

Beispiele zum Einsatz des TI-84 Plus in der Analysis

Vorbemerkung: Dieser Artikel stellt keine Unterrichtseinheit vor und bildet daher auch keinen Unterricht ab. Es ist vielmehr beabsichtigt, die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten des TI-84 Plus im Analysis Unterricht aufzuzeigen und für die klassischen Problemstellungen an einfachen Beispielen darzustellen.

1. Grundkenntnisse

Im MATH-Menü gibt es die Funktion

$$\text{nDeriv}(\text{Ausdruck}, \text{Variable}, \text{Wert} [, \varepsilon]).$$

Sie liefert die genäherte numerische Ableitung des *Ausdrucks* bezüglich der angegebenen *Variablen* und dem *Wert* für diese Variable, also die Sekantensteigung für ein 2ε -Intervall. Die Angabe des Intervalls ist dabei optional. Als *Ausdruck* wurde in den folgenden Beispielen der Funktionsterm $0,2x^3 + 3$ verwendet.

Die Sekantensteigungsfunktion lässt sich gut darstellen, wenn man im $\overline{\text{Y=}}$ -Editor für WERT ebenfalls den Namen der Variablen (also X) einsetzt (Abb. 1, Abb. 2).

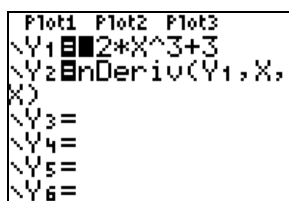


Abb. 1

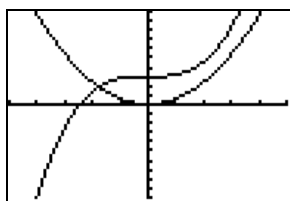


Abb. 2

Ferner gibt es im MATH-Menü die Funktion

$$\text{fnInt}(\text{Ausdruck}, \text{Variable}, \text{untere Grenze}, \text{obere Grenze} [, \text{Toleranz}])$$

Sie liefert den Wert des Integrals zum *Ausdruck* bezüglich der *Variablen* zwischen der *unteren* und der *oberen Grenze* mit der angegebenen *Toleranz* (optional).

Damit lässt sich eine Integralfunktion gut darstellen, wenn man für die untere Grenze einen festen Wert wählt (hier: $x_u = 0$) und für die obere Grenze die Variable X wählt. (Abb. 3, Abb. 4).

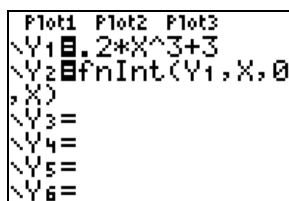


Abb. 3

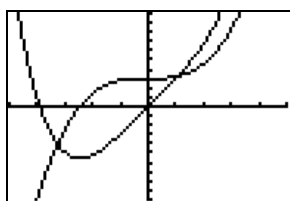


Abb. 4

Man erhält stets eine Nullstelle für $x = x_u$. Wählt man andere Werte für die untere Grenze, so ändert sich die Nullstelle und man bewirkt eine Verschiebung des Graphen der Integralfunktion in y-Richtung. In Abb. 5 sind Integralfunktionen zu den unteren Grenzen $x_u = -2,46; -1; 0; 2$ dargestellt ($x \approx -2,46$ ist die Nullstelle von $y_1(x)$).

Die Vertauschung von oberer und unterer Grenze bewirkt eine Spiegelung des Graphen an einer Geraden parallel zur

x-Achse. Die Abb. 6 zeigt die Integralfunktionen zu $x_u = 0$ und $x_o = X$ sowie $x_u = X$ und $x_o = 0$.

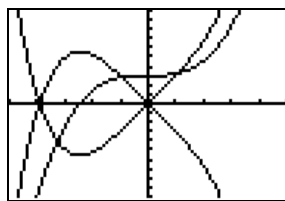


Abb. 5



Abb. 6

Bei Funktionen mit Polstellen kann es unangenehme Überraschungen geben, da hier sehr große Zahlen auftreten können, die den Rechenbereich des TI-84 Plus überschreiten. Im Grafik-Modus werden solche Fehlerzustände abgefangen, so dass die Grafik noch gezeichnet werden kann. Bei Berechnungen im Home-Bildschirm erhält man nach einer unverhältnismäßig langen Rechenzeit ggf. eine Fehlermeldung (z.B. ERROR: DOMAIN).

Die beiden Funktionen können überall dort in der Analysis eingesetzt werden,

- wo es nur auf einen Zahlenwert ankommt
- wo die Ermittlung einer Stammfunktion schwierig oder gar unmöglich ist
- wo Integrale oder Ableitungen Bestandteile einer Formel oder eines Funktionsterms sind.

2. Flächenberechnungen

Aufgabe 1: Bestimme den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^2 - 3$ und der x-Achse im Intervall $[-3;3]$.

Lösung: $y_1(x) = x^2 - 3$ und $y_2(x) = 0$ im $\overline{\text{Y=}}$ -Editor eingeben und zeichnen lassen, das Menü CALC ($\overline{2\text{nd}}$ |TRACE) anwählen, mittels 5:INTERSECTION die beiden Schnittstellen bzw. in diesem Fall die beiden Nullstellen bestimmen und notieren. Die Berechnung im Hauptbildschirm zeigt Abb. 7:

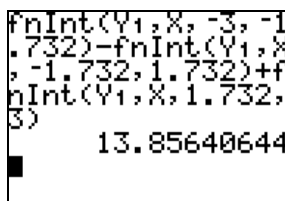


Abb. 7

Inhalte von Flächenstücken, die von 2 Funktionsgraphen eingeschlossen werden, lassen sich auf dieselbe Weise ermitteln.

3. Rotationsvolumen

Aufgabe 2: Bestimme in den Grenzen von 0 bis 2π das Volumen, das bei Rotation des Graphen der Funktion f mit $f(x) = 2 + \sin x$ um die x-Achse entsteht.

Lösung: Die Formel zur Berechnung von Rotationsvolumina ist bekanntlich:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Das kann man direkt so eingeben (Abb.8):

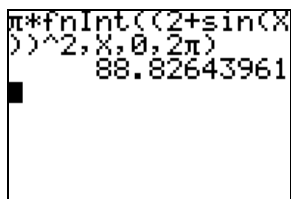


Abb. 8

X	Y2
1.911	44.27
1.912	44.297
1.913	44.324
1.914	44.351
1.915	44.379
1.916	44.406
1.917	44.433

Abb. 9

Aufgabe 3: Bei welcher Höhe ist der Rotationskörper zur Hälfte gefüllt?

Lösung: Man gibt die Formel (s.o.) in den \square -Editor ein, mit variabler oberer Grenze X, wählt in \square TblSet (\square 2nd)WINDOW) TblStart=0 und Δ Tbl=0.1 und lässt mit \square 2nd)GRAPH) die Tabelle anzeigen. Durch die Verfeinerung der Tabelle mit TblSet erhält man für x einen Wert zwischen 1,916 und 1,917 (Abb. 9).

4. Bogenlänge

Schon beim Rotationsvolumen ist es wegen der Quadratur schwierig, geeignete Funktionen zu finden, aber bei der Bogenlänge ist dies nahezu aussichtslos, denn die Formel lautet:

$$s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$$

Aufgabe 4: Wie lang ist eine Seitenlinie beim Rotationskörper von aus Aufgabe 2?

Lösung: Mit fnInt und nDeriv kann die Lösung numerisch direkt im Hauptbildschirm bestimmt werden (Abb. 10):

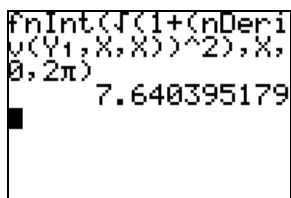


Abb. 10

5. Mantelfläche von Rotationskörpern (Rotation um die x-Achse)

Rotationsvolumen und Bogenlänge sind relativ leicht herzuleiten, deutlich schwieriger wird es bei der Mantelfläche von Rotationskörpern (Aufbau aus Kegelstumpf-Mänteln). Die Formel lautet:

$$M_x = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$$

Aufgabe 5: Wie groß ist die Oberfläche bei dem Rotationskörper aus Aufgabe 2?

Lösung: Die Formel im Hauptbildschirm kann einfach übernommen werden. Nach einer gewissen Zeit erhält man das Ergebnis (Abb. 11):

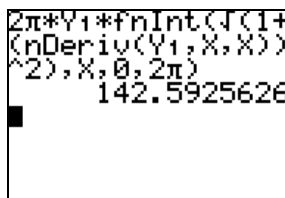


Abb. 11

6. Krümmung

Dazu benötigt man die 2. Ableitung, die sich angenähert aber als Ableitung der 1. Ableitung ebenfalls numerisch mit nDeriv ermitteln lässt.

Beispiel: Im \square -Editor können $Y_1(x) = x^3$ sowie $Y_2 = nDeriv(nDeriv(Y_1,X,X),X,X)$ definiert werden (Abb. 12):

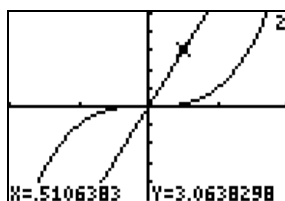


Abb. 12

Die Annäherung an $y_2'(x) = 6x$ ist sehr gut. Die Herleitung der Formeln für die Krümmung, den Radius des Krümmungskreises sowie dessen Mittelpunkt ist nicht einfach. Eine Herleitung findet sich z.B. in den TI-Nachrichten 2/01. Für den Berührungspunkt $P(x_0|y_0)$ lauten die Formeln für die Krümmung kr , den Krümmungskreisradius r_k und den Mittelpunkt $M(x_0|y_0)$:

$$kr(x_0) = \frac{f''(x_0)}{(1+(f'(x_0))^2)^{3/2}} \quad r_k = \left| \frac{1}{kr} \right|$$

$$x_M = x_0 - \frac{f'(x_0) \cdot (1+(f'(x_0))^2)}{f''(x_0)}$$

$$y_M = y_0 + \frac{1+(f'(x_0))^2}{f''(x_0)}$$

Der \square -Editor sollte so vorbereitet werden, dass $y_1(x)$ die Funktion selbst ist, $y_2(x)$ ihre 1. und $y_3(x)$ ihre 2. numerische Ableitung (Abb. 13). $y_4(x)$ ist dann die Krümmungsfunktion.

Trotz der komplexen Formeln liefert der TI-84 Plus hier recht schnell Ergebnisse und man erhält die Ab. 14:

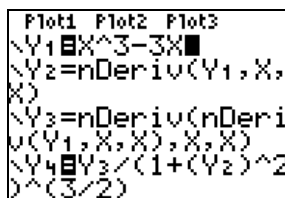


Abb. 13

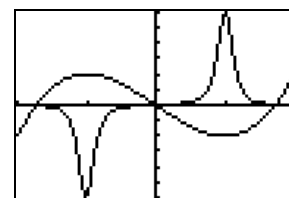


Abb. 14

Die Extremstellen der Krümmungs- und der Ausgangsfunktion fallen in der Regel nicht zusammen, erwartungsgemäß ist aber die Krümmung im Wendepunkt (0|0) Null und im relativen Maximum negativ (Rechtskrümmung) bzw. im relativen Minimum positiv (Linkskrümmung). Da bei der Krümmungsfunktion der Nenner stets größer oder gleich Null ist, wird dieses Verhalten ausschließlich durch den Zähler und damit die 2. Ableitung der Funktion verursacht. Es reicht also aus, das

Vorzeichen der 2. Ableitung zur Bestimmung des Krümmungsverhaltens zu verwenden.

```

Y4(.5)
.2009759595
1/Y4(.5)
4.975719495
Y1(.5)
-1.375

```

Abb. 15

```

.5-(Y2(.5)*(1+(Y1(.5))^2)/Y3(.5))
5.046869604
Y1(.5)+(1+(Y2(.5))^2)/Y3(.5)
.6458318333

```

Abb. 16

Im Punkt $P(0,5|-1,375)$ hat die Krümmung den Wert $kr \approx 0,20$ und der Radius des Krümmungskreises ist $r_k \approx 4,98$ LE (Abb. 15). Die gerundeten Mittelpunktskoordinaten sind $M(5,05|0,65)$ (Abb. 16).

Autor:

Jürgen Enders, Hameln (D)
Humboldt-Gymnasium Bad Pyrmont
aj.enders@t-online.de