Von linearen zu kubischen Splines

Stefan Luislampe

Vorbemerkung

Schon seit längerem wird die Behandlung von Splines im Unterricht der Kursstufe vorgeschlagen. Dies sind stückweise definierte, meist kubische Polynome zur Interpolation vorgegebener Datenpunkte. Insbesondere seit der breiten Verfügbarkeit moderner Technologien findet man viele Vorschläge zur unterrichtspraktischen Umsetzung. In Niedersachsen ist die Modellierung von Biegelinien nunmehr im Kerncurriculum verbindlich vorgeschrieben, und zwar auch für das grundlegende Anforderungsniveau (Grundkurse).

Im Folgenden soll ein Unterrichtsgang in einem Kurs mit grundlegendem Anforderungsniveau vorgestellt werden, bei dem sich Schülerinnen und Schüler ausgehend von linearen Splines zentrale Aspekte der Interpolation mit kubischen Splines erarbeitet haben. Im Kurs wurden im Vorfeld klassische Interpolations-Probleme thematisiert (z.B. als Steckbriefaufgaben zu ganzrationalen Funktionen). Die Schülerinnen und Schüler haben dabei insbesondere die Andersartigkeit der Ansätze zur Interpolation bzw. Regression reflektiert. In der Auseinandersetzung mit Trassierungsproblemen wurde ein kontextbezogenes Verständnis von stetigen bzw. stetig differenzierbaren Übergängen erarbeitet (knickfrei, krümmungsruckfrei).

Im Zentrum der Überlegungen steht der klassische Kontext Schiffsbau (vgl. [1]). Bei der Konstruktion eines Schiffsrumpfs sind Längsspanten vorgegeben, die (Quer-) Beplankung durch biegsame Latten (engl. Splines) soll modelliert werden. Abbildung 1 zeigt den Querschnitt, aus Symmetriegründen werden nachfolgend die Datenpunkte aus Abbildung 2 betrachtet (Zahlenwerten nach [2]).

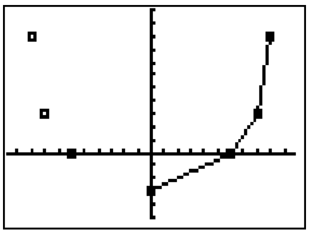

Abb.1

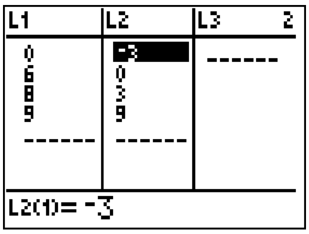

Abb.2

Erste Modellierungsansätze

Für die Schülerinnen und Schüler ist aus dem Unterrichtszusammenhang naheliegend, bei der Modellierung von einem Interpolationspolynom dritten Grades auszugehen. Das Ergebnis ist unbefriedigend, wie in Abbildung 4 zu erkennen ist. Die Verwendung des Regressionsmoduls (Abb.3) und die Lösung über das Aufstellen der Interpolationsbedingungen / des linearen Gleichungssystems führen in diesem Fall zum gleichen Resultat.

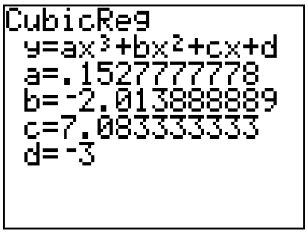

Abb.3

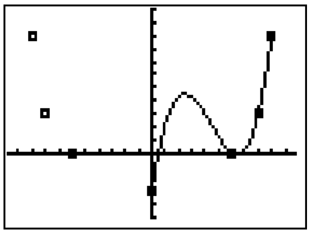

Abb.4

Im Datenpot in Abbildung 1 wurde für die Datenpunkte mit $x \geq 0$ die Einstellung `xyLine` gewählt, bei dem die dargestellten Punkte (gerade) verbunden werden. Sichtbar sind 3 lineare Funktionen (lineare Splines) s_1, s_2 und s_3. Für diese lassen sich folgende Bedingungen angeben:

$s_1(0) = -3$ und $s_1(6) = 0$ für $s_1(x) = a_1 \cdot x + b_1$

$s_2(6) = 0$ und $s_2(8) = 3$ für $s_2(x) = a_2 \cdot x + b_2$ (1)

$s_3(8) = 3$ und $s_3(9) = 9$ für $s_3(x) = a_3 \cdot x + b_3$

Aus den Bedingungen ergeben sich drei Gleichungssysteme mit jeweils zwei Gleichungen für zwei Unbekannte. Für die Schülerinnen und Schüler stellt die Berechung der gesuchten Koeffizienten eine (einfache) wiederholende Übung dar, die ggf. arbeitsteilig auf die Lösung führt:

$s_1(x) = 0{,}5 \cdot x - 3$ (*)

$s_2(x) = 1{,}5 \cdot x - 9$

$s_1(x) = 6 \cdot x - 45$

Die Gleichungssysteme können (und sollten) händisch gelöst werden. Dennoch greifen einige Schülerinnen und Schüler auf Lösungsroutinen des Rechners zurück und ermitteln oder prüfen dabei ihre Lösungen der linearen Gleichungssysteme. Statt drei Gleichungssysteme getrennt einzugeben, könnte man die Lösung auch in einem einzigen Schritt ermitteln! Dazu ist ein Perspektiv-Wechsel nötig: Eigentlich suchen wir 6 Unbekannte zu 6 Gleichungen. Das Gleichungssystem hat folgende Gestalt:

a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	
0	1	0	0	0	0	-3
6	1	0	0	0	0	0
0	0	6	1	0	0	0
0	0	8	1	0	0	3
0	0	0	0	8	1	3
0	0	0	0	9	1	9

Tabelle 1

Abbildung 5 zeigt die zugehörige Koeffizientenmatrix A, in der reduzierten Zeilen-Stufenform lässt sich die Lösung bzw. lassen sich die gesuchten Koeffizienten direkt ablesen.

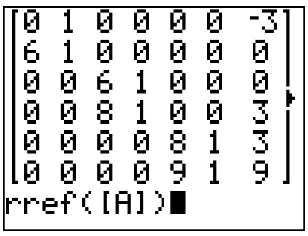

Abb.5

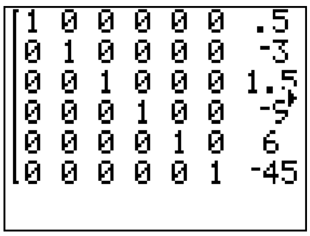

Abb.6

Wir haben zwei unbefriedigende Modellierungs-Ansätze: Die Interpolation durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades liefert kein geeignetes Modell für die Beplankung (weil mit dem Krümmungswechsel des Graphen auch Extrempunkte auftreten). Auch die Idee, (andere) Regressionsmodule des Rechners zu nutzen, muss in der Diskussion verworfen werden. Bei der Interpolation durch lineare Splines sind die Übergänge stetig, aber die Steigungen der Splines stimmen in den Übergangsstellen nicht überein.

Quadratische Splines

Es wäre sinnvoll, zusätzlich auch identische Steigungen der Teilfunktionen in den Übergangstellen zu fordern. Ein Schüler schlägt vor, Parabeln zu nutzen. Formuliert mit der neuen Begrifflichkeit versuchen wir nun, Koeffizienten für drei quadratische Splines

$s_1(x) = a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1$
$s_2(x) = a_2 \cdot x^2 + b_2 \cdot x + c_2$
$s_3(x) = a_3 \cdot x^2 + b_3 \cdot x + c_3$

zu bestimmen.

Von welchen Steigungsbedingungen wollen wir ausgehen? Dem Vorschlag einer Schülerin (Suheda) folgend, soll die Steigung des linearen Splines $s_1'(6)=0{,}5$ erhalten bleiben, die Steigungen von s_2 bzw. s_3 sollen im dritten Datenpunkt übereinstimmen. Zusätzlich zu den Interpolationsbedingungen in (1) fordern wir nun:

$$s_1'(6) = 0{,}5 = s_2'(6) \qquad (2)$$
$$s_2'(8) = ? = s_3'(8)$$

Wir haben neben den sechs Interpolationsbedingungen nun für den ersten und zweiten Teilspline je einen Steigungswert vorgegeben. Da die Steigung des dritten Teilsplines von der unbekannten Steigung $s_2'(8)$ abhängt, können wir nicht arbeitsteilig weiterarbeiten, um die Teilfunktionen zu ermitteln. In der Diskussion wird zudem deutlich: An den Übergangsstellen ergeben sich also zwei Bedingungen, $s_1'(6) = s_2'(6)$ und $s_2'(8) = s_3'(8)$, wir müssen aber mindestens einen Steigungswert vorgeben und haben dabei offenbar mehrere Möglichkeiten. Die Schülerinnen und Schüler wählen verschiedene Ansätze und gehen unterschiedlich vor, einige Resultate sind in Abb.7 bis Abb.10 dargestellt.

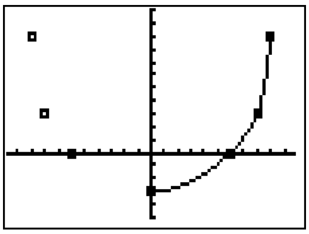
Abb.7

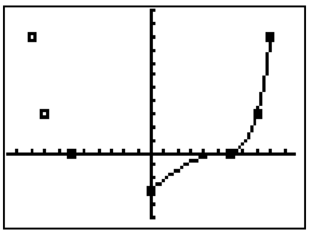
Abb.8

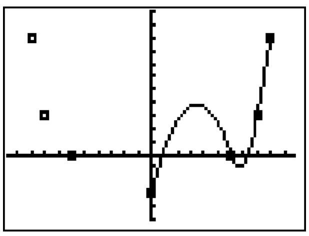
Abb.9

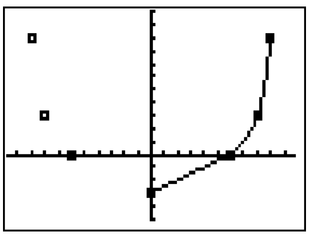
Abb.10

Der Ansatz von Suheda führt (überraschenderweise) zu einem *linearen* Spline $s_1(x)$ gemäß (*), dabei ist es gleichgültig, ob $s_1(0) = 0{,}5$ oder $s_1(6) = s_2(6) = 0{,}5$ vorgegeben wird (Abb.10). Eine andere Schülergruppe hat zu der Bedingung $s_3'(9) = 6$ ebenfalls einen linearen Teilspline $s_3(x)$ erhalten (vgl. Abb.9), zudem sind die ersten beiden Teilfunktionen ungeeignet im Sinne des Modellierungskontextes. Offenbar ergibt es keinen Sinn, die Steigung des linearen Splines zwischen den beiden Interpolationspunkten auf den quadratischen Spline (im Übergangspunkt) zu übertragen.
Die Lösung aus Abbildung 7 folgt aus dem Ansatz $s_1'(0) = 0$ und geht dabei von einem waagerechten Rumpfboden aus. Eine weitere Schülerin (Jennifer) geht von der Forderung $s_1'(6) = 0$ aus und erhält eine Lösung gemäß Abb. 8.

Es ist hier möglich, die gesuchten Koeffizienten der Teilfunktionen schrittweise zu ermitteln – nicht alle Schülerinnen und Schüler wählen einen Ansatz gemäß Tabelle 1. Jennifer hat für den ersten bzw. zweiten Teilspline jeweils zwei Interpolations- und eine Steigungsbedingung:

$s_1(0) = -3,\ s_1(6) = 0,\ s_1'(6) = 0$

$$\Rightarrow s_1(x) = -\frac{1}{12}x^2 + x - 3$$

$s_2(6) = 0,\ s_2(8) = 3,\ s_2'(6) = 0$

$$\Rightarrow s_2(x) = \frac{3}{4}x^2 - 9x + 27$$

Bevor wir den dritten Teilspline bestimmen können, müssen wir $s_2'(8)$ ermitteln, dann ergibt sich für die Koeffizienten des dritten Teilsplines ein Gleichungssystem aus:

$s_3(8) = 3,\ s_3(9) = 9,\ s_3'(8) = 3 = s_2'(8)$

$$\Rightarrow s_3(x) = 3x^2 - 45x + 171$$

Bei dieser Vorgehensweise müssen wir nacheinander drei Gleichungssysteme lösen. Eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern versucht, für die neun unbekannten Parameter ein „gemeinsames“ Gleichungssystem aufzustellen. Dabei bereitet insbesondere die letzte Zeile einige Schwierigkeiten (die mit Hinweisen gemeistert wird).

a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2	a_3	b_3	c_3	
0	0	1	0	0	0	0	0	0	-3
36	6	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	36	6	1	0	0	0	0
0	0	0	64	8	1	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	64	8	1	3
0	0	0	0	0	0	81	9	1	9
12	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	12	1	0	0	0	0	0
0	0	0	16	1	0	-16	-1	0	0

Tabelle 2

Wir halten fest: Wieder wird erweist sich diese Vorgehendweise als Alternative zur Lösung in Teilschritten. Das resultierende Gleichungssystem ist komplex und erfordert Konzentration bei der Eingabe. Dafür ist aber ein zwischenzeitliches Ausrechnen der Steigung nicht erforderlich. Im Unterschied zur Tabelle 1 sind die Gleichungen zu den drei

Teilsplines dabei nicht mehr unabhängig voneinander (vgl. letzte Zeile)!

Mit der Vorgabe unterschiedlicher Steigungswerte kommt man zu verschiedenen, aber nicht zwangsläufig sinnvollen Lösungen (ungeeigneter Verlauf des Modellgraphen) oder überraschenden Lösungen (keine quadratischen Splines). Um zu entscheiden, welche der Ansätze auf eine passenden Modellierung führt, brauchen wir Kriterien. Nachteilig bei der Interpolation mit quadratischen Splines ist in allen Lösungsvorschlägen, dass in den Übergangsstellen Krümmungssprünge vorliegen.

Kubische Splines

Anknüpfend an den Unterrichtszusammenhang (Trassierung) gehen wir an eine Optimierung unserer Modellierung. Dabei ist klar: Krümmungssprungfreie Übergänge erhalten wir, wenn zusätzlich zur ersten Ableitung auch die zweite Ableitung der Teilsplines in den Übergangspunkten übereinstimmen.

Formuliert mit der neuen Begrifflichkeit versuchen wir nun, Koeffizienten für drei kubischen Splines

$$s_1(x) = a_1 \cdot x^3 + b_1 \cdot x^2 + c_1 \cdot x + d_1$$
$$s_2(x) = a_2 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + c_2 \cdot x + d_2$$
$$s_3(x) = a_3 \cdot x^3 + b_3 \cdot x^2 + c_3 \cdot x + d_3$$

zu ermitteln. Wir haben neben den sechs Interpolationsbedingungen (1) und den zwei Steigungsbedingungen (2) nunmehr die Bedingungen

$$s_1''(6) = s_2''(6) \qquad (3)$$
$$s_2''(8) = s_3''(8)$$

zu erfüllen, dies sind 10 Gleichungen für 12 Unbekannte. Diese Situation kennen die Schülerinnen und Schüler im Prinzip schon – wir müssen zwei weitere Bedingungen angeben. Diese ergeben sich hier aus dem Kontext: Da wir ursprünglich von biegsamen Latten (Schiffsbau) ausgegangen sind, wird man für den ersten und letzten Datenpunkt einen krümmungsfreien Auslauf erwarten, also

$$s_1''(0) = 0 \qquad (4)$$
$$s_3''(0) = 0$$

ansetzen. Lassen sich die Koeffizienten der drei Teilfunktionen wieder schrittweise bestimmen? Für keinen Teilspline (4 gesuchte Koeffizienten) können wir genügend unabhängige Gleichungen angeben, immer müssen wir Bedingungen für andere Teilsplines berücksichtigen. Dies ist auch im Gleichungssystem für alle 12 Koeffizienten sichtbar, wie die nachfolgende Tabelle zeigt.

a_1	b_1	c_1	d_1	a_2	b_2	c_2	d_2	a_3	b_3	c_3	d_3	
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		-3
216	36	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	216	36	6	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	512	64	8	1	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0	0	512	64	8	1	3
0	0	0	0	0	0	0	0	729	81	9	1	9
108	12	1	0	-108	-12	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	192	16	1	0	-192	-16	1	0	0
36	2	0	0	-36	-2	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	48	2	0	0	-48	-2	0	0	0
0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	54	2	0	0	0

Tabelle 3

Als Lösung erhält man die in Abbildung 11 graphisch dargestellte Spline-Funktion, die Koeffizienten der Teilsplines ergeben sich, wenn wieder (vgl. Abb.5 bzw. Abb.6) mit Hilfe des TI-84 die reduzierte Zeilen-Stufen-Form der Matrix ermittelt wird. Die Teilsplines sind:

$$s_1(x) = -\frac{1}{184}x^3 + \frac{16}{23}x - 3$$
$$s_2(x) = \frac{73}{184}x^3 - \frac{333}{46}x^2 + \frac{1015}{23}x - \frac{2067}{23}$$
$$s_3(x) = -\frac{35}{46}x^3 + \frac{945}{46}x^2 - \frac{4097}{23}x - \frac{11565}{23}$$

Wir sind letztlich wieder bei der Verwendung ganzrationaler Funktionen angelangt, nutzen aber zur Interpolation der vier Datenpunkte drei Teilfunktionen (12 unbekannte Koeffizienten).

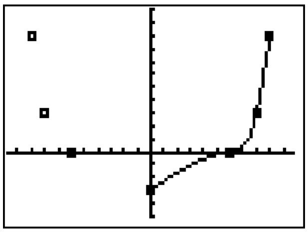

Abb.11

So können wir die sechs Interpolationsbedingungen (1) und die zwei Steigungsbedingungen aus (2) erfüllen sowie mit den beiden Bedingungen in (3) krümmungsruckfreie Übergänge realisieren (10 Gleichungen). Zwei weitere Gleichungen (4) folgen aus der Forderung, im ersten und letzten Punkt einen krümmungsfreien, geraden Auslauf zu realisieren, wie es der Kontext der biegsamen Latten erfordert. Eine bloße Interpolation liefert lediglich 6 Gleichungen für lineare Splines, bei der Interpolation mit quadratischen Splines können (müssen) wir zusätzlich zu knickfreien Übergängen einen Steigungswert vorgeben.

Schlussbemerkung

Der vorgestellte Unterrichtsgang ergibt sich keinesfalls „von selbst". An entscheidenden Stellen ist die Lehrkraft gefordert, den Schülerinnen und Schülern Argumentations-Strukturen anzubieten und Argumentationsebenen zu trennen. Eine Balance zwischen Instruktion und Konstruktion kann dennoch erreicht werden, da den Schülerinnen und

Schülern wichtige Erfahrungen in der selbstständigen Erprobung der Ansätze eröffnet werden können. Als besonderes Merkmal dieses Vorgehens wäre hervorzuheben, dass mit der tieferen Durchdringung im Unterricht die Komplexität der Modellierung (etwa hinsichtlich des Gleichungssystems in Tabelle 3) schrittweise und für Schülerinnen und Schüler nachvollziehbar (mit-) wächst. Als nachteilig könnte man insbesondere dabei bemängeln, dass sich die Modellierung mit quadratischen Splines vom eigentlichen Modellierungskontext entfernt, diese folgt eher einem didaktischen Interesse.

Quellen:

[1] Knechtel, H. (u.a.): mathe >open end<, Materialien für den Einsatz von Grafikrechnern und Computeralgebra, Teil 1: Differentialrechnung, Westermann, Braunschweig 2001

[2] Griesel H. (u.a.)(Hrsg.): Elemente der Mathematik, Niedersachsen; Schroedel, Braunschweig 2009

Autor:

Stefan Luislampe, Hannover
Ganztagsgymnasium Herschelschule Hannover
luislampe@googlemail.com