

# ► Diskrete Fouriertransformation DFT mit dem TI-Nspire™ CAS

Hans Kammer

## 1. Einleitung

Dieser Artikel vermittelt eine elementare Einführung in die Diskrete Fouriertransformation (DFT). Ausgangspunkt ist die Darstellung von Punkten im Raum mithilfe von Ortsvektoren und 3er-Listen (3-Listen) in einem orthogonalen Koordinatensystem. Dann wird das Skalarprodukt für 3-Listen eingeführt. Die Ergebnisse können ohne Schwierigkeiten auf  $n$ -dimensionale Listen (n-Listen) übertragen werden.

Im Hauptteil wird gezeigt, wie aus einer Sinus- oder einer Kosinusfunktion durch „äquidistantes Abtasten“ mehrdimensionale Listen von Funktionswerten gewonnen werden können, die eine orthogonale Basis (ein „rechtwinkliges Koordinatensystem“) in diesem mehrdimensionalen Raum bilden. Diese Listen erlauben es, jede nicht harmonische periodische Funktion als Linearkombination (gewichtete Summe) von Sinus- und Kosinusfunktionen darzustellen (Diskrete Fourieranalyse). Die dabei gewonnenen „Fourierkoeffizienten“ spielen in der Mechanik (schwingende Systeme), in der Optik (Spektrum), der Akustik (Harmonielehre) und in der Verarbeitung digitaler Signale (z.B. im Mobiltelefon) eine wichtige Rolle.

Ein CAS-System, z.B. TI-Nspire™ CAS, erlaubt es, die Fourierkoeffizienten eines periodischen Messsignals bequem zu bestimmen. Im Vordergrund steht im Mittelschulunterricht die Analyse akustischer Signale. Wir befassen uns hier mit der Fourier-Analyse eines langsam schwingenden Magnetfederpendels mit induktivem „Pick-Up“ dessen Spektrum erstaunlicherweise zwei Schwingungsmoden im Verhältnis 2:1 aufweist. Zum Einsatz kommt ein DFT-Programm, das die Fourierkoeffizienten  $ak[i]$  und  $bk[i]$  zu berechnen erlaubt und die zugehörigen Betrags- und Phasenspektren im Frequenzbereich sowie die entsprechenden Funktionen im Zeitbereich in einer Graph-Applikation auf dem Rechner TI-Nspire™ CAS direkt anzeigt.

Der mathematische Teil dieser Arbeit beruht auf [1].

## 2. Vektoren und Listen im dreidimensionalen Raum

### 2.1 Dreidimensionaler Raum: Vektor- und Listendarstellung eines Punktes

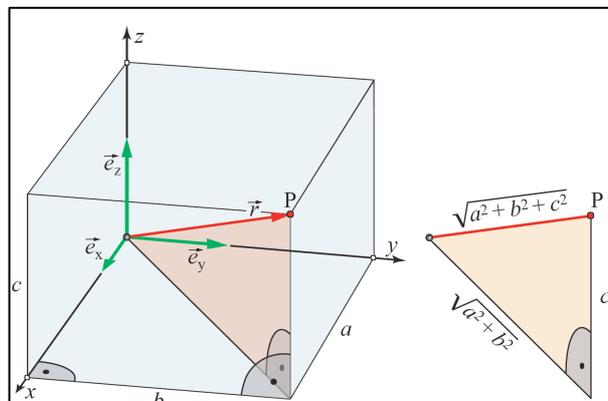


Abb. 1: Ortsvektor, Berechnung des Betrags

Ein Ortsvektor (Pfeil)  $\vec{r}$  beschreibt die Lage eines Punktes  $P(a|b|c)$  im (dreidimensionalen) Raum (Abb. 1, links). Für den Vektor schreiben wir:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Den Punkt  $P$  können wir auch mit einer so genannten Liste darstellen:  $r = \{a, b, c\}$ .

Den Betrag des Vektors bezeichnen wir in der Listendarstellung mit der Norm  $\|r\|$ . Es gilt:

$$\|r\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Die drei Einheitslisten  $e_x = \{1, 0, 0\}$ ,  $e_y = \{0, 1, 0\}$  und  $e_z = \{0, 0, 1\}$  bilden eine so genannte *orthonormierte Basis* des 3-dimensionalen Raums.

### 2.2 Operationen mit Listen

Vektoren und Listen sind gleichwertige Darstellungsmethoden für Punkte im Raum. Sie unterscheiden sich nur in der Schreibweise. Wie für Vektoren können auch für Listen Operationen definiert werden:

Summe:

$$r_1 + r_2 = \{a_1, b_1, c_1\} + \{a_2, b_2, c_2\} = \{a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2\} \quad (1)$$

Streckung mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\lambda \cdot r = \lambda \cdot \{a, b, c\} = \{\lambda \cdot a, \lambda \cdot b, \lambda \cdot c\} \quad (2)$$

Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} \text{dotP}(r_1, r_2) &= \|r_1\| \cdot \|r_2\| \cdot \cos \phi \\ &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot \cos \phi \end{aligned} \quad (3)$$

Beispiele:

$$\text{dotP}(r, e_x) = \text{dotP}(\{a, b, c\}, \{1, 0, 0\}) = a$$

$$\text{dotP}(r, e_y) = \text{dotP}(\{a, b, c\}, \{0, 1, 0\}) = b$$

$$\text{dotP}(r, e_z) = \text{dotP}(\{a, b, c\}, \{0, 0, 1\}) = c$$

In der Sprache der Vektorrechnung: Die Projektion eines Ortsvektors auf die Basiselemente mithilfe des Skalarprodukts liefert die Komponenten des Vektors („Ausblendeigenschaft“). Diese Listen-Operationen und -Eigenschaften können direkt auf  $n$ -dimensionalen ( $n$ -Listen) übertragen werden

### 3. Abtastlisten

#### 3.1 Fourieranalyse einer periodischen Funktion

Ziel der *kontinuierlichen* Fourieranalyse ist es, eine periodische Funktion, z.B. das zeitlich periodische Signal  $f = f(t)$  einer Klarinette (Abb. 2)

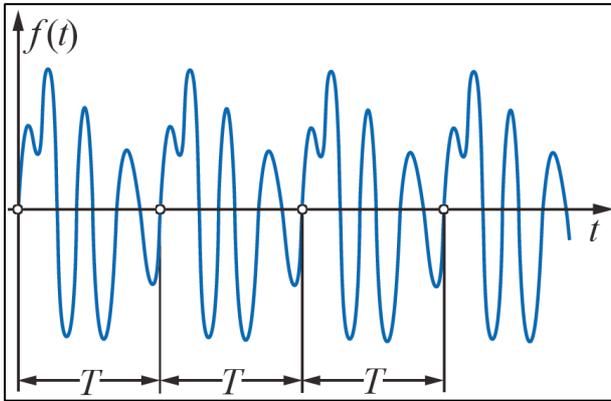


Abb. 2: zeitlich periodisches Tonsignal einer Klarinette

mithilfe von Sinus- und Kosinusfunktionen darzustellen:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t)$$

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \text{ (Periode)}$$

Tasten wir  $f(t)$  in  $2 \cdot n$  äquidistanten Zeitintervallen

$$\Delta t = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot n}$$

ab, so erhalten wir eine  $2n$ -Liste  $\mathbf{f}$  mit den entsprechenden diskreten Funktionswerten.

Ziel der *diskreten* Fourieranalyse ist es, diese Liste  $\mathbf{f}$  als Linearkombination von Listen  $\mathbf{c}_k$  und  $\mathbf{s}_k$  aus Kosinus- und Sinusfunktionswerten  $c_{kl}$  und  $s_{kl}$  darzustellen, die ebenfalls mit  $\Delta t$  abgetastet wurden:

$$\mathbf{f} = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \mathbf{c}_k + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \cdot \mathbf{s}_k \text{ mit}$$

$$\mathbf{c}_k = \{c_{k,1}, c_{k,2}, \dots, c_{k,\ell}, \dots, c_{k,2n}\},$$

$$\mathbf{s}_k = \{s_{k,1}, s_{k,2}, \dots, s_{k,\ell}, \dots, s_{k,2n}\} \text{ und}$$

$$n = \frac{\pi}{\Delta t}$$

Die Listen  $\mathbf{c}_k$  und  $\mathbf{s}_k$  sind **wechselseitig orthogonal**. Diese entscheidende Eigenschaft wird hier nicht bewiesen. Die „Gewichte“  $a_k$  und  $b_k$  heißen *Fourierkoeffizienten*.

#### 3.2 Äquidistantes Abtasten periodischer Funktionen: Orthogonale Wertelisten

Wir untersuchen jetzt Funktionswerte einer Reihe von Kosinus- und von Sinusfunktionen, die wir in äquidistanten Schritten von  $30^\circ$  an Stützstellen im Bereich von  $0^\circ$  bis  $330^\circ$  „abtasten“, d.h. die zugehörigen  $N=12$  Funktionswerte (Stützwerte) ablesen und in eine Liste aufnehmen.

Kosinusfunktionen:  $\cos(l \cdot k \cdot \Delta t)$  mit  $0 \leq k \leq 6, 0 \leq l \leq 11$   
 sowie Sinusfunktionen:  $\sin(l \cdot k \cdot \Delta t)$  mit  $1 \leq k \leq 5, 0 \leq l \leq 11$   
 und

$$\Delta t = 30^\circ \left( \frac{\pi}{6} \right)$$

Allgemein:  $N = 2 \cdot n$  mit ganzzahligem  $n$  mit  $0 \leq k \leq n, 0 \leq l \leq (2 \cdot n - 1)$  und

$$\Delta t = \frac{180^\circ}{n} \left( \frac{\pi}{n} \right)$$

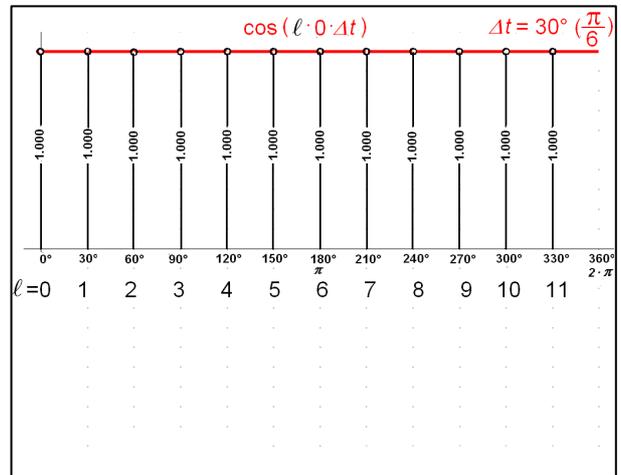


Abb.3:  $\cos(l \cdot k \cdot \Delta t), k = 0, \Delta t = 30^\circ$  und  $N = 12$   
 $c_0 = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$

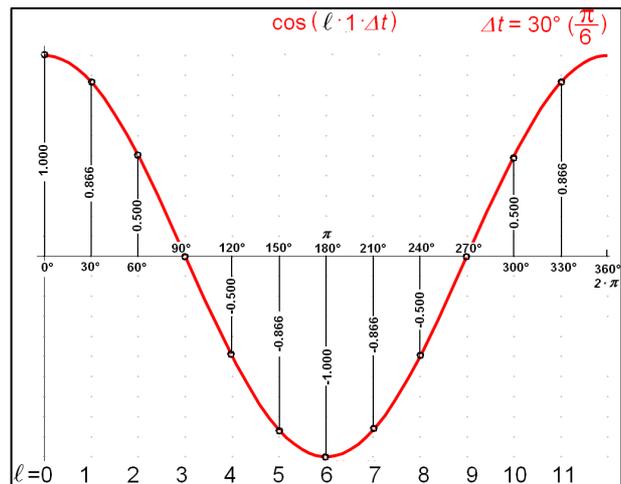


Abb.4:  $\cos(l \cdot k \cdot \Delta t)$  mit  $k = 1$  und  $N = 12$   
 $c_1 = [1, 0.87, 0.5, 0, -0.5, -0.87, -1, -0.87, -0.5, 0, 0.5, 0.87]$

$tt := \frac{\text{seq}(t, 0, 11, 1) \cdot \pi}{6}$	$\left\{ 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6} \right\}$
$c0 := \cos(0 \cdot tt)$	$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$
$c1 := \cos(1 \cdot tt)$	$\left\{ 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$
$s1 := \sin(1 \cdot tt)$	$\left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right\}$

Abb.5: Berechnung der Listen  $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1$  und  $\mathbf{s}_1$  mit dem TI-Nspire™ CAS

Abb.3 und 4 zeigen Beispiele für die Abtastung von Kosinusfunktionen für  $k = 0$  und  $1$  an 12 Stützstellen  $0 \leq l \leq 11$ . Abb.5 zeigt die Berechnung der Kosinus- und Sinuslisten  $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1$  und  $\mathbf{s}_1$  mit  $\Delta t = \pi/6$ . Die restlichen Listen  $\mathbf{c}_2 \dots \mathbf{c}_6$  und  $\mathbf{s}_2 \dots \mathbf{s}_5$  werden analog berechnet.

Die 12 Listen  $c_0 \dots c_6$  und  $s_1 \dots s_5$  bilden eine orthogonale Basis in einem 12-dimensionalen Vektorraum. Das Skalarprodukt zweier beliebiger (nicht gleicher) Listen ergibt null.

Diese Eigenschaft kann mithilfe des Rechnerbefehls  $\text{dotP}(\dots)$  verifiziert werden, z.B.  $\text{dotP}(c_4, s_5)=0$  oder  $\text{dotP}(c_2, s_3)=0$ . Zu Beginn ist ein solches experimentelle Verfahren einem exakten mathematischen Beweis vorzuziehen. Für die Normen dieser Listen liefert der Rechner mithilfe von

$$\sqrt{\text{dotP}(\text{liste}, \text{liste})}$$

$$\|c_1\| = \dots = \|c_5\| = \|s_1\| = \dots = \|s_5\| = \sqrt{6} \quad \text{und}$$

$$\|c_0\| = \|c_6\| = \sqrt{12}$$

### 3.3 Das Verfahren der diskreten Fourieranalyse

Wir multiplizieren jetzt die Liste

$$f = \sum_{k=0}^n a_k \cdot c_k + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \cdot s_k, \quad n = \frac{\pi}{\Delta t}$$

( $\Delta t$  Abtastintervall), die wir als Linearkombination von Listen  $c_k$  und  $s_k$  aus Kosinus- und Sinusfunktionswerten darstellen, skalar mit den Kosinus- bzw. Sinus-Listen  $c_k$  und  $s_k$ :

$$\begin{aligned} \text{dotP}(f, c_k) &= \text{dotP}\left(\sum_{k=0}^n a_k \cdot c_k + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \cdot s_k, c_k\right) \\ &= a_k \cdot \text{dotP}(c_k, c_k) \quad \text{mit } 0 \leq k \leq n \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dotP}(f, s_k) &= \text{dotP}\left(\sum_{k=0}^n a_k \cdot c_k + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \cdot s_k, s_k\right) \\ &= b_k \cdot \text{dotP}(s_k, s_k) \quad \text{mit } 1 \leq k \leq n-1 \end{aligned}$$

Weil die Listen  $c_0 \dots c_6$  und  $s_1 \dots s_5$  wechselseitig orthogonal sind, verschwinden alle gemischten Skalarprodukte:  $c_k \cdot c_m = s_k \cdot s_m = 0$  für  $k \neq m$  und  $c_k \cdot s_k = 0$  für  $0 \leq k \leq n$  und  $1 \leq m \leq n-1$ .

Für die Fourierkoeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}$  erhalten wir damit:

$$a_k = \frac{\text{dotP}(f, c_k)}{\text{dotP}(c_k, c_k)} \quad \text{mit } k = 0, \dots, n \quad \text{und}$$

$$b_k = \frac{\text{dotP}(f, s_k)}{\text{dotP}(s_k, s_k)} \quad \text{mit } k = 1, \dots, n-1$$

### 3.4 Zwei Test-Beispiele

#### Quadierte Kosinusfunktion

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = (\cos(x))^2,$$

tasten sie im Intervall  $[0, 2 \cdot \pi[$  in  $\pi/6$  - Schritten ab und erhalten folgende Werteliste und Fourierkoeffizienten:

$$f = \left\{ 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right\}$$

$$a_0 = \frac{\text{dotP}(f, c_0)}{\text{dotP}(c_0, c_0)} = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{\text{dotP}(f, c_1)}{\text{dotP}(c_1, c_1)} = 0$$

$$a_2 = \frac{\text{dotP}(f, c_2)}{\text{dotP}(c_2, c_2)} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$$

Für die Funktion  $f$  mit  $f(x) = (\cos(x))^2$  können wir damit schreiben:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 \cdot \cos(0 \cdot x) + a_1 \cdot \cos(1 \cdot x) + a_2 \cdot \cos(2 \cdot x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot x) \end{aligned}$$

Dieses Resultat ist gemäß einer bekannten goniometrischen Formel identisch mit  $(\cos(x))^2$ .

#### Sägezahn-Funktion

Wir betrachten die in der Technik wichtige Sägezahnfunktion

$$f_3(x) = \begin{cases} 0.5 \cdot x, & x < \pi \\ -\pi + 0.5 \cdot x, & \pi \leq x \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

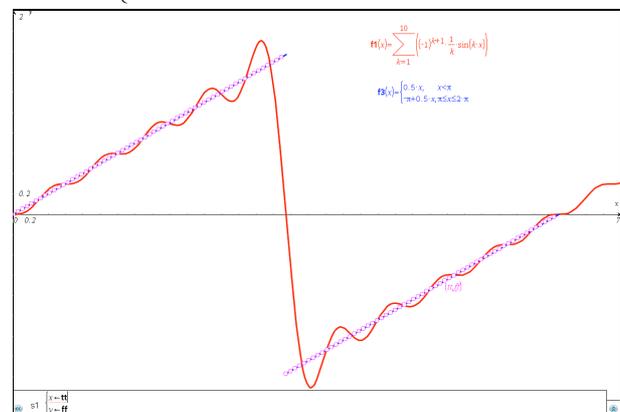


Abb. 6: Sägezahnfunktion mit 120 Abtastpunkten  $f_3(x)$  und Approximation  $f_1(x)$  mit 10 Fouriergliedern

Abb. 6 zeigt  $f_3(x)$  mit 120 Abtastpunkten im Abstand  $\pi/60$  und eine Approximation  $f_1(x)$  mit 10 Fouriergliedern.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \underbrace{+\frac{1}{1}}_{b_1} \cdot \sin(x) - \underbrace{\frac{1}{2}}_{b_2} \cdot \sin(2 \cdot x) + \underbrace{\frac{1}{3}}_{b_3} \cdot \sin(3 \cdot x) \mp \dots \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{9}}_{b_9} \cdot \sin(9 \cdot x) - \underbrace{\frac{1}{10}}_{b_{10}} \cdot \sin(10 \cdot x) \end{aligned}$$



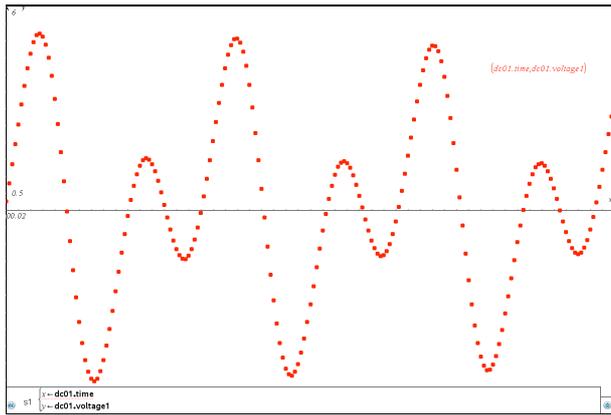


Abb.10: Schwingung eines Induktionsspendels (zwei Moden), 66 Stützstellen pro Periode (Abtastintervall von 0.005 s); exakte Periodendauer T=0.3235 s

Das Signal (Abb.10) zeigt eine periodische Schwingung mit zwei „Modes“, die mit dem DFT-Programm (Abb.8) untersucht wird. Die Messung liefert bei einem Abtastintervall von 5 ms 66 Messpunkte. Die effektive Schwindungsdauer beträgt 323.5 ms und ist damit etwas kleiner als 66·5 ms = 330 ms. Dies wird im DFT-Programm mit einem Korrekturfaktor  $korr = 330/323.5 \approx 1.0201$  berücksichtigt, der bewirkt, dass die Kosinus- und Sinus-Funktionswerte  $ck$  und  $sk$  (Abb. 8) an den korrekten Stützstellen (5 ms, 10 ms, ...) berechnet werden.

Abb.11 und 12 zeigen die mit dem DFT-Programm berechneten Leistungs- und das Phasenspektren. Die Schwingung des Induktionsspendels setzt sich aus zwei Schwingungsmo- den mit den Frequenzen 3.09 Hz und 6.18 Hz zusammen. Höhere Harmonische spielen kein Rolle

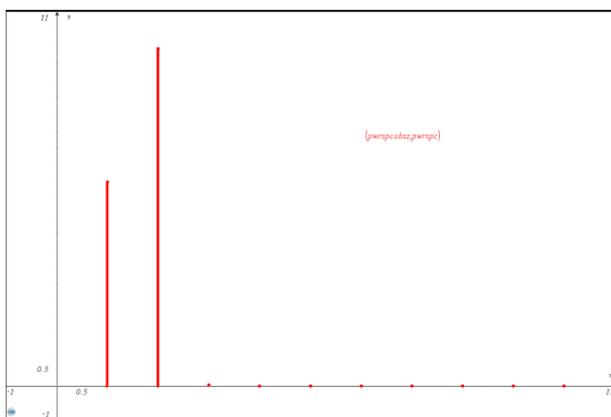


Abb.11: Leistungsspektrum der Schwingung

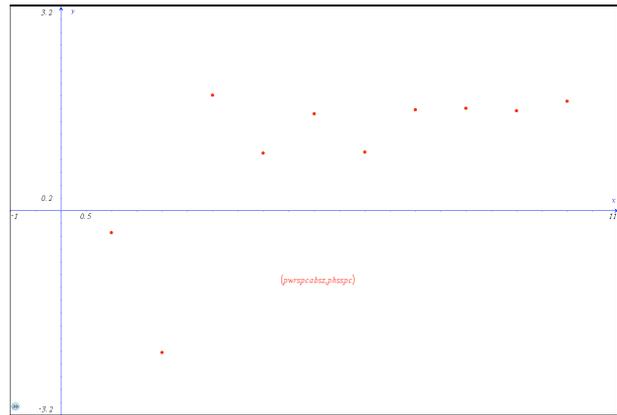


Abb.12: Phasenspektrum der Schwingung

mehr, wie man dem Leistungsspektrum, aber auch den im Zeitbereich dargestellten Signalen (Abb.13) entnehmen kann:

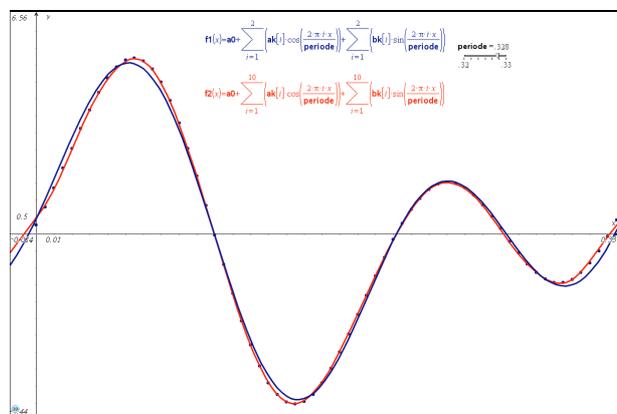


Abb. 13: Anpassung der Messung mit zwei bzw. zehn Fourierkoeffizienten

Das eigenartige und unerwartete Schwingungsverhalten des Induktionsspendels mit zwei Moden deutet auf eine Nichtlinearität des schwingenden Systems hin. Die physikalischen Hintergründe sind noch unklar und werden näher untersucht.

**Quelle**

[1] Schneebeli, H.R., Vollmer, H.R.: *Skalarprodukte, Schwingungen, Signale*, Download unter: <http://www.swisseduc.ch/mathematik/schwingungen/>

**Weiterführende Literatur**

[2] von Grünigen, D.Ch.: *Digitale Signalverarbeitung, mit einer Einführung in die kontinuierlichen Signale und Systeme*, Hanser, 4. Auflage (2008)  
 [3] von Grünigen, D.Ch.: *Digitale Signalverarbeitung, Bausteine, Systeme, Anwendungen*, Fotorotar Print und Media AG (2008)

**Autor:**

Hans Kammer, Bern (Ch)  
[hanskammer@bluewin.ch](mailto:hanskammer@bluewin.ch)