TI-nspire™ CAS

ISO/DIN-Papierformate
Von: Michael Roser
Schulstufe: Sekundarstufe I/II (7-8 Jahre)
Fach: Mathematik (Geometrie)
Benötigte Zeit: 60 Minuten

Ziele

- Masse, Proportionen und geometrische Eigenschaften der ISO/DIN-Papierformate kennenlernen.
- Die spezielle Eigenschaft und den praktischen Nutzen erkennen, die die Flächenhalbierung unter Beibehaltung der Proportionen hat.
- Die Masse der ISO/DIN-Papierformate als geometrische Folge und die der Zwischenformate als geometrisches Mittel erkennen und berechnen können.

Voraussetzungen

Die Lernenden

- haben Grundkenntnisse in der Handhabung des TI-nspire, insbesondere der Graphik&Geometrie- und der List&Spreadsheet-Umgebung.
- kennen die Eigenschaften geometrisch ähnlicher Figuren, der geometrischen Folgen und des geometrischen Mittels.
- können mit Potenzen und Wurzeln umgehen.

Aufgaben

1. Aus dem Papierformat A3 erhält man durch Halbieren das Format A4. Das Format A5 entsteht durch das gleiche Verfahren aus dem Format A4.

   a) Messen Sie die Länge und Breite der drei obengenannten ISO/DIN A-Formate. In welchem Verhältnis steht die Länge zur Breite? Wie gross ist die Fläche? Welche geometrischen Eigenschaften haben jeweils zwei benachbarte Formate?

   b) Das Format ISO/DIN A0 hat eine Fläche von 1 m^2. Wie gross ist die Länge und Breite dieses Formats? Berechnen Sie daraus die Masse der Formate A1 bis A10 in einer Tabelle.

2. a) Aus der ISO/DIN A-Reihe leitet sich die B-Reihe ab: Das Mass der B-Reihe ist das geometrische Mittel aus dem Mass des entsprechenden und dem des nächst grösseren A-Formats, d. h. es ist grösser als das entsprechende A-Format, jedoch kleiner als das nächst grössere A-Format. Berechnen Sie die so definierten Masse der Formate B0 bis B10.

   b) Das ISO/DIN C-Format wird vor allem für Umschläge für Briefe des A-Formats verwendet. Die Masse dieses C-Formats sind jeweils das geometrische Mittel des entsprechenden A- und B-Formates. Berechnen Sie die Masse der Formate C0 bis C10.

   c) Wie gross sind die beiden Faktoren, mit Hilfe derer aus einem A-Format, die Masse des entsprechenden B-, resp. des C-Formates berechnet werden können?

   d) Um wie viel Prozent sind die Umschläge (Format C) jeweils grösser als die entsprechenden Papiere im A-Format?

Mögliche Lösung

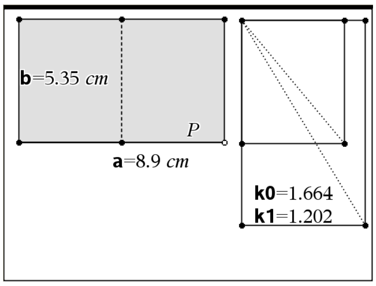
1. a) Die gemessenen Werte werden in einer Tabelle zusammengestellt und damit die Fläche und das Seitenverhältnis der ISO/DIN A3-, A4- und A5-Formate berechnet. Obwohl die aus den Messwerten berechneten Grössen mit Fehlern behaftet sind, weisen sie auf einen konstanten Wert hin.

	A	B l_	C b_	D are...	E ratio_l
◆				=l_*b_	=l_/b_
1	ISO A..	42.	29.7	1247.	1.414
2	ISO A..	29.7	21.	623.7	1.414
3	ISO A..	21.	14.8	310.8	1.419
4					
5					
6					

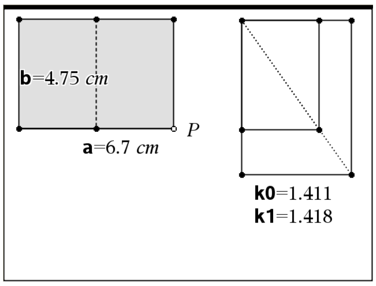
E3 =1.4189189189189

Welche Proportionen muss ein Rechteck haben, damit die durch die Halbierung entstehenden Rechtecke dasselbe Seitenverhältnis haben wie das ursprüngliche?

Mit folgender Konstruktion kann dies interaktiv durch Ziehen des Eckpunktes P nachvollzogen und angenähert werden:



Ein beliebiges Rechteck wird durch die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der Längsseiten halbiert. Daneben werden das ursprüngliche und das durch die Halbierung entstandene Rechteck mit einem gemeinsamen Eckpunkt mittels Massübertragung (Compass) konstruiert. Durch die Wahl des entsprechenden Attributs sind die Hilfslinien dieser Konstruktion nicht sichtbar. Die Verhältnisse *Länge : Breite* werden durch die beiden Faktoren *k0* und *k1* mittels Längenmessung der Strecken berechnet.



b) Die Halbierung der Fläche bei gleichbleibendem Seitenverhältnis wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$\frac{k \cdot x}{x} = \frac{x}{\frac{k \cdot x}{2}}$$

Dabei ist der Faktor *k* unabhängig von der Rechtecksbreite *x*. Durch die Fläche des Formates A0 und die Proportionen der Seiten des Rechtecks lassen sich die Länge und Breite des Formates A0 symbolisch und numerisch berechnen.

$area0:=10000$	10000
$\text{solve}\left(\frac{k\cdot x}{x}=\frac{x}{\frac{k\cdot x}{2}},k\right)\Big\vert k>0$	$k=\sqrt{2}$
$k:=\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$l0:=b0\cdot k$	$b0\cdot\sqrt{2}$
$\text{solve}(b0\cdot l0=area0,b0)\vert b0>0$	$b0=50\cdot 2^{\frac{3}{4}}$
$b0:=\text{right}(\text{solve}(b0\cdot l0=area0,b0)\vert b0>0)$	$50\cdot 2^{\frac{3}{4}}$
$l0$	$100\cdot 2^{\frac{1}{4}}$
$b0$	$50\cdot 2^{\frac{3}{4}}$
$l0$	118.9
$b0$	84.09

6/10

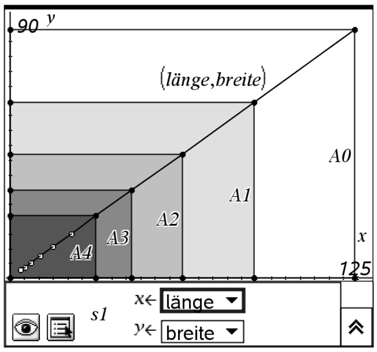
Ausgehend von den Dimensionen des Formates A0 und dem Faktor *k* lassen sich daraus die Formate A1 bis A10 berechnen.

	A din	B breite	C län...	D fläche
◆				=länge*breit
1	a0	84.09	118.9	10000.
2	a1	59.46	84.09	5000.
3	a2	42.04	59.46	2500.
4	a3	29.73	42.04	1250.
5	a4	21.02	29.73	625.
6	a5	14.87	21.02	312.5

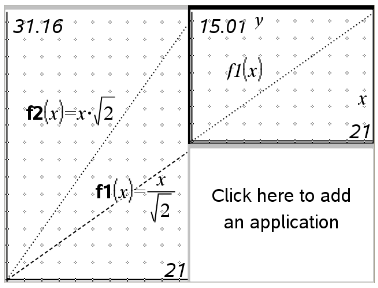
D **fläche**:=**länge·breite**

Mittels Scatter-Plot der Punkte, deren Koordinaten die Länge und Breite der DIN-A-Formate repräsentieren, lassen sich diese Formate direkt darstellen. Die Plot-Punkte bilden eine Gerade. Ihre Funktionsgleichung lautet:

$$f(x) = k \cdot x \text{ mit } k = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Interessanterweise entsprechen die Dimensionen des Bildschirms des Nspire-Handheld näherungsweise ebenfalls dem Verhältnis $1:\sqrt{2}$. Durch die Aufteilung des Seitenlayouts in mehrere Applikationen wird dadurch näherungsweise wieder dasselbe Seitenverhältnis bei den einzelnen Applikationsfenstern erreicht.



2. a) Mit dem Faktor *ka* wird die Länge *la0* des Formates A0 exakt berechnet. Das geometrische Mittel aus *la0* und *la_1* (= Länge des theoretisch nächst grösseren Formates DIN-A(-1)) ergibt die Länge *lb0* des Formates B0.

$ka:=\sqrt{2}$ → $\sqrt{2}$

$la0:=\text{right}\left(\text{solve}\left(10^4=x\cdot\frac{x}{\sqrt{2}},x\right)\right)\mid x>0$ → $100\cdot 2^{\frac{1}{4}}$

$la\_1:=la0\cdot ka$ → $100\cdot 2^{\frac{3}{4}}$

$lb0:=\sqrt{la0\cdot la\_1}$ → $100\cdot\sqrt{2}$

4/99

In der Tabelle bilden nun die numerischen Näherungswerte von *la0* und *lb0* die Startwerte der geometrischen Folgen für die Längen der DIN A- und DIN B-Formate.

	A din_la	B din_lb	C n	D	E
◆					
1	118.9	141.4	0		
2	84.1	100.	1		
3	59.5	70.7	2		
4	42.1	50.	3		
5	29.8	35.4	4		
6	21.1	25.1	5		

A1 =round(**la0**)

b) Die C-Formate lassen sich nun als geometrisches Mittel der entsprechenden A- und B-Formate berechnen. Dabei werden die Werte der in der oberen Tabelle generierten Listen *din_a* und *din_b* verwendet.

	A din_lc	B n	C	D	E	F
◆	=round(√					
1	129.7	0				
2	91.7	1				
3	64.9	2				
4	45.9	3				
5	32.5	4				
6	23	5				

A **din_lc**:=round(√(**din_la·din_lb**,1)

c) Die Faktoren *kb* und *kc* lassen sich als geometrische Mittel berechnen. Dabei können die Potenzgesetze hier hilfreich sein, um das Resultat nachvollziehen zu können.
Nebst den exakten Werten interessieren aber auch die numerischen Näherungswerte von *kb* und *kc*.

$kb:=\sqrt{ka\cdot 1}$	$2^{\frac{1}{4}}$
$kb=\sqrt[4]{2}$	true
kb	1.189
$kc:=\sqrt{kb\cdot 1}$	$2^{\frac{1}{8}}$
$kc=\sqrt[8]{2}$	true
kc	1.091

6/99

d) Mit *din_a(n)*, *din_b(n)* und *din_c(n)* werden Funktionen für die Dimensionen der entsprechenden Formate definiert. Dabei ist beispielsweise *la(n+1)* die zur Länge *la(n)* gehörige Breite. Damit lassen sich die entsprechenden Flächenfunktionen definieren.

$la(n):=\frac{la0}{ka^{n}}$	*Done*
$lb(n):=la(n)\cdot kb$	*Done*
$lc(n):=la(n)\cdot kc$	*Done*
$din\_a(n):=[la(n+1)\quad la(n)]$	*Done*
$din\_b(n):=[lb(n+1)\quad lb(n)]$	*Done*
$din\_c(n):=[lc(n+1)\quad lc(n)]$	*Done*
$area\_a(n):=la(n)\cdot la(n+1)$	*Done*
$area\_b(n):=lb(n)\cdot lb(n+1)$	*Done*
$area\_c(n):=lc(n)\cdot lc(n+1)$	*Done*

9/99

$din\_a(3)$	$\left[25\cdot 2^{\frac{1}{4}}\quad 25\cdot 2^{\frac{3}{4}}\right]$
$din\_a(3)$	$[29.73\quad 42.04]$
$din\_b(7)$	$\left[\frac{25\cdot\sqrt{2}}{4}\quad \frac{25}{2}\right]$
$din\_b(7)$	$[8.839\quad 12.5]$

4/99

In der Liste ist erkennbar, dass das Flächenverhältnis der A- und C-Formate offensichtlich dem Faktor *kb* entspricht. Dies lässt sich mit wenigen Schritten auch allgemein nachvollziehen.

	A ar_a	B n	C ar_c	D r_area
◆	=round(are	=seq(	=round(are	=round(are
1	1.E4	0	1.189E4	1.189
2	5000.	1	5946.	1.189
3	2500.	2	2973.	1.189
4	1250.	3	1487.	1.189
5	625.	4	743.3	1.189
6	312.5	5	371.6	1.189

C1 =11892.1

Daraus folgt unabhängig von *n*, dass Umschläge des C-Formats, immer rund 19% grösser sind als die Briefe des entsprechenden A-Formats.

$$\frac{area\_c(n)-area\_a(n)}{area\_a(n)}\cdot 100|n=3 \qquad 100\cdot\left(2^{\frac{1}{4}}-1\right)$$

$$\frac{area\_c(n)-area\_a(n)}{area\_a(n)}\cdot 100|n=\{3,7\} \qquad \{18.92,18.92\}$$

2/99

Dass ein C-Couvert knapp 20% grösser ist als das entsprechende A-Format, erscheint auf den ersten Blick sehr grosszügig zu sein. Andererseits ist damit gewährleistet, dass beispielsweise ein A3-Papier, das dreimal gefaltet wurde und somit achtmal so dick ist, auch noch gut in einem C6-Couvert Platz findet.

