

# Eine Möglichkeit zur Überprüfung oft impliziter Voraussetzungen in der Statistik: Der $\chi^2$ -Test

Gerd Hinrichs

Viele Kontexte der Statistik setzen voraus, dass bestimmte Zufallsgrößen gleichverteilt / binomialverteilt / normalverteilt sind oder dass mehrere Zufallsvariablen unabhängig sind. Die Normalverteilung wird z.B. bei allen Kontexten und Aufgaben vorausgesetzt, in denen mit 1,96 $\sigma$ -Umgebungen operiert wird (Schätzer, Tests, Konfidenzintervalle). Dabei können aber eigentlich empirisch erhobene Daten prinzipiell niemals *genau* normalverteilt sein (der Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  wird den endlich vielen Daten nicht gerecht). Der  $\chi^2$ -Test bietet nun eine Möglichkeit, diese oft stillschweigend angenommenen Voraussetzungen zu überprüfen.

## 1. Die Multinomialverteilung

Die bekannte Binomialverteilung setzt eine Bernoulli-Kette voraus, in der ein Bernoulli-Versuch mit genau zwei möglichen Ergebnissen mehrfach unabhängig durchgeführt wird. Naheliegender ist die Verallgemeinerung auf  $r$  mögliche Ergebnisse auf jeder Stufe. So gelangt man zur Multinomialverteilung:

Sind  $p_1, p_2, \dots, p_r$  ( $p_1+p_2+\dots+p_r=1$ ) die Wahrscheinlichkeiten für die  $r$  Ergebnisse pro Stufe, so gilt mit  $n:=k_1+k_2+\dots+k_r$ :

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}$$

Dieser Term gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass jedes Ergebnis  $X_i$  im  $n$ -mal durchgeführten Experiment genau  $k_i$ -mal auftritt.

## 2. Ein klassisches Beispiel: Mendels Erbsen

In seinem klassischen Experiment untersuchte Gregor Mendel Erbsen (um 1865). Er betrachtete zwei Merkmale: Die Erbsen konnten rund (A, dominant) oder kantig (a, rezessiv) sein, das Albumen (Eiweiß) konnte gelb (B, dominant) oder grün (b, rezessiv) sein. In seinem Experiment hat er Samen von homozygoten (reinerbigen) Pflanzen mit den dominierenden Merkmalen A und B mit Pollen von homozygoten Pflanzen mit den rezessiven Merkmalen a und b gekreuzt. Wie erwartet erschienen die Samen daraus gezogener Pflanzen rund und gelb. Die Samen der wiederum daraus gezogenen Pflanzen (2. Tochtergeneration) waren allerdings von sehr unterschiedlicher Art. Im Ganzen erhielt er von 15 Pflanzen 556 Samen:

- 315 rund und gelb (theoretisch<sup>1</sup>  $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$ )

- 101 kantig und gelb (theoretisch  $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$ )
- 108 rund und grün (theoretisch  $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$ )
- 32 kantig und grün (theoretisch  $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ )

Um die Multinomialverteilung zu veranschaulichen, soll einmal die Wahrscheinlichkeit für diesen Ausfall der Versuchsreihe bestimmt werden: Bei dem Mendel'schen Vererbungsproblem liegt ein Zufallsversuch vor, der sich durch die Multinomialverteilung beschreiben lässt. Mit den verschiedenen Samen wird das Zufallsexperiment 556-mal unabhängig wiederholt (die Unabhängigkeit ist eine Modellannahme!). Die Wahrscheinlichkeit, genau die von Mendel im Experiment erhaltenen Häufigkeiten zu erhalten, lässt sich daher wie folgt berechnen:

$$P(X_1 = 315, X_2 = 101, X_3 = 108, X_4 = 32) = \frac{556!}{315! \cdot 101! \cdot 108! \cdot 32!} \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^{315} \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^{101} \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^{108} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^{32} \approx 0,0001$$

Dieses Ergebnis ist allerdings wenig spektakulär und seine Aussagekraft gering. Zudem scheitern die meisten Taschenrechner aufgrund von Rundungen bereits am ersten Bruch (auch der Voyage<sup>TM</sup>200, das Ergebnis hier wurde mit DERIVE erhalten).

Viel spannender ist die Frage, ob denn das empirische Ergebnis der Theorie widerspricht bzw. wie deutlich es der Theorie ggf. widerspricht.

## 3. Der Anpassungstest

Um diese Frage zu beantworten, muss man sich zunächst überlegen, wie man eigentlich in diesem Fall *messen* kann, wie stark denn das empirische und das theoretische Ergebnis voneinander abweichen. Eine geeignete Testgröße ist (die so genannte „ $\chi^2$ -Testgröße“)

$$T := \sum_{k=1}^r \frac{(X_k - n \cdot p_k)^2}{n \cdot p_k}$$

Wie bei der Binomialverteilung kann man zeigen, dass für die Erwartungswerte multinomialverteilter Zufallsgrößen  $E(X_k) = n \cdot p_k$  gilt. Damit misst die Testgröße  $T$  also gewissermaßen die quadratische relative Abweichung vom Erwartungswert der einzelnen Ausprägungen. Prinzipiell könnte man auch andere Abweichungsmaße definieren. Das Problem ist jedoch, dass man zur Beurteilung statistischer Fragestellungen immer Quantile der zugrunde liegenden Verteilung benötigt. Es zeigt sich nun, dass eben diese Testgröße mathematisch recht einfach allgemein handhabbar ist.

Die Hypothese, dass die empirischen Werte den erwarteten theoretischen Werten entsprechen, wird dann verworfen, wenn die entsprechende Testgröße  $T$  einen zu großen Wert annimmt. Was heißt aber in diesem Zusammenhang „zu groß“? Als Vergleichswert nimmt man – analog den einseitigen Hypothesentests – die  $(1-\alpha)$ -Quantile (zum vorher festgelegten Testniveau  $\alpha$ ) der Verteilung von  $T$ . Leider kann aber

<sup>1</sup> Nach den Mendel'schen Gesetzen:

1. Uniformitätsgesetz: Die Nachkommen homozygoter Individuen sind untereinander gleich.
2. Spaltungsgesetz: Die Nachkommen einer Kreuzung mischerbiger Individuen sind nicht mehr gleichförmig, sondern spalten ihr äußeres Erscheinungsbild in einem bestimmten Zahlenverhältnis auf. Dieses Zahlenverhältnis ist im vorliegenden Fall 3:1 für den dominanten Phänotyp.

nun die exakte Verteilung der Testgröße  $T$  nicht in geschlossener Form angegeben werden; jedoch zeigte 1900 Karl Pearson, einer der Mitbegründer der modernen Statistik, dass die gesuchte Verteilung von  $T$  durch eine  $\chi^2$ -Verteilung zum Freiheitsgrad  $r-1$  approximiert werden kann.<sup>2</sup>

**4. Die  $\chi^2$ -Verteilung**

Hat man  $k$  unabhängige standard-normalverteilte Zufallsgrößen  $X_1, X_2, \dots, X_k$ , so heißt die Verteilung der Summe ihrer Quadrate  $S:=X_1^2+X_2^2+\dots+X_k^2$  eine  $\chi^2$ -Verteilung mit Freiheitsgrad  $k$ ; das Quadrat *einer* standard-normalverteilten Zufallsgröße ist mithin  $\chi^2$ -verteilt mit Freiheitsgrad 1. Aufgrund ihrer Bedeutung für die schließende Statistik sind  $\chi^2$ -Verteilungen außerordentlich gut tabelliert; auch die TI-Rechner haben diese Verteilungen implementiert: der  $P_k(u \leq X \leq o)$  entsprechende Befehl ist  $\chi^2cdf(u, o, k)$  beim GTR (zu finden unter [DISTR]) bzw.  $chi2Cdf(u, o, k)$  beim CAS mit Applikation „Statistik mit dem Listeneditor“ (zu finden im [CATALOG] unter F3 Flash Apps). Darüber hinaus kann man die Dichtefunktionen der  $\chi^2$ -Verteilungen geschlossen angeben.<sup>3</sup>

$$g_k(x) = \frac{1}{2^{k/2} \cdot \Gamma(k/2)} \cdot x^{(k/2)-1} \cdot e^{-x/2} \quad (x \geq 0)$$

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} \cdot e^{-x} \, dx \quad (t > 0)$$

Die Dichtefunktionen einiger  $\chi^2$ -Verteilungen sind in der folgenden Abbildung dargestellt.

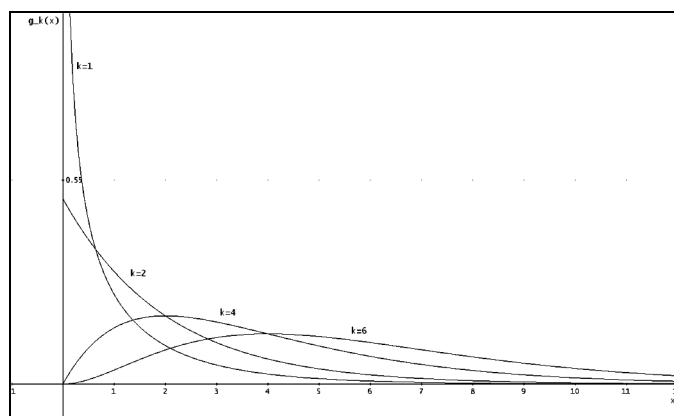


Abb. 1

Dass der Freiheitsgrad in unserem Fall des Anpassungstests durch  $r-1$  und nicht, wie man erwarten könnte, durch  $r$  gegeben ist, hängt damit zusammen, dass die Anzahl  $n=X_1+X_2+\dots+X_r$  der Versuchsdurchführungen fest vorgegeben ist: Sind dann  $r-1$  der Häufigkeiten  $X_1, X_2, \dots, X_r$  durch Zufall im Experiment ermittelt, ist dadurch die  $r$ -te entsprechende Häufigkeit nicht mehr „frei“, sondern lässt sich durch die übrigen berechnen.

**5. Endgültige Auswertung von Mendels Experiment**

Die Testgröße  $T$  für den Ausgang des Mendel'schen Experiments (s.o.) liefert:

<sup>2</sup> Faustregel: Die Approximation ist akzeptabel, sofern die Erwartungswerte  $n \cdot p_k \geq 5$  sind.

<sup>3</sup> Einen Beweis findet man z.B. bei Kregel ([3], S. 184 f.).

$$T = \frac{\left(315 - 556 \cdot \frac{9}{16}\right)^2}{556 \cdot \frac{9}{16}} + \frac{\left(101 - 556 \cdot \frac{3}{16}\right)^2}{556 \cdot \frac{3}{16}} + \frac{\left(108 - 556 \cdot \frac{3}{16}\right)^2}{556 \cdot \frac{3}{16}} + \frac{\left(32 - 556 \cdot \frac{1}{16}\right)^2}{556 \cdot \frac{1}{16}} \approx 0,470$$

In der folgenden Tabelle sind die kritischen Werte zum Testniveau  $\alpha=0,05$  (also die 0,95-Quantile) der  $\chi^2$ -Verteilung zu verschiedenen Freiheitsgraden  $k$  aufgelistet.

k	1	2	3	4	5	6	7
$q_{0,95}$	3,84	5,99	7,81	9,49	11,07	12,59	14,07

Man liest für den hier interessierenden Freiheitsgrad  $4-1=3$  den kritischen Wert  $q_{0,95} \approx 7,81$  ab. Weil die berechnete Testgröße  $T$  mit etwa 0,470 deutlich kleiner ausgefallen ist als dieser kritische Wert, kann die Hypothese, dass die im Experiment erhaltenen Häufigkeiten mit der Mendel'schen Theorie übereinstimmen, nicht verworfen werden.

**6. Der Einsatz der Rechner**

Im Zeitalter der Computer braucht man nicht mehr mit tabellierten Wahrscheinlichkeiten zu hantieren, wie es oben angedeutet ist. Die wichtige  $\chi^2$ -Verteilung ist in einschlägigen Tabellenkalkulationen und den TI-Rechnern fest implementiert.

Zunächst wird wie oben der Wert der Testgröße  $T$  berechnet. Dazu speichert man die im Experiment ermittelten Häufigkeiten z.B. in Liste  $L_1$  und berechnet anschließend  $T$ .

```
(315, 101, 108, 32)
→L1
(315 101 108 32)
(9, 3, 3, 1) →L2
(9 3 3 1)
sum((L1-556*L2/16)^2/(556*L2/16))
→T
```

Abb. 2

Erneut ergibt sich natürlich  $T \approx 0,470$ . Dann bestimmt man das 0,95-Quantil der  $\chi^2$ -Verteilung zum Freiheitsgrad 3 graphisch:<sup>4</sup>

```
Plot1 Plot2 Plot3
√Y1 [X^2cdf(0, X, 3)]
√Y2 [0.95]
√Y3 =
√Y4 =
√Y5 =
√Y6 =
```

Abb. 3

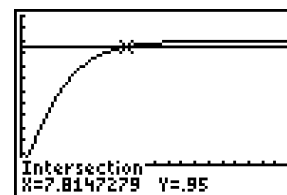


Abb. 4

Erneut erhält man  $q_{0,95} \approx 7,81$ . Da der Wert unserer Testgröße  $T$  deutlich kleiner ist, kann man die Hypothese nicht verwerfen.

Die Verteilungsfunktion  $\chi^2cdf()$  des Rechners wird hier als Blackbox verwendet. Wer einen deutlicheren Bezug zur Definition der Verteilung aus Normalverteilungen herstellen möchte, kann die  $\chi^2$ -Verteilung mit einer Tabellenkalkulation simu-

<sup>4</sup> Das Vorgehen ist analog zur Bestimmung von Quantilen bei Schätzern und Testverfahren, wie es in [1] dargestellt ist.

lieren und die gewünschten Quantile auf diese Weise ermitteln. Eine entsprechende EXCEL-Tabelle kann vom Autor per E-Mail angefordert werden.

**7. Ein zweites Beispiel**

Mit Hilfe des beschriebenen  $\chi^2$ -Anpassungstests kann man auch testen, ob eine Zufallsvariable z.B. binomialverteilt ist.

Das Zufallsexperiment sehe so aus, dass die Anzahl der Mädchen in Familien mit 8 Kindern gezählt wird. Kann man davon ausgehen, dass diese Anzahl binomialverteilt ist mit den Parametern  $n=8$  und  $p=0,5$ ?

Im 19. Jahrhundert wurde eine solche Erhebung in Deutschland tatsächlich durchgeführt. Dazu wurden 53.680 Familien mit 8 Kindern „untersucht“:

Zahl der Mädchen $k$	Relative Häufigkeit	erwartete Wahrscheinlichkeit $P(X=k)$
0	0,0064	0,0039
1	0,0390	0,0313
2	0,1244	0,1094
3	0,2222	0,2188
4	0,2787	0,2734
5	0,1984	0,2188
6	0,0993	0,1094
7	0,0277	0,0313
8	0,0040	0,0039

Um den Anpassungstest durchzuführen, wird man zunächst die Daten in Listen speichern, anschließend den Wert der Testgröße  $T$  berechnen, das entsprechende Quantil der  $\chi^2$ -Verteilung graphisch bestimmen (Freiheitsgrad 8) und dann die Werte wie oben beschrieben vergleichen:

Abb. 5

Abb. 6

Abb. 7

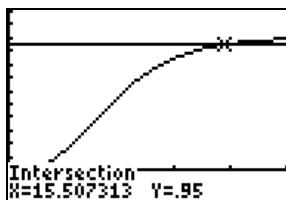


Abb. 8

Der Wert der Testgröße  $T \approx 481$  ist deutlich größer als das Quantil  $q_{0,95} \approx 16$ , so dass die Hypothese der Binomialverteilung mit den angenommenen Parametern deutlich zu verwerfen ist!

Ludwig Paditz hat – als weiteres Beispiel – beschrieben, wie man einen (simulierten) Würfel als „gezinkt“ entlarven kann indem er mit Hilfe des  $\chi^2$ -Tests überprüft, ob die Häufigkeitsverteilung der Augenzahlen multinomialverteilt ist (siehe [4]).

Der Autor dieses Artikels hat an anderer Stelle beschrieben, wie mit Hilfe von Quantil-Quantil-Diagrammen (Q-Q-Plots) die Hypothese einer zugrunde liegenden Normalverteilung überprüft werden kann (siehe [2]).

**8. Der Unabhängigkeitstest**

Mit Unabhängigkeitstests kann man testen, ob Zufallsvariablen stochastisch unabhängig sind. Ein häufiges Beispiel ist die Überprüfung der Hypothese, ob ein Heilungsprozess stochastisch unabhängig von der angewandten Methode ist. Bei erfolgreichen Methoden würde man natürlich das Gegenteil erwarten. Zur Darstellung des Verfahrens wird ein Beispiel betrachtet:

100 Patienten einer bestimmten Krankheit werden mit einem neu entwickelten Medikament bzw. Placebos behandelt.

Hängt die Heilungswahrscheinlichkeit stochastisch von der Art der Medikation ab? Es mögen folgende Daten aus einer Erhebung vorliegen:

(empirisch)	geheilt (A)	nicht geheilt (B)	gesamt
Medikament (a)	38	22	60
Placebo (b)	25	15	40
gesamt	63	37	100

Angenommen, die Zufallsvariablen „Medikament“ und „Heilung“ wären unabhängig, dann müssten sich die Teilwahrscheinlichkeiten in etwa aus den entsprechenden Randwahrscheinlichkeiten ergeben, z.B.

$$P(a, A) = P(a) \cdot P(A)$$

Für die Anwendung des  $\chi^2$ -Tests wurde im Abschnitt 3. eine empirische Wahrscheinlichkeitsverteilung mit einer theoretischen verglichen. Dieses kann man auch hier anwenden, wenn man obige „empirische“ Tabelle mit einer „theoretischen“, die aus der Bedingung der Unabhängigkeit ermittelt wird, vergleicht. Wenn die beiden Zufallsvariablen unabhängig sind, müssten sich bei gleicher Randverteilung in etwa die folgenden Daten beobachten lassen:

(theoretisch)	geheilt (A)	nicht geheilt (B)	gesamt
Medikament (a)	$\frac{63}{100} \cdot 60 \approx 37,8$	$\frac{37}{100} \cdot 60 \approx 22,2$	60
Placebo (b)	$\frac{63}{100} \cdot 40 \approx 25,2$	$\frac{37}{100} \cdot 40 \approx 14,8$	40
gesamt	63	37	100

Diese Daten der Kontingenztafeln kann man nun völlig analog dem  $\chi^2$ -Anpassungstest miteinander vergleichen – man sieht schon oberflächlich sehr gute Übereinstimmung. Weil in dem Modell aber die Randverteilungen für *beide* Zufallsvariablen vorgegeben sind, ist der Freiheitsgrad

$$(Anzahl\ der\ Spalten - 1) \cdot (Anzahl\ der\ Zeilen - 1) = 1,$$

wobei sich die Anzahlen nur auf denjenigen Bereich der Kontingenztafeln beschränkt, in dem die beobachteten Größen notiert sind, also weder auf Beschriftungen noch auf Summen. Völlig analog den Überlegungen in Abschnitt 6. ermittelt man die Testgröße  $T \approx 0,007$  sowie das 0,95-Quantil der  $\chi^2$ -Verteilung zum Freiheitsgrad 1 zu  $q_{0,95} \approx 3,8$ . Die Hypothese, dass die Art der Medikation und die Heilung stochastisch unabhängig sind, lässt sich auf der Basis der Daten *nicht* verwerfen: Es könnte sich um ein ungeeignetes Medikament oder Hypochondrie handeln.

## 9. Einsatz des Rechners

Der  $\chi^2$ -Unabhängigkeitstest für Kontingenztafeln, wie er soeben dargestellt wurde, ist vollständig – aber leider als Blackbox – in den TI-Rechnern implementiert: Zunächst gibt man die beobachtete Datenmatrix in den Rechner ein (hier Matrix [C]), und anschließend ruft man nur noch den entsprechenden Befehl auf. Die theoretische Kontingenztafel wird automatisch berechnet und zur Weiterverarbeitung gespeichert (hier unter Matrix [D]).

```
MATRIX[C] 2 x2
[ 38    22    ]
[ 25    15    ]
```

Abb. 9

```
EDIT CALC TESTS
0:1-2-SampTInt...
A:1-PropZInt...
B:2-PropZInt...
X2-Test...
D:2-SampFTest...
E:LinRegTTest...
F:ANOVA
```

Abb. 10

```
X2-Test
Observed: [C]
Expected: [D]
Calculate Draw
```

Abb. 11

```
X2-Test
X2=.0071500072
P=.9326130172
df=1
```

Abb. 12

Die Ausgabe des Rechners ist folgendermaßen zu interpretieren: Zunächst wird der Wert der Testgröße  $T$  ausgegeben (als  $\chi^2$  bezeichnet), anschließend ein so genannter  $p$ -Wert und zum Schluss der verwendete Freiheitsgrad ( $df$ ). Der  $p$ -Wert ist die für den Anwender spannendste Ausgabe; er gibt das kleinste Testniveau  $\alpha$  an, für welches die beobachteten Daten zu einer Verwerfung der Hypothese führen. Weil unser  $p$ -Wert mit 0,93 deutlich größer ist als  $\alpha=0,05$ , kann die Hypothese der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen „Medikation“ und „Heilung“ auf der Grundlage der beobachteten Daten nicht verworfen werden. Der bei Anwendern gern genutzte  $p$ -Wert ist also eine Art Maß für die Verträglichkeit von Daten und Hypothese. Der Vorteil seiner Angabe liegt darin, dass die Berechnung völlig unabhängig vom gewählten Testniveau des Anwenders ist. Dennoch ist es selbstverständlich testmethodisch unredlich, das Testniveau nachträglich dem  $p$ -Wert „anzupassen“.

## 10. Der $\chi^2$ -Test beim Fiskus

Der dargestellte Test ist von aktueller Bedeutung in vielen Bereichen, unerwarteterweise auch beim Finanzamt, das damit Steuersünder überführt (siehe abgebildeten Artikel, der am 2.8.2006 in den Ostfriesischen Nachrichten auf Seite 25 erschien).

# Fiskus macht Statistik-Test

Mathematik hilft bei Suche nach Steuersündern

ddp **Münster.** Ein Firmenwagen kann das private Budget entlasten. Doch die steuerlichen Regeln sind verzwickelt, und wird der Wagen auch privat genutzt, wird ein geldwerter Vorteil angerechnet. Ausnahme: Per Fahrtenbuch wird nachgewiesen, dass ausschließlich eine betriebliche Nutzung erfolgt. Doch mit geballter Elektronik und dem mathematischen Chi-Quadrat-Test entlarven Finanzämter Unregelmäßigkeiten und später eingefügte Eintragungen. So hatte der Geschäftsführer einer GmbH bei der Nutzung seines Firmenwagens nach Ansicht von Steuerprüfern bei den Eintragungen geschludert. Mehr als 7000 Euro wären, so die Prüfer, für private Nutzung zusätzlich zu versteuern gewesen. Vor dem Finanzgericht Münster legte der Geschäftsführer weitere Eintragungen vor. Doch der mathematische Test zeigte, dass der Mann unbewusst immer wieder seine Lieblingszahlen notiert hatte. Nach dem Chi-Quadrat-Test ist davon auszugehen, dass bei zufällig entstandenen Zahlenkolonnen jede Ziffer etwa gleich häufig vorkommt. Das Ergebnis des Tests war mithin „ein zusätzliches starkes Indiz für Manipulationen der Tageskilometerzahlen“.

AZ: 1 K 6384/03 E

## 11. Zum Vertiefen

Weitere Informationen zum  $\chi^2$ -Test findet man bei Stahel ([6, S. 221 ff.]).

Die  $\chi^2$ -Verteilung war eine Approximation der Verteilung unserer Testgröße  $T$  für hinreichend große  $n$  (siehe Abschnitt 3.). Für kleine Stichproben ist der **Exakte Test von Fisher** geeigneter, der daher oft zur Überprüfung der Wirksamkeit von Medikamenten verwendet wird. Statt auf der Multinomialverteilung basiert er auf der hypergeometrischen Verteilung.

In dem für Praktiker konzipierten Buch von Sachs werden viele Details für Anwender zu den beschriebenen Verfahren dargestellt ([5, S. 421 ff. zum Anpassungstest, S. 450 ff. zum Unabhängigkeitstest, S. 478 ff. zum Exakten Test von Fisher]).

### Literatur:

- [1] Hinrichs, Gerd (2005): *Ein Gang durch die Beurteilende Statistik mit Quantilen*, in: TI-Nachrichten, Heft 2/05 oder im Internet unter <http://www.t3deutschland.de>
- [2] Hinrichs, Gerd (2007): *Der TI-84/ TI-84 Plus/ Voyage™ 200 als eindrucksvolles Hilfsmittel in der Statistik*, in: Tagungsdokumentation Pflingsttagung Münster 2006, ZKL-Texte, Zentrale Koordination Lehrerausbildung, Münster
- [3] Krengel, Ulrich (<sup>3</sup>1991): *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, Vieweg-Verlag, Braunschweig
- [4] Paditz, Ludwig (2003): *Der „gezinkte“ Würfel mit dem TI-92 Plus*, in: Barzel, Bärbel; Berntzen, Detlef; Sendas, Victor M. D. (2003): *Neues Lernen, Neue Medien – Viele Projekte im Land*, Tagungsdokumentation Pflingsttagung Münster 2002, ZKL-Texte Nr. 25, Zentrale Koordination Lehrerausbildung, Münster, S. 183-206
- [5] Sachs, Lothar (<sup>10</sup>2002): *Angewandte Statistik*, Springer-Verlag, Berlin
- [6] Stahel, Werner A. (<sup>3</sup>2000): *Statistische Datenanalyse*, Vieweg-Verlag, Braunschweig

### Autor:

Gerd Hinrichs, Aurich (D)  
gerd\_hinrichs@web.de