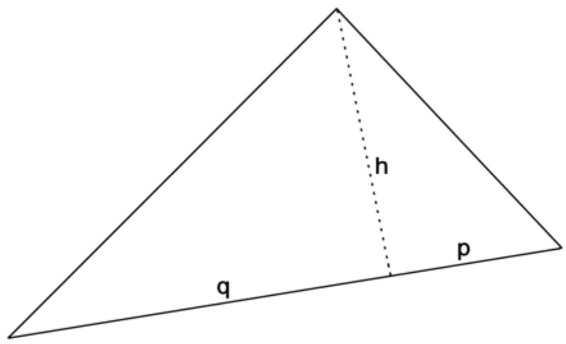
e) Für welchen Wert von x bekommt der Term $5x - 2$ den Wert

8, 23, - 7, 3, 0 ?

f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man mit einer Münze viermal hintereinander „Zahl“?

g) Vereinfache folgende Terme: $(x+3)\cdot(x-3)$, $(x-2)^2+4x$, $(x+1)^2-(x-1)^2$

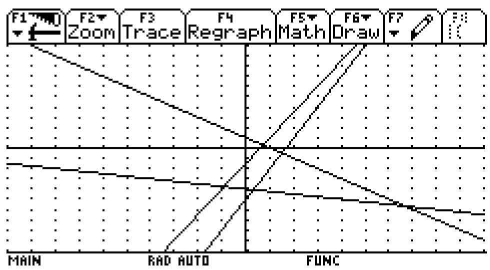
h) Gib einen Term an, mit dem man den Flächeninhalt nebenstehender Figur berechnen kann.



l) Die Wurzel welcher Zahl ergibt 11?

m) Berechne: $\frac{4}{5}+\frac{5}{4}$

n) Bestimme die Funktionsterme derjenigen Funktionen, deren Graphen hier abgebildet sind.



Aufgabe 3

a) Berechne: $2\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$

b) Wie zeichnet man eine Strecke der Länge $\sqrt{2}$?

c) Was sind Primzahlen? Gib ein Beispiel.

d) Die Seitenlängen eines Quadrates wurden verdoppelt. Wie verändert sich der Umfang?

e) Ein 10 m hoher Maibaum wird auf dem Dorfplatz aufgestellt. Er wird mit Seilen gehalten, die an seiner Spitze befestigt werden. Jedes Seil soll so lang sein, dass es im Boden in acht Meter Entfernung vom Fuß des Baumes verankert werden kann. Wie lang muss jedes der Seile sein?

f) Berechne 75% von 200 kg.

g) Was ist der Unterschied zwischen einem stumpfen und einem überstumpfen Winkel?

h) Faktorisiere: $x^2 - 16$, $x^2 + 6x + 9$, $x^2 - 144$, $x^2 + 5x + 6$

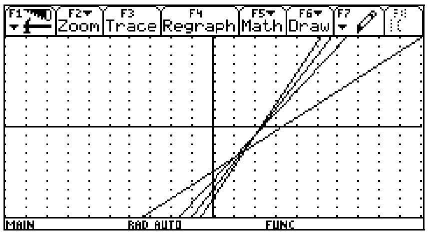
i) Berechne: $25 - (3{,}5 - 1) \cdot 2$

j) Für welchen Wert von x bekommt der Term $2x - \frac{1}{2}$ den Wert

3,5 ; 19,5 ; 0 ; - 6,5 ?

k) In einem Zoo-Gehege befinden sich 20 Kamele und Dromedare. Insgesamt haben sie 31 Höcker. Wie viele Kamele und wie viele Dromedare sind in diesem Gehege?

l) Bestimme die Steigung der abgebildeten Geraden.



Aufgabe 4

a) Julia hat für ihr Handy einen Tarif gewählt, bei dem sie 5 Euro Grundgebühr pro Monat und 10 Cent pro Einheit zahlt. Wie viel hat sie pro Monat zu zahlen, wenn sie mit ihrem Handy 15 (25, 110, 580) Einheiten vertelefoniert?

b) Kann ein Dreieck konstruiert werden, dessen Seiten die Längen 7 cm, 10 cm und 2 cm besitzen?

c) Fasse zusammen: $41b - 15b + 7b$

d) Bei einem Würfel halbieren sich die Kantenlängen. Wie verändert sich dadurch der Oberflächeninhalt?

e) Stelle einen Term für den Umfang nebenstehender Figur auf.
Wie viele Symmetrieachsen besitzt die Figur?

f) Donald weiß, dass in jedem siebten Überraschungsei eine Figur steckt. Er hat zwei dieser Eier gekauft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich darin mindestens eine Figur befindet?

g) Gib das Volumen von 75 Litern in cm³ an.

h) Multipliziere aus: $x \cdot (5x + 9)$, $(x + 1) \cdot (x - 2)$, $3 \cdot (x + 9)^2$

i) Berechne das Dreifache des Terms $7x + 2$.

j) Welche Zahl muss man mit 13 multiplizieren, um 91 zu erhalten?

k) Berechne: $\frac{2}{3}$ von 90 €, $\frac{3}{5}$ von 120 m und $\frac{5}{8}$ von 160 l

Aufgabe 5

a) Aus wie vielen Minuten besteht eine Drittel Stunde?

b) Der Term $(x + a)^2$ nimmt den Wert 64 an, wenn $x = 0$ ist. Wie groß ist a?

c) Ein Auto braucht etwa 5 l Benzin pro 100 km. Wie viel Benzin braucht es für 60 km?

d) Wie müsste ein Glücksrad aussehen, wenn dessen drei mögliche Ergebnisse die Wahrscheinlichkeiten 0,1 , 0,3 und 0,6 haben?

e) Wie zeichnet man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse 7 cm lang ist?

f) Berechne:

$\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{8}$, $\frac{12}{9} + \frac{5}{18}$, $\frac{\sqrt{361}}{38}$, $\sqrt{\frac{225}{196}} + \frac{3}{7}$

g) Ein Sparguthaben von 2000 € ist zu einem festen Zinssatz von 3,5 % p.a. angelegt worden.
Wie viel wird dem Konto nach einem Jahr an Zinsen gutgeschrieben?

h) Über 4 Transportbänder wird ein Frachtschiff in 5 Stunden geleert. Wie viel Zeit würde man wohl sparen, wenn man ein Transportband zusätzlich einsetzte?

i) Wie viele Symmetrieachsen besitzt ein gleichschenkliges Trapez?

j) Ziehe vom Term $8 - 3x$ den Term $8x - 3$ ab.

k) Ernie und Bert besitzen zusammen 360 €. Bert hat doppelt so viel Geld wie Ernie.
Wie viel Geld besitzt Ernie?

Aufgabe 6

a) Berechne 45 % derjenigen Zahl, die mit 3 multipliziert 600 ergibt.

b) Löse: $3x + 4y = 4$
$\wedge \quad x + 8y = 8$

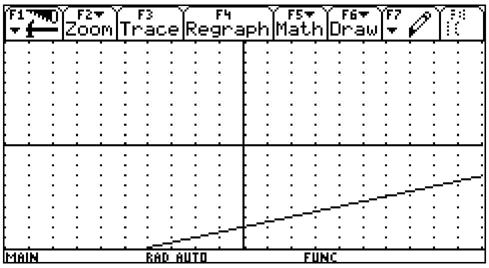
c) Bestimme die Nullstellen der Terme: $4x - 1$, $5x + 1$ und $18x - 9$

d) Gib ein Achtel von 1.600 m an.

e) Marvin wirft gleichzeitig zwei Spielwürfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die Augensumme 11 erhält?

f) Jennifer erhält nach einem Jahr für ihr Sparguthaben von 500 € immerhin 20 € Zinsen gutgeschrieben. Wie viel Prozent Zinsen gewährt ihr die Sparkasse?

g) Stelle die Geradengleichung auf.



h) Berechne: $(x + 5)^2$ für folgende Werte von x: 1, - 3, 0, - 17 und 95

i) Welche Seitenlänge besitzt ein Quadrat, dessen Flächeninhalt 324 cm^2 beträgt?

j) Von insgesamt 140 Säcken Gänsefedern kauft Frau Holle 28. Wie viel Prozent sind das?

k) Faktorisiere: $6x + 12$, $27x - 9$, $-39y + 26$, $x^2 - 4$, $a^2 - 121$.

Aufgabe 7

a) Gib die möglichen Abmessungen für einen Quader von 5 Liter Volumen an!

b) Berechne: - 8 · (- 1,7)

c) Wie viel sind 40% von 150 €?

d) Wie lautet die Lösungsmenge von $x^2 = -49$?

e) Wird eine Figur bei zentrischer Streckung mit dem Streckfaktor 1,2 größer oder kleiner?

f) Auf welcher Gerade liegen alle Punkte, deren Abstand zur x-Achse genau so groß ist wie ihr Abstand zur y-Achse?

g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit drei Würfeln drei gleiche Zahlen zu werfen?

h) Berechne: $(3 + 9)^2$

i) Gib mögliche Maße der Höhe und der Grundseite für ein Dreieck mit dem Flächeninhalt 15 cm^2 an!

j) Berechne: $\frac{1}{5} + \frac{2}{7}$

Aufgabe 8

a) Welchen Flächeninhalt hat in etwa ein Stellplatz für ein Auto?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einer Münze dreimal nacheinander Kopf zu werfen?

c) Welchen Wert hat der Term $3a \cdot (a - 7)$ für $a = 2$?

d) Wie verändert sich der Flächeninhalt einer Figur bei zentrischer Streckung mit dem Streckfaktor 2?

e) Berechne: $\frac{2}{5} + \frac{4}{7}$

f) Gib 1,25 als Bruch an!

g) Wie viele Lösungen kann die Gleichung $3 \cdot x + 1 = 7$ haben?

h) Berechne: $4{,}5 \cdot 7$

i) Wie bestimmt man den Mittelpunkt des Inkreises eines Dreiecks?

j) Wie viele Nullstellen hat die Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + 3$?

Aufgabe 9

a) Gib die Lösungen zu $x^2 = 400$ an!

b) Berechne: $(x - 9)^2$

c) Wie groß ist der Rauminhalt eines Würfels mit der Kantenlänge 3 cm?

d) Unter welchen Bedingungen sind zwei Figuren mathematisch ähnlich?

e) Wie heißt die längste Sehne des Kreises?

f) Welchen Wert hat der Term $a \cdot (a + 5)$ für $a = -3$?

g) Wie wahrscheinlich ist es, bei zwei Münzwürfen genau einmal Zahl zu erhalten?

h) Gib die Scheitelpunktkoordinaten der Parabel mit der Gleichung $y = x^2 - 9$ an!

i) Berechne: $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5}$

j) Löse: $-3 \cdot x + 7 = 15$

Aufgabe 10

a) Wie heißt der Ort aller Punkte, die von einem Punkt Z den Abstand 9 cm haben?

b) Sind zwei Dreiecke kongruent, wenn sie in der Größe der Winkel übereinstimmen?

c) Ein Dreieck mit dem Flächeninhalt 24 cm² hat eine Grundseite der Länge 4 cm. Wie lang ist die Höhe?

d) Wie viel sind 40 % von 300 €?

e) Wie viel Prozent sind 60 € von 360 €?

f) Bestimme die Lösung der Gleichung $x \cdot (x - 4) = 0$!

g) Wie wahrscheinlich ist es, mit zwei Würfeln eine 5 zu werfen?

h) Berechne: $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7}$

i) In wie viele Dreiecke kann ein Quadrat durch Einzeichnen der Diagonalen zerlegt werden?

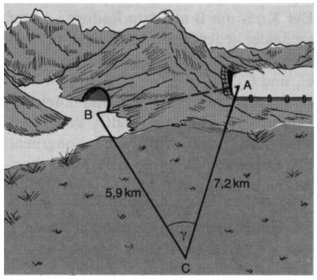
j) Nenne die Gleichung einer quadratischen Funktion, die keine Nullstellen hat.

Das ist dein Basiswissen

Aufgabe 1

Ein Straßentunnel soll geradlinig durch einen Berg gebaut werden. Die Entfernung zwischen den Tunneleingängen A und B kann nicht direkt gemessen werden. Um die Länge des Tunnels zu bestimmen, werden von einem geeigneten Punkt C aus die Entfernungen zu den Tunneleingängen A und B, sowie der Winkel γ gemessen.

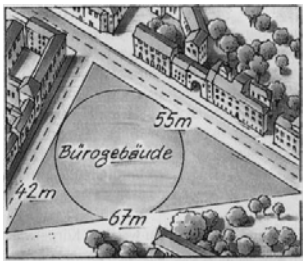
Man erhält $\overline{CA} = 7{,}2$ km ; $\overline{CB} = 5{,}9$ km und $\gamma = 65°$.
Bestimme die Tunnellänge.



Aufgabe 2

Die Bürger von Neustadt wünschen sich für die Architekturausstellung ein modernes Bürogebäude, das nicht eckig, sondern kreisförmig und vollständig von Glas umgeben ist. Es kommt aber aufgrund der Größe nur ein Grundstück an der Straßenecke in Frage.

a) Bestimme für die Bürger von Neustadt die maximalen Ausmaße des neuen Bürogebäudes.
b) Welchen Durchmesser darf das Gebäude haben, wenn ein 80 cm breiter Weg zwischen Gebäude und Straße geplant ist?



Aufgabe 3

Kannst du aus den drei gegebenen Größen ein Dreieck konstruieren?
Wenn ja, dann führe die Konstruktion durch, wenn nein, dann begründe warum es nicht geht.

a) $\alpha = 45°$, $\beta = 68°$ und $\gamma = 67°$
b) $\alpha = 110°$, $a = 6{,}6$ cm und $c = 4{,}7$ cm
c) $a = 10$ cm , $b = 4$ cm und $c = 5{,}5$ cm

Aufgabe 4

Ein Straßentunnel soll geradlinig durch einen Berg gebaut werden. Die Entfernung zwischen den Tunneleingängen A und B kann nicht direkt gemessen werden.
Um die Länge des Tunnels zu bestimmen, werden von einem geeigneten Punkt C aus die Entfernungen zu den Tunneleingängen A und B, sowie der Winkel γ gemessen. Man erhält:
$|CA| = 5{,}6$ km , $|CB| = 8{,}8$ km und $\gamma = 52°$.
Bestimme die Tunnellänge.

Aufgabe 5

a) Konstruiere ein Drachenviereck ABCD aus $a = 3{,}6$ cm, $f = 5$ cm und $\beta = 100°$.
Die Symmetrieachse des Drachens liege auf der Diagonalen AC.
b) Welche Länge darf für die Diagonale BD gewählt werden, damit bei sonst unveränderten Daten der vorigen Teilaufgabe eine Konstruktion überhaupt möglich sein kann.

Aufgabe 6

Eine Münze und ein Würfel werden nacheinander geworfen. Zeigt die Münze Wappen und der Würfel eine 4, hat Spieler A gewonnen. Zeigt die Münze Zahl und der Würfel eine Primzahl, hat B gewonnen. In allen anderen Fällen ist das Spiel unentschieden.

a) Gib alle möglichen Spielergebnisse an.
b) Gib ein Baumdiagramm für das Spiel an.
c) Wie ändert sich die Lösung zu a) und b), wenn erst der Würfel und dann die Münze geworfen wird?
d) Da Spieler A sich benachteiligt fühlt, fordert er eine Änderung der Spielregeln, sodass das Spiel gerecht wird. Mach einen Vorschlag!

Aufgabe 7

Aus einer Klasse werden 6 Personen ausgewählt. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei dieser Personen im gleichen Monat Geburtstag haben.
Um diesen Vorgang zu simulieren, benötigen wir Zufallszahlen zwischen 1 und 12.

a) Beschreibe, wie du 6 Zufallszahlen mit dem Taschencomputer erzeugen kannst.
b) Jan würfelt 6-mal mit zwei Würfel und erhält mithilfe der jeweiligen Augensumme auch ein Ergebnis. Beurteile die beiden Vorgehensweisen auf ihre Eignung als Simulation.

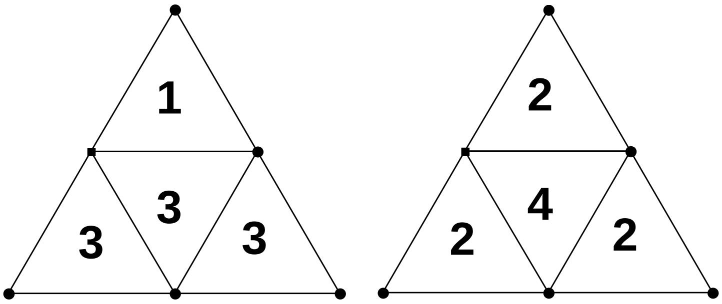
Aufgabe 8

Hans hat in seiner Hosentasche 4 rote, 6 grüne und 8 blaue gleich große Murmeln.

a) Er zieht eine Murmel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, (I) eine rote, (II) eine grüne, (III) eine blaue Murmel aus der Hosentasche zu ziehen?
b) Hans legt die in a) gezogene Kugel wieder zurück in seine Hosentasche! Dann zieht er nacheinander zwei Murmeln aus seiner Hosentasche, wobei er die erste Murmel zurücklegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht er (I) zwei rote, (II) zwei blaue, (III) zwei gleichfarbige Murmeln? Zeichne auch den zugehörigen Baum.
c) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, zwei rote Murmeln zu ziehen, wenn Hans die erste Murmel nicht zurücklegt? Begründe!

Aufgabe 9

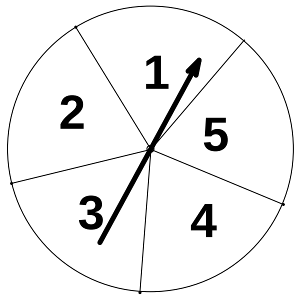
Es werden zwei Tetraeder mit nebenstehenden Netzen geworfen. Es gewinnt der Tetraeder, bei dem die höhere Augenzahl unten liegt.
Welchen Tetraeder würdest Du wählen? Begründe ausführlich!



Aufgabe 10

Nebenstehendes Glücksrad trägt die Ziffern 1 bis 5 in gleichgroßen Feldern. Es wird dreimal gedreht und die drei Ziffern hintereinander als dreistellige Zahl geschrieben.
Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) die Zahl aus drei gleichen Ziffern besteht,
b) in der Zahl die Ziffer 1 zweimal auftritt,
c) die Zahl ungerade ist.



Calimero