

Thema: Messungenauigkeit und Fehlerabschätzung (Unterrichtssequenz)

Christian Zöpfl

☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Ungleichungen, Messungenauigkeit, Fehlerabschätzung, Fehlerfortpflanzung

Theoretische Grundlagen & Unterrichtsmaterial

Zitat Wolfgang Pauli: „Wer misst, misst Mist!“

Am Ende jedes Messprozesses und jeder Berechnung, in die Messwerte eingeflossen sind, sollte eine Genauigkeitsbetrachtung stehen. Wird beispielsweise die Länge einer Strecke mit einem Maßband (Skala 1cm) bestimmt und die Zeit, die ein Körper für das Abfahren der Strecke benötigt mit einer Stoppuhr (Skala 0.1s), so ist es nicht sinnvoll, die aus den Messwerten berechnete Geschwindigkeit in m/s auf mehr als eine Nachkommastellen anzugeben!

Vor allem bei der Angabe von Maßzahlen in der Physik ist ein Unterschied zur Zahlenangabe in der Mathematik zu beachten!

Mathematik

$3 = 3,0 = 3,00 = 3,000 = \dots$

Physik

$3 \text{ m} \neq 3,0 \text{ m} \neq 3,00 \text{ m} \neq 3,000 \text{ m}$

auf m dm cm mm genau

Die Angabe 5,30 dm bedeutet, dass die gemessene Länge 5,3 Dezimeter ist und die Messgenauigkeit Millimeter beträgt.

Vor allem bei Berechnungen ist auf eine sinnvolle Genauigkeit zu achten:

Berechne den Umfang eines Kreises mit Radius $r = 0,30 \text{ m}$!

Die Umfangsformel lautet: $U = 2 \cdot r \cdot \pi$

Einsetzen ergibt: $U = 2 \cdot 0,30 \text{ m} \cdot \pi$ also $U = 0,60 \text{ m} \cdot \pi$

mit dem TR berechnet: $U = 1,884955592 \text{ m}$???

Da der ursprüngliche Messwert auf cm genau war, ist die Angabe des Umfangs auf Nanometer (also 10^{-9} m) genau völliger Schwachsinn!

$U = 1,89 \text{ m}$ ist hingegen ein Ergebnis mit haltbarer Genauigkeit.

Bei technischen Anwendungen werden Messwerte oft in der Form **Messwert \pm Unsicherheit** angegeben. So bedeutet die Angabe einer Masse in der Form $m = 50 \text{ g} \pm 2 \text{ g}$, dass mit tatsächlichen Massen zwischen 48g und 52g gerechnet wird. Wird mit der gemessenen Größe weitergerechnet, müssen eigentlich 2 Rechnungen, eine mit dem kleinstmöglichen Wert und eine zweite mit dem größtmöglichen Wert, durchgeführt werden.

Aufgabe 1

Eine Packung Käseaufschnitt hat eine Füllmenge von 206g, wobei Abweichungen von bis zu 5g auftreten können.

- a) Bestimme die Gesamtfüllmenge von 5 bzw. 10 Packungen.
- b) Stelle den Bereich der Füllmengen für 1 bis 10 Packungen graphisch dar.

Aufgabe 2

Ein Durchflussmesser zeigt in einem Bereich von 1 bis 10 Liter pro Minute den Durchfluss auf ± 5 Prozent genau an.

- a) Stelle den fehlerbehafteten Messwert im angegebenen Messbereich graphisch dar.
- b) Bei welchem Durchfluss übersteigt der absolute Messfehler 150 ml/min?

Aufgabe 3 (nach einer Idee von H. Heugl)

Um die Preissteigerung zu ermitteln, wird der Preis eines repräsentativen Warenkorbes ermittelt. Im Jahr 2011 kostete der Warenkorb € 6.740,-, im Jahr 2012 kostete er € 7.060,-. In welchem Bereich liegt die prozentuelle Preissteigerung, wenn der Preis...

- a) exakt bestimmt wurde?
- b) eine Unsicherheit von ± 1 Prozent aufweist.
- c) eine Unsicherheit von ± 5 Prozent aufweist.

Aufgabe 4

Das Volumen eines Schwimmbeckens soll bestimmt werden. Dazu wurden folgende Messungen durchgeführt:

Länge des Beckens: $15 \text{ m} \pm 1 \text{ cm}$

Breite des Beckens: $9 \text{ m} \pm 1 \text{ cm}$

Tiefe des Beckens: $1,45 \text{ m} \pm 8 \text{ cm}$

Die Herstellerfirma der Beckenwanne garantiert ein Mindestvolumen von 185 m^3 . Lässt sich das mit den vorliegenden Messwerten vereinbaren?

Aufgabe 5

Die Masse eines Stahlzylinders soll berechnet werden. Der Durchmesser des Zylinders beträgt $d = 5 \text{ cm} \pm 1 \text{ mm}$, die Höhe $h = 7 \text{ cm} \pm 3\%$ und die Dichte des verwendeten Stahls wird mit $7,85 - 7,87 \text{ g/cm}^3$ angegeben. Wie groß sind absolute und relative Abweichung bei der Masse?

Didaktischer Kommentar

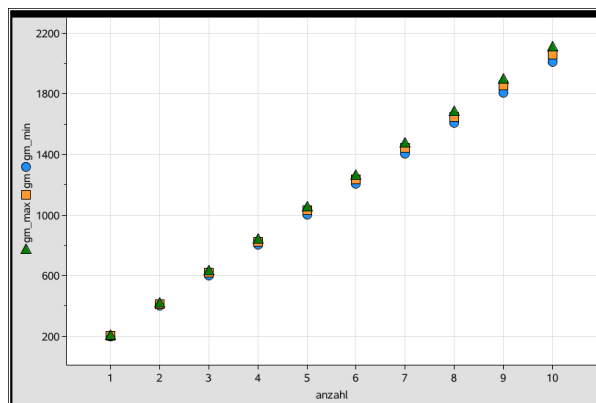
Ungleichungen werden hier vor allem zur Angabe der Messunsicherheiten verwendet. Das eigentliche Rechnen mit Ihnen steht eher im Hintergrund. Den Schülerinnen und Schülern soll anhand der Beispiele gezeigt werden, wie sich zunächst kleine Unsicherheiten bei Einzelwerten zu sehr großen Unsicherheiten bei Rechenergebnissen führen können. Auch das sinnvolle Runden beim Technologieeinsatz (z.B. bei Berechnungen mit π) sollte an dieser Stelle mit den Schülerinnen und Schülern besprochen werden.

Vorschlag zur Umsetzung

Aufgabe 1)

Um die Abweichungen von 1 bis 10 Packungen bestimmen zu können, wird „Lists & Spreadsheet“ verwendet, die graphische Darstellung erfolgt in „Data & Statistics“

A	m	B	fehler	C	m_min	D	m_max	E	anzahl	F	gm	G	gm_min	H	gm_max
											=seq(i,1,1,=anzahl*a		=anzahl*c		=anzahl*d
1	206		5	201	211			1	206	201	211				
2								2	412	402	422				
3								3	618	603	633				
4								4	824	804	844				
5								5	1030	1005	1055				
6								6	1236	1206	1266				
7								7	1442	1407	1477				
8								8	1648	1608	1688				
9								9	1854	1809	1899				
10								10	2060	2010	2110				

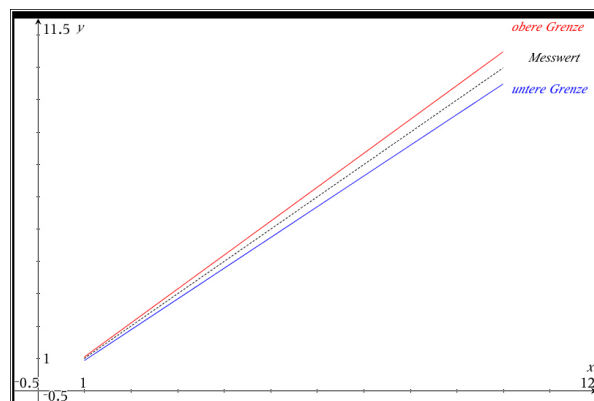


Aufgabe 2)

Die Berechnungen wurden in der TNS Datei kommentiert.

Aufgabe 3)

Auch hier finden sich die Erläuterungen direkt in der TNS-Datei.



Aufgabe 4)

Da das minimal mögliche Volumen bei Verwendung der drei kleinstmöglichen Messwerte entsteht, müsste dieses größer als 185 m³ sein. Die Berechnung liefert aber ein Volumen von 184,6 m³. Da die Messwerte eine Genauigkeit auf alle Fälle im Dezimeterbereich aufweisen, kann auch das Volumen auf dm³ genau bestimmt werden und ist daher signifikant kleiner als die Mindestangabe des Herstellers.

Das Volumen eines Schwimmbeckens soll bestimmt werden. Dazu wurden folgende Messungen durchgeführt:

Länge des Beckens: 15m ± 1cm

Breite des Beckens: 9m ± 1cm

Tiefe des Beckens: 1,45m ± 8cm

Die Herstellerfirma der Beckenwanne garantiert ein Mindestvolumen von 185 m³. Lässt sich das mit den vorliegenden Messwerten vereinbaren?

Da das Mindestvolumen gefragt ist, müssen von allen drei Messwerten jeweils die kleinsten betrachtet werden. Also

$$l_{\min} = 15 - 0,01 = 14,99\text{m}$$

$$b_{\min} = 9 - 0,01 = 8,99\text{m}$$

$$t_{\min} = 1,45 - 0,08 = 1,37\text{m}$$

Daraus ergibt sich ein minimales Volumen von $V_{\min} = 14,99 \cdot 8,99 \cdot 1,37 = 184,621 \text{ m}^3$.

Die Behauptung ist mit den vorliegenden Messwerten also nicht vereinbar.

Aufgabe 5)

Auch hier finden sich die Erläuterungen direkt in der TNS Datei.

Technologiehilfe

Die Umsetzung der Aufgabenstellungen mittels Technologie stellt keine besonderen Herausforderungen dar. Für die Reihenberechnungen der Unsicherheiten eignet sich „*Lists & Spreadsheet*“ besonders gut. Die Schülerinnen und Schüler können so rasch die Auswirkungen der Veränderungen von Messfehlern sehen und spielerisch entdecken.

Verwendeter Befehl für eine Abfolge von Zahlenwerten:

seq(Vorschrift, Variable, Startwert, Endwert)