Spline-Interpolation mit dem Voyage™ 200 und dem TI-84 Plus

Jürgen Enders

1. Vorbemerkungen

Der Begriff *Spline* hat seinen Ursprung im englischen Schiffbau, wo eine *dünne Latte* (*Spline*) verwendet wurde, um die optimale Form gekrümmter Bauteile anhand bestimmter Fixpunkte zu bestimmen. Dieses Verfahren wurde später auch im Straßenbau verwendet, wo ein *elastisches Lineal* durch *Haltenasen* fixiert wurde. Dadurch wurde es gezwungen, die Linie geringster Krümmung (*Biegelinie*) einzunehmen und stellte so die Trassierung der Straße dar. Das Verfahren konnte dann auch auf *Biegeflächen* hin erweitert werden.

Es geht also darum, durch eine bestimmte Anzahl von Punkten eine Kurve zu legen, die möglichst glatt durch sie hindurchgeht. Stützpolynome lösen diese Aufgabe nur bedingt, da oft große Krümmungen entstehen bzw. die Kurve zu Oszillationen neigt.

Stattdessen bestimmt man eine aus mehreren Polynomen zusammen gesetzte Kurve, die *Splinefunktion*. Geht man davon aus, dass die Krümmung insgesamt möglichst klein sein soll, so kann man mit außerschulischen Mitteln zeigen, dass die Teilpolynome höchstens vom Grade 3 sein müssen. Damit reduziert sich die ursprüngliche Aufgabe darauf, zu jedem Intervall, das durch 2 benachbarte Stützstellen gebildet wird, ein solches Polynom zu bestimmen. Treffen zwei Polynome an einer Stützstelle aufeinander, so muss die zusammengesetzte Funktion dort *stetig*, *differenzierbar* und von *gleicher Krümmung* sein. An den Randpunkten ist der Spline keinen Kräften unterworfen; die über die Randpunkte hinaus verlaufenden Teile des Splines sind geradlinig und haben die Krümmung 0. Solche Splines bezeichnet man auch als *natürliche Splines*.

Jedes Teilpolynom hat die Form

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \ .$$

Bei n+1 Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ muss man also 4n Koeffizienten bestimmen. Die Bedingungen dafür lauten

- bei einer inneren Stützstelle:

$$\begin{aligned} p_k(x_k) &= y_k \\ p_{k+1}(x_k) &= y_k \\ p_k'(x_k) &= p_{k+1}'(x_k) \\ p_k''(x_k) &= p_{k+1}''(x_k) \end{aligned}$$

- und für die Randpunkte:

$$\begin{aligned} p_1(x_0) &= y_0 \\ p_1''(x_0) &= 0 \\ p_n(x_n) &= y_n \\ p_n''(x_n) &= 0 \end{aligned}$$

Ergebnis ist ein LGS mit 4n Zeilen und 4n+1 Spalten, das sich mit dem Voyage™200 bzw. dem TI-84 Plus lösen lässt, wenn es eine gewisse Größe nicht überschreitet. Mit diesen Lösungen lassen sich die Teilpolynome im [Y=]-Editor aufstellen und dann als stückweise definierte Funktionen zur Spline-Funktion verbinden.

Das Aufstellen der Bedingungen, die Übertragung in eine schnell unübersichtliche Matrix und dann die Übernahme in den [Y=]-Editor sind zeitraubende, fehleranfällige Vorgänge. Rundungen können sich bei der Übernahme in den [Y=]-Editor verhängnisvoll auswirken!

Da die Struktur der Spline-Berechnung jedoch festgelegt ist, kann man sie durch ein Programm ausführen lassen, das als Eingabe lediglich die Punktkoordinaten benötigt. Daraus berechnet es die Spline-Funktion und stellt sie zusammen mit den Stützpunkten grafisch dar. Damit ist man in der Lage, verschiedene Punktverteilungen schnell untersuchen und bewerten zu können. Da spezifische Elemente des CAS vom Voyage™ 200 nicht benötigt werden, lässt sich das Programm auch auf einem TI-84 Plus ausführen.

2. Erläuterungen zu den Programmen

a. Voyage™ 200

Das Programm heißt „`spline2()`“. Nach dem Start gibt man die Anzahl der Punkte ein (maximal 5) und anschließend ihre Koordinaten, die in den Listen `xp` und `yp` gespeichert werden; im Beispiel wurde A(2|2), B(4|1) und C(6|4) verwendet (vgl. Abb.1 und Abb.2). Bei mehr Punkten muss das Programm erweitert werden bzw. mehrere Splines müssen aneinander gehängt werden.

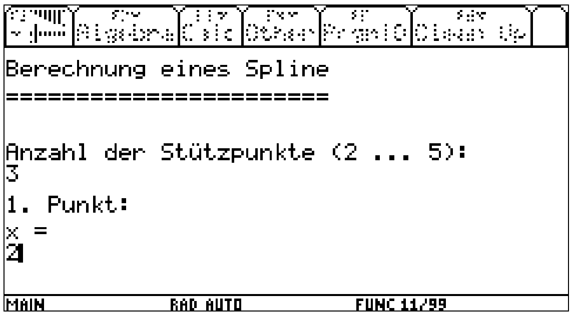

Abb. 1

Das Programm stellt dann aus den Bedingungen die Matrix „`spl`“ auf. Sie wird anschließend in die Diagonalform umgewandelt zur Lösungsmatrix „`spl2`“. Dann werden die Teilpolynome auf `y11(x)` bis `y14(x)` erzeugt. Zum Schluss wird das Grafikfenster eingestellt, und die Punkte und Teilpolynome werden geplottet (Abb. 2).

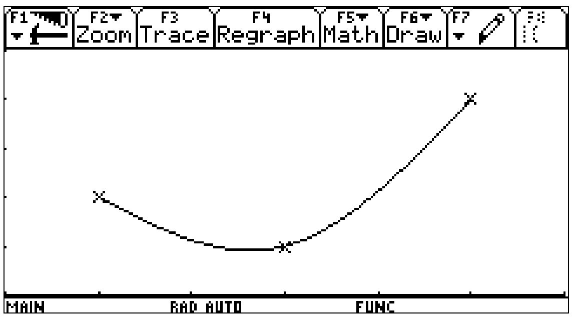

Abb. 2

Mit den 5 Punkten A(2|2), B(4|1), C(6|4), D(9|5) und E(10|3) benötigt der Voyage™ 200 für die Berechnung 30 Sekunden und für das Zeichnen 5 Minuten (Abb. 3).

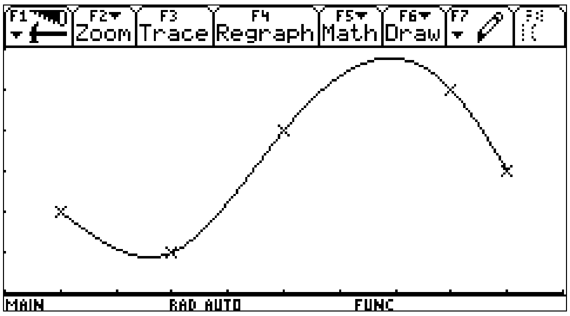

Abb.3

3. TI-84 Plus / Silver Edition

Das Programm für den TI-84 Plus heißt SPLINE2 und ist fast mit dem für den Voyage™ 200 identisch, abgesehen von ein paar Änderungen wegen der anderen Syntax. Die Matrizen heißen [A] und [B], xp wird zu L_1, yp zu L_2 und die Teilpolynome sind in y1, …, y4 gespeichert.

Zu Anfang wird man wieder aufgefordert, die Anzahl der Punkte einzugeben, anschließend ihre Koordinaten (Abb. 4). Das Ergebnis der Berechnung zeigt Abb. 5.

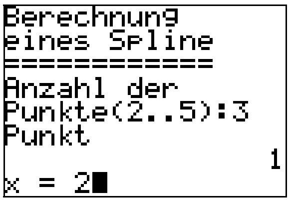

Abb. 4

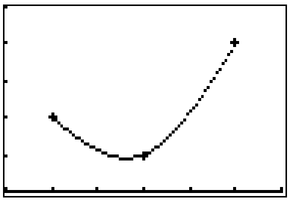

Abb. 5

Mit denselben 5 Punkten wie oben benötigt der TI-84 Plus Silver Edition für die Berechnung lediglich 3 Sekunden und für das Zeichnen nur 25 Sekunden (Abb. 6) - hier kann man also im Minutenabstand neue Berechnungen durchführen!

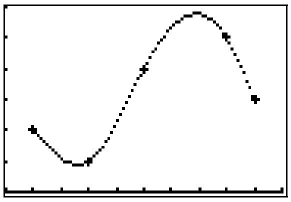

Abb. 6

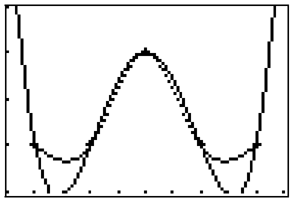

Abb. 7

Bei 5 Punkten könnte man auch ein Polynom vom Grade 4 verwenden, das sich mit dem Regressionsmodul schnell erstellen lässt. Abb. 7 zeigt den Unterschied in den Methoden, denn das Polynom (geht über die Randpunkte hinaus) schwingt im Vergleich zum Spline viel stärker durch und weist somit eine deutlich höhere Krümmung auf.

3. Download

Die Programme können zusammen mit diesem Artikel aus dem Internet heruntergeladen werden: Folgen Sie dem Link *Materialien* auf der TI-Webseite.

Der Autor:
Jürgen Enders
E-Mail: aj.enders@t-online.de