

# Eine Unterrichtseinheit zur Herleitung der Flächeninhaltsfunktion

Norbert Frost

Der Einstieg wurde zunächst an die „Amalgamaufgabe“ (nach einer Idee von S. Stachniss-Carp, vgl. z.B. [1]) angelehnt.

Amalgamfüllungen können zur Quecksilberbelastung des menschlichen Körpers führen. Manche Zahnärzte vertreten die Ansicht (These 1), die Quecksilberausscheidung sei gleich bleibend und unabhängig von der Menge der vorhandenen Füllungen. Demgegenüber steht die These 2, dass die Quecksilberausscheidung von der Menge der Amalgamfüllungen abhängig sei.

Zur wissenschaftlichen Untersuchung der Belastung wurde vor und nach der Entfernung der Füllungen über einen Zeitraum von 6 Monaten die Menge des über den Urin ausgeschiedenen Quecksilbers (Hg) gemessen:

Zeit in Tagen	0	2	30	60	90	120	150	180
Hg in µg/Tag	3,5	3,2	2,4	1,8	1,2	0,8	0,5	0,4

## 1. Teil: Arbeitsaufträge

- Stellen Sie die Daten graphisch dar und schätzen Sie die gesamte ausgeschiedene Quecksilbermenge unter Beachtung der beiden genannten Thesen ab. Geben Sie geeignete Näherungswerte für die Menge an.
- Bestimmen Sie zur Annäherung der Daten eine geeignete Ausgleichsgerade. Bewerten, vergleichen und verbessern sie Ihre Ergebnisse unter Berücksichtigung der Lösungen zu a).
- Welche insgesamt ausgeschiedene Menge ergibt sich, falls man zur Annäherung andere optimierte Regressionsfunktionen entwickelt?

### Lösungen zu a)

Gemäß These 1 ergibt sich die Menge  $M_1 = 180 \cdot 3,5 = 630$ . These 1 wird von den Schülern sehr schnell verworfen, liefert aber die ersten Ideen zur Flächenberechnung und zur Bestimmung eines Näherungswertes.

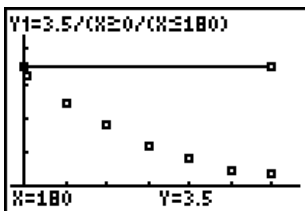


Abb. 1

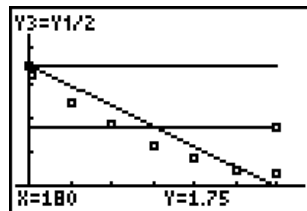


Abb.2

Eine erste Abschätzung zu These 2 könnte zunächst so aussehen:  $M_2 = (180 \cdot 3,5) : 2 = 315 = 180 \cdot 1,75$ . Dabei kann sowohl über die Diagonale in Dreiecke, als auch über die waagerechte Teilung des Ausgangsrechtecks (Vorbereitung des Mittelwertsatzes) argumentiert werden. Die Qualität der Näherungslösung wird im Unterricht diskutiert; ein verbesserter kleinerer Wert wird erwartet.

### Lösungen zu b)

Die mit dem GTR ermittelte Ausgleichsgerade (b1) (vgl. Abb. 3 u. 4) stellt die Schüler nicht zufrieden, eine weitere von Hand angepasste Geradengleichung (b2) wird ermittelt und in beiden Fällen wird die Gesamtmenge an Quecksilber berechnet. Als Problem bei (b1) stellt sich, dass die Achsen-schnittpunkte ungeeignet sind, der Funktionswert bei  $x = 180$  ist sogar negativ. Mit den Ergebnissen aus Abb. 3 und Abb. 4 ergibt sich:  $M_3 = (309 \cdot 178,78) : 2 = 276,22$

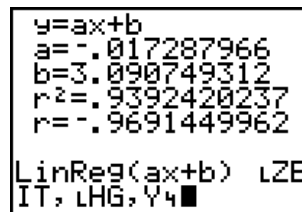


Abb. 3

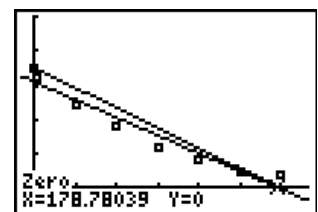


Abb. 4

Im Zusammenhang mit der vom GTR berechneten Regressionsgleichung werden auch die Bedeutungen des Bestimmtheitsmaßes  $r^2$  und des Korrelationskoeffizienten  $r$  diskutiert. Die von Hand berechneten Geradengleichungen zu (b2),

$$y_1 = -\frac{3,5}{180}(x-180) \text{ bzw. } y_2 = -\frac{3,1}{180}(x-180)+0,4$$

passen zwar an den Rändern, liefern aber noch schlechtere Näherungswerte der gesamten Quecksilbermenge, da die Datenpunkte insgesamt schlechter angenähert werden.

### Lösungen zu c)

(Hausaufgabe) Mit dem GTR werden verschiedene Ausgleichsfunktionen ermittelt, mit den Datenpunkten verglichen, auf Genauigkeit überprüft und im Zusammenhang mit der realen Situation analysiert.

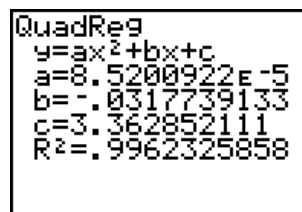


Abb. 5

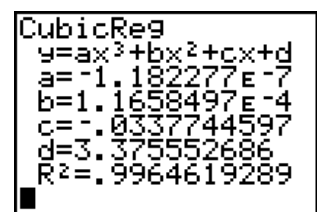


Abb. 6

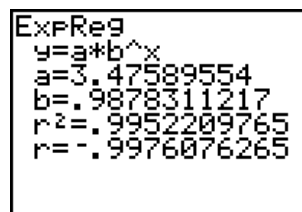


Abb. 7

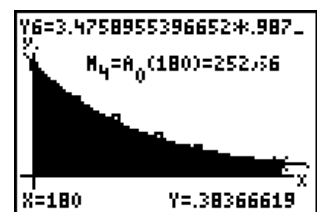


Abb. 8

Aufgrund der graphischen Verläufe werden quadratische und kubische Funktionen zur Modellierung verworfen, als Modell für die Realität wird die Exponentialfunktion ausgewählt. Da die Flächenberechnung nicht explizit gelingt, wird das GTR-Modul  $\int f(x)dx$  (2nd Calc) als Blackbox - ohne weitere Dis-

kussion der Symbolik und der Hintergründe - benutzt, um den abgebildeten Näherungswert zu bestimmen.

### 2. Teil Trapezsummenmethode

Zielsetzung: Das benutzte Modul soll hinterfragt werden, eine eigenständige Handrechnung soll einen Näherungswert der Quecksilbermenge liefern.

Nach kurzer Diskussion entschließen sich die Schülerinnen und Schüler für die näherungsweise Berechnung der Fläche zur „Trapezsummenmethode“ auf der Basis der Tabellendaten. Die Flächeninhalte und die Summe werden sowohl von Hand als auch mit dem GTR ermittelt.

A	C	H	S
3.2	3.5	2	
2.4	3.2	28	
1.8	2.4	30	
1.2	1.8	30	
.8	1.2	30	
.5	.8	30	
.4	.5	30	
H=(2, 28, 30, 30, 3...			

Abb. 9

```
(LA+LC)/2*LH
(6.7 78.4 63 45...
sum((LA+LC)/2*LH
)
256.1
```

Abb. 10

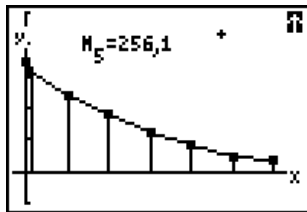


Abb. 11

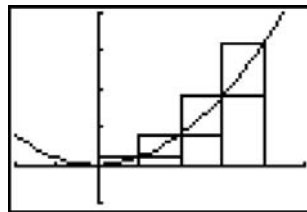


Abb. 12

Der Näherungswert (Abb. 11) wird als von den Schülern geeignet erachtet; der reale Wert jedoch wird kleiner sein, da die Datenpunkte linear verbunden wurden.

### 3. Teil Herleitung der Flächeninhaltsfunktion

Zielsetzung: Das benutzte Verfahren zur Flächenberechnung soll anhand einer neuen Aufgabenstellung weiter verbessert werden (Abb.12).

Nach traditionellem Verfahren wird zunächst zu verschiedenen Randfunktionen [f(x) = k, (Rechteck); f(x) = 2x (Dreieck); f(x) = 2x+1 (Trapez)] der Flächeninhalt für konkrete Intervalle [0;b] und die jeweilige Flächeninhaltsfunktion A<sub>0</sub>(b) für eine beliebige Grenze b berechnet. Alle Funktionsgleichungen werden in einer Tabelle notiert; alle konkreten Flächeninhalte werden mit dem Modul des GTRs überprüft.

Für die monoton wachsende Randfunktion f(x) = x<sup>2</sup> soll im Intervall [a;b] mit a = 0 und b = 4 und äquidistanter Teilung in n = 4; 6; 8, ..., ∞ Teilintervalle der Breite

$$\frac{b-a}{n} = \Delta x$$

die Flächeninhaltsfunktion entwickelt werden (Abb. 12). Neben dem „Trapezsummenverfahren“ wird auch das Rechtecksummenverfahren diskutiert, dieses ist einigen Schülerinnen und Schülern bekannt (Herleitung der Kreiszahl π in Klasse 10).

Der Grenzwert der Ober- und Untersummenbildung mit Rechtecken (Riemannsummen) oder Trapezen kann mit dem GTR näherungsweise berechnet werden.

$$A_0(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot f\left(\frac{b-a}{n} \cdot i\right) \right) \text{ (Untersumme)}$$

$$A_0(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} \cdot f\left(\frac{b-a}{n} \cdot i\right) \right) \text{ (Obersumme)}$$

Im ersten Schritt werden mit Handrechnung und der Teilung n = 4 die Flächeninhalte der drei Untersummen- und vier Obersummenrechtecke sowie der Mittelwert bestimmt. Letzterer wird als Trapezsummenergebnis gedeutet und graphisch veranschaulicht.

Im zweiten Schritt wird das Verfahren mit dem GTR (oder einem CAS) umgesetzt.

```
{0 1 4 9}
seq((B-A)/N*Y1(I
*(B-A)/N), I, 0, N-
1)
{0 1 4 9}
seq((B-A)/N*Y1(I
*(B-A)/N), I, 1, N)
(1 4 9 16)
```

Abb. 13

```
sum(seq((B-A)/N*
Y1(I*(B-A)/N), I,
0, N-1))
14
sum(seq((B-A)/N*
Y1(I*(B-A)/N), I,
1, N))
30
```

Abb. 14

```
64 ÷ N
22.34375
64 ÷ N
sum(seq((B-A)/N*
Y1(I*(B-A)/N), I,
1, N))
21.8359375
```

Abb. 15

```
21.8359375
256 ÷ N
sum(seq((B-A)/N*
Y1(I*(B-A)/N), I,
1, N))
21.45849609
```

Abb. 16

In den Abbildungen 13 und 14 werden die Flächeninhalte zuerst als Listenelemente notiert und dann aufsummiert. Wird nun die Teilung mit Halbierungsschritten (vgl. Abbildungen 15 und 16 für die Obersummenrechtecke) verfeinert (n = 8, 16, 32 ...), so können nun die Näherungswerte für die Ober- und Untersummen schnell ermittelt werden. Für Schülerinnen und Schüler wird durch die Annäherung der Summen an den Grenzwert auch der Grenzwertprozess deutlich. Der Grenzwert selbst ist das Ziel der Berechnung, veranschaulicht wird dieser als Summe von Flächeninhalten von ‚unendlich‘ vielen Rechtecken (Streifen) mit der angenäherten Breite Δx → 0 und den Funktionswerten der Randfunktion als Höhe; dies entspricht auch der Vorstellung, die mit dem GTR (Modul) bereits vorbereitet wurde.

Im dritten Schritt wird nun die Teilung n durch die Variable x ersetzt. So kann die jeweilige Summe als Funktion in Abhängigkeit der Teilung im y-Editor gespeichert werden (Eingabe mit Anführungszeichen "...").

Die Funktion Y<sub>0</sub> in Abb. 20 stellt die „Trapezsummen“ dar, die Trapezsummenfunktion kann natürlich auch in einer einzigen Funktion dargestellt werden in dem man die Terme zu Y<sub>8</sub> und Y<sub>9</sub> verknüpft.

```
UNTERSUMME
"sum(seq((B-A)/X
*Y1(I*(B-A)/X), I
, 0, X-1))" → Y8
Done
Done
Done
```

Abb. 17

```
OBERSUMME
"sum(seq((B-A)/X
*Y1(I*(B-A)/X), I
, 1, X))" → Y9
Done
Done
Done
```

Abb. 18

```
MITTELWERT
"(Y8+Y9)/2"→Y0
Done
Done
Done
Done
Done
```

Abb. 19

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y8sum(seq((B-A)
)/X*Y1(I*(B-A)/X
),I,0,X-1))
\Y9sum(seq((B-A)
)/X*Y1(I*(B-A)/X
),I,1,X))
\Y0(Y8+Y9)/2
```

Abb. 20

Mit einer Tabelle lassen sich nun die Näherungswerte bestimmen: Stellt man die Wertetabelle im Menü Table Setup (2nd WINDOW) so ein, dass die x-Werte abgefragt werden („Ask“), so lässt sich die Grenzwertentwicklung mit Ober- und Untersummen und Mittelwerten mit jeweiliger Intervallhalbierung sehr gut darstellen (Abb.23 / 24).

```
TABLE SETUP
TblStart=1
ΔTbl=1
Indent: Auto
Depend: Ask
```

Abb. 21

X	Y8	Y9
4	14	30
8	17.5	25.5
16	19.375	23.375
32	20.344	22.344
64	20.836	21.836
128	21.084	21.584
256	21.208	21.458

Abb. 22

X	Y9	Y0
4	30	22
8	25.5	21.5
16	23.375	21.375
32	22.344	21.344
64	21.836	21.336
128	21.584	21.334
256	21.458	21.333

Y0=21.3334960938

Abb. 23

```
fnInt(Y1,X,0,4)
21.333333333
fnInt(Y1,X,0,5)
41.666666667
fnInt(Y1,X,0,6)
72
"fnInt(Y1,X,0,X)
"→Y2
```

Abb. 24

Mit einem CAS-Rechner gelingt eine allgemeine Berechnung direkt, da dieser die Terme und den Grenzwert für die rechte Grenze  $b = 4$  berechnen kann (links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen überein). Als exakte Lösung ergibt sich  $A_0(4) = 64/3$  FE  $\approx 21,3$ .

Im vierten Schritt stellt sich folgendes Problem: Wie erhält man die Flächeninhaltsfunktion, falls  $b$  beliebig ist, also für  $b = 5; 6; 7; \dots$ ? Wie erhält man schließlich eine Gleichung für  $A_0(b)$  und somit auch für  $A_0(x)$ ?

Die numerische Grenzwertberechnung kann im GTR mit dem Befehl  $fnInt(f(x),x,a,b)$  im Menü <MATH:9> abgerufen werden (Abb. 24). Da man jedoch noch immer keine allgemeine Flächeninhaltsfunktion erhält, ersetzt man die konkreten Werte  $b$  durch die Variable  $x$  und speichert den Term im y-Editor. Nun lässt man sich den Graphen zeichnen, um weitere Erkenntnisse zu gewinnen.

Aufgrund des Graphen und der obigen Zahlenbeispiele kann auf eine Funktion 3. Grades geschlossen werden. Vermutung:  $A_0(x) = 1/3 \cdot x^3$ .

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1X^2
\Y2fnInt(Y1,X,0
,X)
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```

Abb. 25

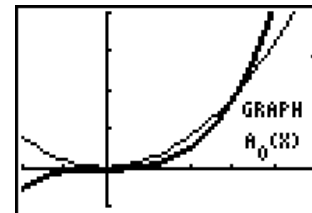


Abb. 26

Mithilfe der kubischen Regression kann die gewünschte Gleichung numerisch entwickelt werden, hierzu sind 4 Punkte der numerischen Integralfunktion in  $Y_2$  notwendig (Abb. 27 u. Abb. 28). Das Bestimmtheitsmaß  $r^2 = 1$  gibt an, dass die Gleichung exakt (mit Einschränkung der numerischen Fehler, denn es gilt  $b = c = d = 0$ ) bestimmt wurde.

L1	L2	L3	Z
4	21.333	-----	
5	41.667	-----	
6	72	-----	
7	114.33	-----	

L2 = "Y2(L1)"

Abb. 27

```
y=ax^3+bx^2+cx+d
a=.3333333333
b=1.773E-10
c=-9.62E-10
d=1.696E-9
R^2=1
CubicReg L1,L2,Y3
```

Abb. 28

Die Gleichung  $A_0(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  kann natürlich auch argumentativ entwickelt werden, da Verschiebungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung ausgeschlossen sind und aufgrund der Punktsymmetrie des Graphen nur der Streckungsfaktor berechnet werden muss, z. B. aus  $A_0(4) = a \cdot 4^3 = 64/3$ .

Das beschriebene Verfahren kann entsprechend auch mit einer Ausgangsfunktion 3. Grades durchgeführt bzw. wiederholt werden (z.B. als Hausaufgabe).

[1] Knechtel, H. (u.a.): *Mathe >open end<*, Materialien für den Einsatz von Grafikrechnern und Computeralgebra, Teil 2: Integralrechnung, Westermann 3-14-11 2812-X

Autor:  
Norbert Frost, Stadthagen (D)  
Ratsgymnasium Stadthagen  
[norbert.frost@teleos-web.de](mailto:norbert.frost@teleos-web.de)