Ballonfahrt:
Eine Einführung in die Differentialrechnung

Karl-Heinrich Braun

Aufgabenstellung

Die Vertikalbewegung eines Heißluftballons ist abhängig von der Steuerung des Brenners, während seine Horizontalbewegung nur vom Wind geführt wird.

Folgende Punkte $P(x|y)$ sind Messwerte der Vertikalbewegung. Hierbei wird x in Minuten und y in 10m gemessen: $P_1(-3|10{,}25)$; $P_2(0|14)$; $P_3(3|4{,}25)$; $P_4(6|-5{,}5)$; $P_5(9|-1{,}75)$; $P_6(11|14^{11}/_{12})$.

(1) Zeit-Weg-Diagramm und die Zeit-Weg-Funktion

Wir erstellen zunächst einen Datenplot mit dem GTR und definieren hierzu unter >STAT [Edit] eine Liste X für die Zeit- und eine Liste Y für die Höhenwerte. Hierzu wird der Cursor auf den Namen L1 gesetzt und mittels >INS eine neue Liste ohne Namen kreiert, die sofort benannt wird. Anschließend wird die Plotfunktion Plot1 aktiviert:

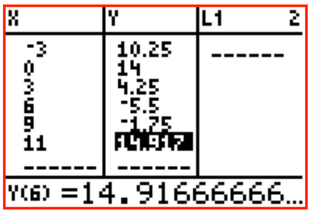

Abb. 1

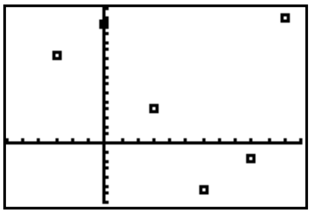

Abb. 2

Als Modell für die Abhängigkeit der Höhe von der Zeit soll hier eine Polynomfunktion dritten Grades angenommen werden. Der GTR bietet hier aus dem Hauptbildschirm (HBS) unter >STAT >CALC [CubicReg] die Regressionsfunktion CubicReg ***L***X, ***L***Y, Y1 an:

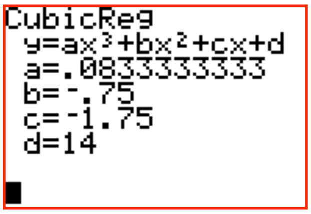

Abb. 3

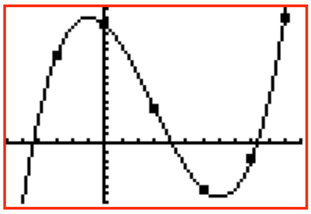

Abb. 4

Andererseits liefert der Ansatz der allgemeinen Polynomfunktion dritten Grades bei Auswahl von z.B. der Punkte P_1, P_3, P_4 und P_5 ein lineares Gleichungssystem mit der erweiterten Matrix A, >MATRIX >Edit [A], deren Reduzierte Zeilenstufenform (>MATRIX >MATH [rref( ]) sich mittels rref(A) bestimmen lässt. Das lineare System ist erkennbar eindeutig lösbar und die Koeffizientenwerte der Regression werden hier exakt bestätigt.

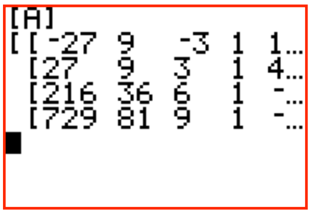

Abb. 5

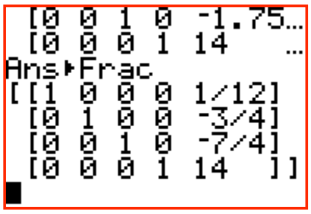

Abb. 6

Insgesamt ergibt sich damit die Weg-Zeit Funktion f mit

$$y = f(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{4}x + 14$$

(y in 10m, x in min) die unter Y1 abgespeichert wird.

(2) Die Vertikalgeschwindigkeit

gerät ins Blickfeld! Hierzu wird man die Höhenänderungen zu den entsprechenden Zeitänderungen ins Verhältnis setzen wollen. Eine <u>mittlere Änderungsrate</u> (Sekantensteigung) soll zu jeder ganzzahligen Minute bestimmt werden und führt zu einer <u>mittleren Geschwindigkeit</u>. Wir verwenden den symmetrischen Differenzenquotienten

$$m_S = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

in der Liste ***L***MS und können in der Variablen H die Intervallbreite steuern. Eine Umrechnung der Einheiten liefert dann die mittleren Steiggeschwindigkeiten in km/h in der Liste ***L***VM.

Wir steigern die Genauigkeit der mittleren Geschwindigkeit, in dem Δx=2h und damit auch Δy verkleinert werden:

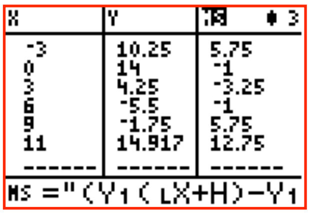

Abb. 7: **H=3**

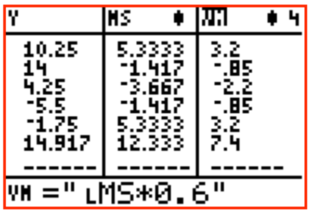

Abb. 8: **H=2**

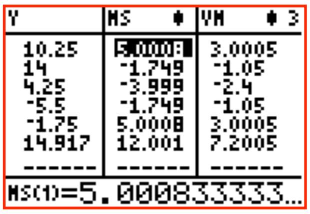

Abb. 9: **H=0,1**

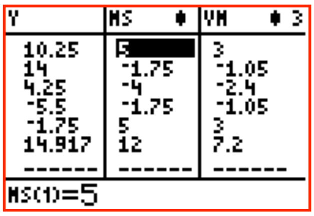

Abb. 10: **H=0,00001**

Für hinreichend kleines h ändern sich die Werte für die <u>mittlere Änderungsrate</u> im Rahmen der Rechengenauigkeit nicht mehr. Aus der *mittlere Änderungsrate (mittlere Steiggeschwindigkeit)* wird die <u>lokale Änderungsrate</u> (Momentangeschwindigkeit).

Die Weg-Zeit-Funktion und die Momentangeschwindigkeiten sollen in Beziehung gebracht werden. Hierzu definieren den Plot2 für die Momentangeschwindigkeiten:

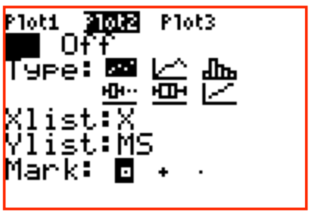

Abb. 11

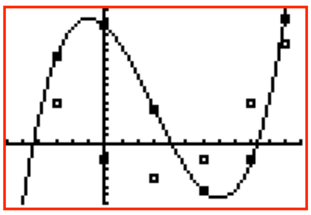

Abb. 12

aus: TI Nachrichten **1** / 08

Der nahe liegende Gedanke, eine Funktion für die lokale Änderungsrate herzustellen, lässt sich wieder über einen Regressionsansatz oder über ein lineares Gleichungssystem realisieren. Anschaulich bietet die Graphik der lokalen Änderungsraten einen quadratischen Funktionsansatz an:

[QuadReg ***L***X, ***L***MS, Y2] liefert die Geschwindigkeits-Zeit-Funktion f' mit

$$y = f'(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{7}{4},$$

(y in 10m/min und x in min), die unter Y2 abgespeichert wurde.

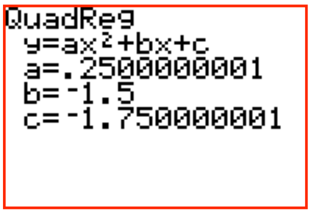

Abb. 13

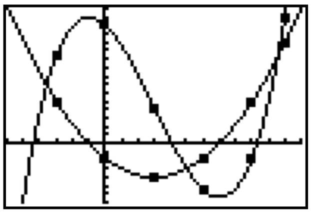

Abb. 14

Verschiedene Möglichkeiten der Weiterführung sollen hier nur angedeutet werden: Es kann der algebraische Zusammenhang zwischen der Weg-Zeit-Funktion f und der Geschwindigkeits-Zeit-Funktion f' untersucht werden; den Ausgangspunkt können die Terme in Y1 und Y2 (Abb. 15) und die Vermutungen der Schülerinnen und Schüler sein (vgl. Abb. 14). Im beschriebenen Kontext ist darüberhinaus die Frage relevant, wann bzw. wo die lokale Änderungsrate Null bzw. maximal ist oder wo ein bestimmter vorgegebener Geschwindigkeitswert erreicht wird.

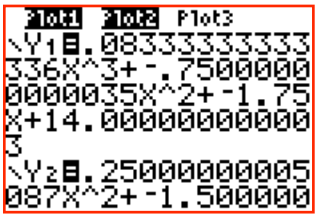

Abb. 15

Aufgabe:
Bestimmen Sie alle Punkte im Graphen der Weg-Zeit-Funktion f, an denen die lokale Änderungsraten (also die Momentangeschwindigkeit) gleich null ist! Für diese Fragestellung eignet sich die Nullstellenfunktion >CALC [zero]. Die gewünschten Ergebnisse sind nun mit den Cursor-Tasten (Up/Down) abrufbar.

Aufgabe:
Bestimmen Sie alle Punkte der Weg-Zeit-Funktion f, an denen die Sinkgeschwindigkeit maximal ist! Für diese Fragestellung eignet sich die Minimum-Maximum-Funktion >CALC [minimum].

Aufgabe:
Bestimmen Sie alle Punkte der Weg-Zeit-Funktion, an denen eine Geschwindigkeit von +0,5 m/s vorliegt. Jetzt darf auf >CALC [intersect] zurückgegriffen werden, die Cursor-Tasten machen den Rest zugänglich.

(3) Beschleunigung:

Wahrscheinlich rumort der Physikunterricht in den Köpfen der Schülerinnen und Schüler, naheliegend ist die Frage nach der lokalen Änderungsrate der Geschwindigkeit, also nach der Beschleunigung.

Hierzu wird die Liste ***L***AM definiert und nach gleichem Strickmuster wie ***L***MS gestaltet. Wiederum wird die Intervallbreite Δx=2h möglichst klein gewählt. Wird nun Plot3(***L***X, ***L***AM) aktiviert, so erhalten wir im Display:

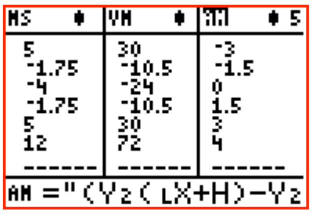

Abb. 16

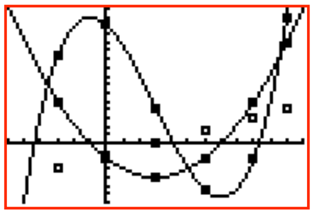

Abb. 17

Der vermutete lineare Zusammenhang lässt sich mit LinReg(ax+b) ***L***X, ***L***AM, Y3 sowohl grafisch als auch rechnerisch (nach dem vermuteten algebraischen Zusammenhang) bestätigen:

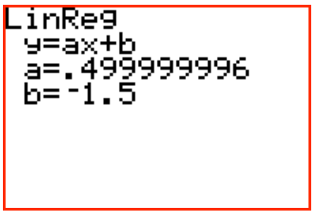

Abb. 18

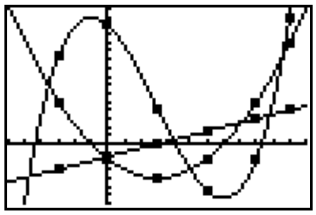

Abb. 19

Insgesamt ergibt sich die <u>Beschleunigungs-Zeit-Funktion</u> f'' mit

$$y = f''(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x$$

(y in 10m/min^2 und x in min), die unter Y3 abgespeichert wird.

In einer weiteren Liste ***L***A kann nun noch die Beschleunigung in m/s^2 berechnet werden.

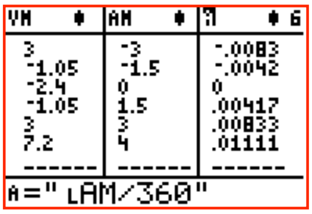

Abb. 20

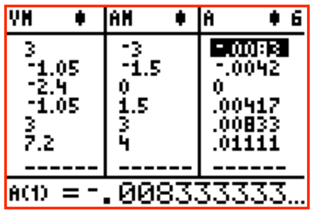

Abb. 21

Aufgabe:
In welchem Punkt des Graphen der Weg-Zeit-Funktion ist die Beschleunigung gleich null? Welche Geschwindigkeit liegt hier vor?

Aufgabe:
In welchen Punkten des Graphen der Weg-Zeit-Funktion beträgt die Beschleunigung

$$a_1 = -\frac{1}{360}\frac{m}{s^2} \text{ bzw. } a_1 = -\frac{1}{90}\frac{m}{s^2} \text{ bzw. } a_1 = \frac{1}{144}\frac{m}{s^2}?$$

Welche Geschwindigkeiten liegen hier vor?

Autor:
Karl-Heinrich Braun, Stadthagen (D)
BBS Stadthagen
ckh-braun@t-online.de