Mathematisches Modellieren mit Schulbuchaufgaben – geht das?

Gerd Hinrichs

Spätestens seit Beschluss der Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss durch die Kultusministerkonferenz im Jahr 2003 nimmt das mathematische Modellieren als allgemeiner mathematischer Kompetenzbereich[1] in Diskussionen um die Weiterentwicklung von Mathematikunterricht einen hohen Stellenwert ein, und zwar für alle Schulformen und -stufen. Obwohl sich viele Kolleginnen und Kollegen schon seit Jahrzehnten um die Integration authentischer Realitätsbezüge in den Mathematikunterricht bemühen[2], sind in den letzten Jahren zahlreiche neue Veröffentlichungen erschienen, in denen Unterrichtsvorschläge zum mathematischen Modellieren zu finden sind (für einen Überblick vgl. [3]). Etliche Vorschläge vermitteln den Eindruck, mathematische Modellierungen sollten quasi projektartig in den Unterricht eingebettet werden, damit die Schülerinnen und Schüler den gesamten dahinter stehenden Prozess reflektieren können. Im Unterricht lässt sich dieses nur selten so realisieren, weil eine bestimmte Rhythmisierung des Schulalltags vorgegeben ist und curriculare Rahmenbedingungen zu beachten sind. Für die Vorbereitung des alltäglichen Unterrichts ist es uns darüber hinaus oft nicht möglich, aufwändig Unterrichtsvorschläge zu recherchieren bzw. Materialien umfangreich vorzubereiten. In den folgenden Abschnitten wird daher anhand einer „gewöhnlichen" Schulbuchaufgabe demonstriert, wie durch kleine Ergänzungen gezielt Modellierungskompetenzen der Schüler gefördert werden können.

Schülerinnen und Schüler bringen von sich aus i.Allg. kaum allgemeine Modellierungskompetenzen mit, sondern müssen an entsprechende Überlegungen auf einer Metaebene erst herangeführt werden. Es sind also Teilkompetenzen zu identifizieren, die Schüler nach und nach in die Lage versetzen, den Gesamtprozess einer mathematischen Modellierung wahrzunehmen, altersgerecht umzusetzen und angemessen zu reflektieren. In Niedersachsen werden die Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss konkretisiert durch Kerncurricula für den Sekundarbereich I.[3] Darin werden mögliche didaktisch reduzierte und weiter differenzierte Kompetenzen für die Doppeljahrgänge 5/6, 7/8 sowie 9/10 identifiziert (vgl. auch [3, Kapitel 1.7.3]).

Während Curricula und Schulbücher bzgl. inhaltsbezogener Kompetenzen grundsätzlich didaktisch sinnvoll gestufte Konzepte enthalten, wird dies für allgemeine mathematische Kompetenzen deutlich schwieriger. Schulbücher, die Anforderungen vieler Lehrkräfte und Fachgruppen gerecht werden müssen, können Materialien zur Förderung allgemeiner mathematischer Kompetenzen nur begrenzt für bestimmte Bedingungen in einer Lerngruppe bereitstellen. Zahlreiche Schulbuchaufgaben, in denen Sachbezüge aufgezeigt werden, wirken „eingekleidet", als sollten sie lediglich die Anwendung eines bestimmten mathematischen Begriffes oder Verfahrens auf eine außermathematische Situation demonstrieren. Die Ergänzung solcher Schulbuchaufgaben, wie sie im Folgenden vorgestellt wird, eignet sich, Modellierungskompetenzen von Schülerinnen und Schülern einer Lerngruppe mit ihren spezifischen Lernvoraussetzungen gezielt zu fördern.

1. Mathematisches Modellieren

In Bildungsstandards, Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung oder Kerncurricula identifizierte Kompetenzen des mathematischen Modellierens lassen sich übersichtlich an Kreislaufschemata veranschaulichen. Das folgende Schema geht zurück auf Werner Blum ([1, S. 200]; vgl. für weitere Schemata [3, Kapitel 1.3]):[4]

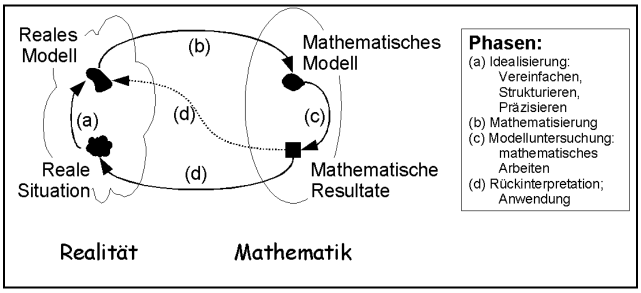


Abb. 1

Grundsätzlich geht es beim mathematischen Modellieren darum, dass ein bestimmtes Problem aus der Realität unter Verwendung mathematischer Methoden gelöst werden soll. Dazu wird zunächst die Situation aus der Realität durch ein mathematisches Modell beschrieben. Je nach Komplexität der realen Situation differenziert man zusätzlich noch zwischen realem und mathematischem Modell; mit Schülern wird man oftmals nur von einem „Modell" sprechen, weil die Modelle häufig nicht trennscharf gegeneinander abgegrenzt werden können. Im mathematischen Modell werden dann – losgelöst von der Interpretation im realen Kontext – die Probleme mit rein mathematischen Methoden gelöst. Die Ergebnisse werden dann im Hinblick auf die reale Situation / Problemstellung interpretiert und auf Plausibilität oder Angemessenheit geprüft (Validierung). Erweisen sich die Ergebnisse als unangemessen, ist es nötig, mathematische

[1] hier wird der in den Bildungsstandards benutzte Begriff übernommen, in einigen Bundesländern wird stattdessen von „prozessbezogenen Kompetenzen" gesprochen
[2] vgl. bspw. Initiativen des Vereins MUED e.V. (www.mued.de) sowie der Istron-Gruppe (www.istron-gruppe.de)
[3] http://db2.nibis.de/1db/cuvo/datei/kc_gym_mathe_nib.pdf

[4] Natürlich ist hiermit lediglich ein Modell eines Modellierungsprozesses dargestellt, der i.d.R. komplexer ist.

Modelle zu „verbessern“ und den Modellierungskreislauf zumindest teilweise erneut zu durchlaufen.

Während innermathematische Begriffe und Verfahren (Phase (c)) im Mathematikunterricht ohnehin eine zentrale Rolle spielen, verlangt die Förderung von Modellierungskompetenzen, die Phasen der Idealisierung (a), der Mathematisierung (b) sowie der Rückinterpretation (d) und Validierung bewusst wahrzunehmen und zu reflektieren.

2. Unterrichtszusammenhang und Aufgabenstellung

Die im Folgenden eingesetzte Aufgabe entstammt einem Schulbuchkapitel zur Anwendung Linearer Gleichungssysteme für Klasse 8 und wurde am Ende einer 7. Klasse eingesetzt.

Die Schülerinnen und Schüler hatten zu diesem Zeitpunkt erste Grunderfahrungen zu Termen und Gleichungen aufgebaut, kannten proportionale Zuordnungen und befanden sich thematisch am Anfang einer Unterrichtseinheit „Lineare Funktionen“. Die Schülerinnen und Schüler nutzten einen TI-Nspire™ (GTR).

Die Schülerinnen und Schüler bekamen folgende Aufgabenstellung ([2, S. 75, Aufgabe 15]), die auf dem eingesetzten Arbeitsblatt durch einen Kartenausschnitt ergänzt wurde:

Von Meppen fährt ein Fahrradfahrer in Richtung Haselünne mit der Geschwindigkeit $14\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Zur gleichen Zeit startet in Haselünne ein Radfahrer in Richtung Meppen mit der Geschwindigkeit $16\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Meppen und Haselünne sind 15 km voneinander entfernt.

a) Wie lange dauert es, bis sich die beiden Radfahrer treffen?

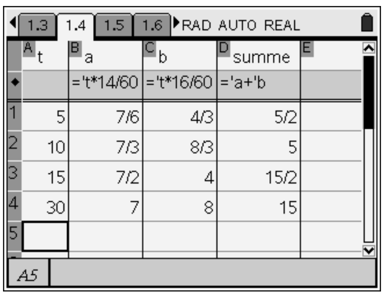
b) Wie weit ist der Treffpunkt von Meppen bzw. von Haselünne entfernt?

3. Vorgehensweisen der Schüler

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiteten die Aufgabe in Kleingruppen. Gemäß ihrer Erfahrungen aus dem Unterricht gab es unterschiedliche Vorgehensweisen.

a) Tabellarische Lösung

Einige Schüler rechneten zunächst die Geschwindigkeiten in Kilometer pro Minute um und stellten dann eine Tabelle auf, in der die gefahrenen Kilometer der beiden Radfahrer („a“ und „b“) sowie die Summe der Längen ihrer zurückgelegten Wege dargestellt waren:



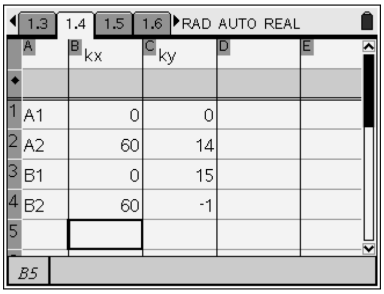
	A t	B a	C b	D summe	E
◆		='t*14/60	='t*16/60	='a+'b	
1	5	7/6	4/3	5/2	
2	10	7/3	8/3	5	
3	15	7/2	4	15/2	
4	30	7	8	15	
5					

Abb. 2

Die Schüler erkannten, dass 30 Minuten nach dem Start beide Radfahrer zusammen die Entfernung von 15 Kilometern zurückgelegt hatten und sich 7 km hinter Meppen bzw. 8 km vor Haselünne befanden.

b) Graphische Lösung

Andere Schüler verwendeten graphische Werkzeuge, stellten aber keine Funktionsgleichungen auf. Sie nutzten stattdessen die Möglichkeit, Geraden im Koordinatensystem (1. Achse: Zeit, 2. Achse: Entfernung von Meppen) mit Hilfe von jeweils zwei Punkten eindeutig festzulegen. Zunächst bestimmten sie die Gerade für den Radfahrer von Meppen in Richtung Haselünne durch $A_1(0|0)$ und $A_2(60|14)$, dann diejenige für den Radfahrer von Haselünne in Richtung Meppen durch $B_1(0|15)$ und $B_2(60|-1)$. Die Möglichkeit des TI-Nspire™, im Koordinatensystem Punkte mit vorgegebenen Koordinaten zu zeichnen und Geraden sowie deren Schnittpunkte zu konstruieren, liefert hier eine mathematische Lösung des Problems:



	A	B kx	C ky	D	E
◆					
1	A1	0	0		
2	A2	60	14		
3	B1	0	15		
4	B2	60	-1		
5					

Abb. 3

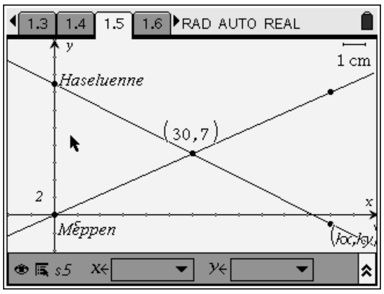


Abb. 4

Auch in diesem Modell konnten die Schüler ablesen, dass sich die beiden Radfahrer nach 30 Minuten treffen und sich dann 7 km von Meppen entfernt befinden.

c) Algebraische Lösung

Eine weitere Gruppe überlegte sich, dass die beiden Radfahrer zusammen pro Stunde 30 km zurücklegen, für 15 km also

$$t = \frac{15\,\text{km}}{30\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{1}{2}\,\text{h}$$

benötigen (die Schüler hatten das ohne Einheiten notiert). Demnach treffen sich die beiden Radfahrer

$$\frac{1}{2}\,\text{h} \cdot 14\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 7\,\text{km}$$

von Meppen bzw. 8 km von Haselünne entfernt. Zur Veranschaulichung sei die Rechnung, welche die Schüler schriftlich notierten, per TI-Nspire™ vorgeführt, um zu demonstrieren, dass der Taschenrechner (in der CAS-Ausführung) mit Einheiten rechnen kann:

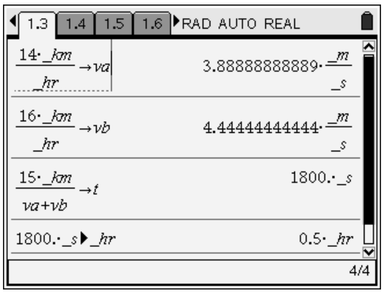


Abb. 5

Leider wird „_hr“ als Einheit für die Stunde verwendet, da „_h“ als Planck'sche Konstante belegt ist. Den Befehl zur Umwandlung von Einheiten, „▸“, findet man im Katalog:

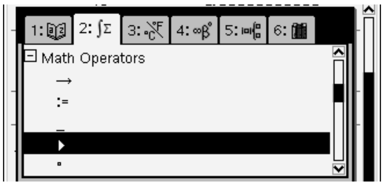


Abb. 6

4. Reflexion der Modellierung

Alle Schülerinnen und Schüler haben bei ihren Lösungen unreflektiert lineare Modelle verwendet. Um nun im zweiten Teil der Unterrichtsstunde den Blick auf die Modellierung zu richten, wurde nach dem Vergleich der Lösungsstrategien zunächst eine Folie mit dem Modellierungskreislauf aus Abschnitt 1. aufgelegt, um die einzelnen Phasen des Vorgehens bewusst zu machen.

Die Phase der Validierung der Ergebnisse und der Reflexion gewählter Modelle wird durch die Aufgabenstellung nicht angeregt, auch autonom stellten die Schülerinnen und Schüler keine entsprechenden Überlegungen an. Diese wurden durch folgende zusätzliche Aufträge angestoßen, welche die Schülerinnen und Schüler erneut in den Gruppen beantworten und auf Folien dokumentieren sollten, um sie anschließend im Plenum zu diskutieren und so auf einer Metaebene den Modellierungsprozess reflektieren zu können. Die Schülerinnen und Schüler erhielten diese Aufträge nach der ersten Besprechung im Plenum.

c) *Betrachtet noch einmal die Phasen der Idealisierung (a) und der Mathematisierung (b). Von welchen vereinfachenden Annahmen geht die Aufgabenstellung – die diese verschweigt – aus?*

d) *Was haltet ihr jetzt von eurer Lösung? Begründet eure Antwort kurz!*

e) *Was haltet ihr von der Aufgabenstellung? Begründet eure Antwort kurz!*

Natürlich stoßen diese Fragen sehr konkret reflektierende Überlegungen an. Dies erscheint jedoch insofern legitim, als die Schüler in ihrem vorangehenden Unterricht noch nicht bewusst und anhand einer Veranschaulichung einen Modellierungsprozess reflektiert hatten. Die zusätzlichen Aufträge sollten auf der Basis der konkreten Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler systematisch Überlegungen zum Modellierungsprozess anstoßen und auch eine kritische Haltung gegenüber Lösungen sowie Aufgabenstellungen anregen. Wenn man derartige Perspektiven häufiger im Mathematikunterricht beleuchtet, werden die Schülerinnen und Schüler nach und nach selbstständiger eine kritische Haltung einnehmen. Betrachtet man zudem regelmäßig Modellierungen vor dem Hintergrund eines entsprechenden Schemas (s. Abschnitt 1.), das man auf einer Folie schnell wieder projiziert, kann man den Blick auf die Phasen des Prozesses lenken, um transparent Gemeinsamkeiten und Unterschiede verschiedener Modellierungen bewusst zu machen.

Mögliche Diskussionspunkte für die Aufträge c) bis e) sind:

- Die Radfahrer müssen wirklich zeitgleich losfahren.
- Die Geschwindigkeiten müssen konstant bleiben, unterschiedliche Konstitution der Fahrer, Straßenverkehr, Ampeln, Fußgänger, Gegenverkehr, Treffen von Bekannten, Handy-Anrufe, Bedienung eines MP3-Players etc. werden vernachlässigt.
- Es wird davon ausgegangen, dass beide Radfahrer den gleichen Weg fahren und dieser genau 15 km lang ist; vernachlässigt wird, dass es evtl. einen kürzesten, einen schnellsten, einen „schönsten“, einen ruhigsten Weg oder auch zwei Straßenseiten gibt.
- Die mathematischen Lösungen in den verschiedenen mathematischen Modellen stimmen überein; dies vermittelt zumindest Vertrauen in ihre mathematische Korrektheit.
- Die mit der Aufgabenstellung präsentierte Situation ist kaum authentisch. (Wird man sich nicht vielmehr zu einem groben Termin *am Ziel* verabreden und dann geeignete Start-Zeiten ermitteln müssen?)
- Möglicherweise wird die Aufgabenstellung realistischer, wenn man Durchschnittsgeschwindigkeiten vorgibt. (Wie kann man die aber vor Beginn der Fahrten kennen?)
- Die Aufgabenstellung suggeriert genaue Ergebnisse, obwohl in vergleichbaren Situationen höchstens grobe Schätzungen möglich und sinnvoll sind (z.B. mit einer Genauigkeit von 10 Minuten).

Es fällt auf, dass bei diesen Punkten jeweils die konkrete reale Situation Berücksichtigung findet; dies ist typisch für die Validierung von Ergebnissen in Modellierungsprozessen. Die ergänzenden Aufträge sind dennoch weitgehend unabhängig von der beschriebenen Schulbuchaufgabe formuliert und lassen sich ähnlich mit anderen Aufgaben kombinieren. Entscheidend für die gezielte Förderung von Modellierungskompetenzen ist, verschiedene Modelle mit ihren jeweiligen Annahmen bewusst zu machen, verschiedene Perspektiven zur Validierung der mathematischen sowie der rückinterpretierten Ergebnisse aufzuzeigen sowie die Authentizität von Fragestellungen zu reflektieren.

Gerade die Vielfalt möglicher Perspektiven und Antworten beflügelt den Austausch unter den Schülerinnen und Schülern. Während die aus dem Schulbuch stammende Aufgabe eher rein pflichtgemäß bearbeitet wurde, verlief die kritische Diskussion, bei der tatsächlich die Meinung aller Schülerinnen und Schüler gefragt war und unterschiedliche Positionen möglich sind, zunehmend enthusiastischer. Häufig kommt es sogar vor, dass die Schülerinnen und Schüler versuchen, immer neue Aspekte der realen Situation aufzudecken, in denen die Modelle versagen; beispielsweise werden dann auch Gegenwind, Steigungen/ Gefälle auf dem Weg, unterschiedliche Gangschaltungen o.Ä. in die Diskussion eingebracht.

5. Fazit

Es wurde dargelegt, wie sich auch bei herkömmlichen Schulbuchaufgaben mit Sachbezug durch ergänzende Aufträge bzw. Fragestellungen systematisch Modellierungskompetenzen fördern lassen. In dem vorgestellten Beispiel betrifft dies i.W. die Phase der Modellreflexion und Validierung der Ergebnisse. Es lassen sich aber ähnlich auch die anderen Phasen von Modellierungsprozessen reflektieren (vgl. [3, Kapitel 1.7]).

Um allgemeine mathematische Kompetenzen gezielt zu fördern, ist es häufig günstig, verschiedene Perspektiven und Ansätze aufzuzeigen, einander gegenüber zu stellen, abzuwägen und unter geeigneten Fragestellungen zu reflektieren. Methodisch bieten sich Gruppenarbeiten an, nach denen unterschiedliche Schülerlösungen oder auch nur Lösungsansätze bzw. Standpunkte präsentiert und unter zweckmäßigen Synthesefragen diskutiert werden.

Der Einsatz Neuer Technologien ist von Vorteil, weil dann innermathematische Schwierigkeiten nicht vom Modellierungsprozess insgesamt ablenken. Die Schülerinnen und Schüler können Darstellungen bzw. Hilfsmittel nutzen, die ihren Neigungen entgegenkommen (graphisch, tabellarisch, algebraisch, systematisches Probieren).

Danksagung

Meiner Kollegin Kathrin Schulte danke ich für die gemeinsame Erprobung des dargestellten Unterrichtsvorschlags in ihrer siebten Klasse am Gymnasium Ulricianum Aurich.

Literatur

[1] Blum, Werner (1985): *Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion*; in: Mathematische Semesterberichte, Band 32 (1985), Heft 2, S. 195 – 232

[2] Griesel, Heinz; Postel, Helmut; Suhr, Friedrich (Hrsg.) (2007): *Elemente der Mathematik 8, Niedersachsen*; Schroedel, Hannover

[3] Hinrichs, Gerd (2008): *Modellierung im Mathematikunterricht*; Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg

Autor:

Gerd Hinrichs, Aurich (D)
Studienseminar Leer
gerd_hinrichs@web.de