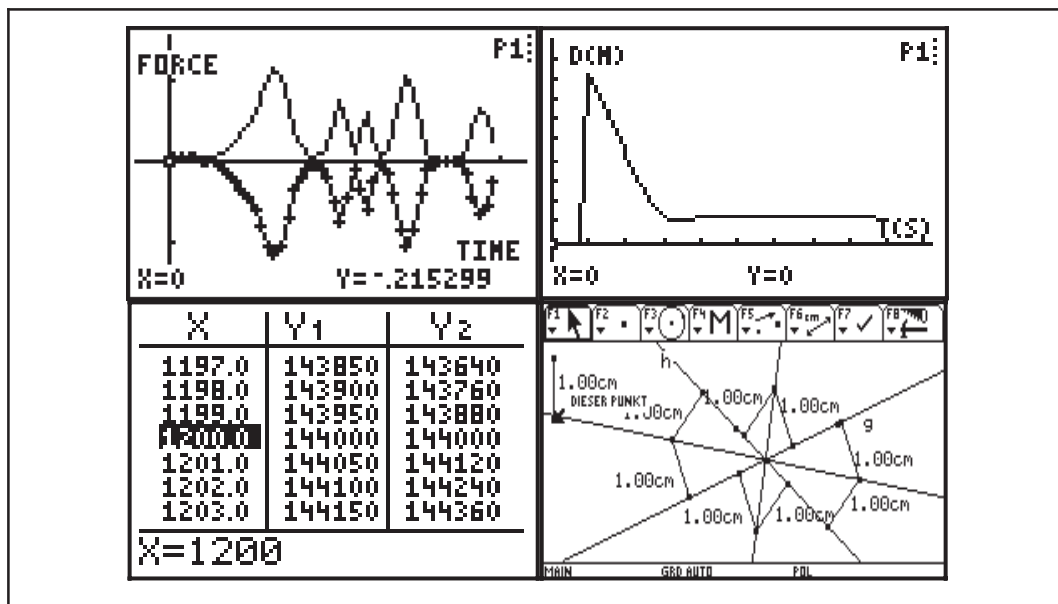


Materialien für TI-83 Plus, TI-84 Plus, TI-84 Plus Silver Edition,
TI-89 Titanium, Voyage™ 200

Graphikfähige Taschenrechner im Einsatz an bayerischen Realschulen

Unterrichtsbeispiele aus Mathematik, Physik und
Betriebswirtschaftslehre/Rechnungswesen



Andreas Erl, Rupert Ernhöfer,
Rudolf Herdtweck, Christoph Sobotta



**Graphikfähige Taschenrechner
im Einsatz an
bayerischen Realschulen**

Andreas Erl
Rupert Ernhofer
Rudolf Herdtweck
Christoph Sobotta

© 2005 Texas Instruments

Dieses Werk wurde in der Absicht erarbeitet, Lehrerinnen und Lehrern geeignete Materialien für den Unterricht an die Hand zu geben. Die Anfertigung einer notwendigen Anzahl von Fotokopien für den Einsatz in der Klasse, einer Lehrerfortbildung oder einem Seminar ist daher gestattet. Hierbei ist auf das Copyright von Texas Instruments hinzuweisen. Jede Verwertung in anderen als den genannten oder den gesetzlich zugelassenen Fällen ist ohne schriftliche Genehmigung von Texas Instruments nicht zulässig.

Layout: Texas Instruments

Druck: Pinsker Druck und Medien

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	3
Graphikfähige Taschenrechner im Einsatz an bayerischen Realschulen	4
Messwerterfassung im Physikunterricht – Das Wechselwirkungsprinzip	5
Physik im Schulhof – Radfahren im Unterricht?	10
Ermittlung der Gewinnschwelle – Break even point	14
Es fährt ein Zug nach Nirgendwo – Ermittlung von Gleichungen linearer Funktionen... ..	17
Alle Neune wie auf einer Schnur – Das 3. Kepler'sche Gesetz	20
Geometrische Ortslinien – Punkte mit gleichem Abstand von Geraden	25
Abbildung durch Parallelverschiebung	29
Zinsen und Zinsen der Zinsen – Anwendung der Tabellenkalkulation	33

Graphikfähige Taschenrechner im Einsatz an bayerischen Realschulen

„Die Mathematik ist eine Art Spielzeug, welches die Natur uns zuwarf, um uns in diesem Jammertal zu trösten und zu unterhalten.“

Jean-Baptiste le Rond d'Alembert

Immer wieder wird gefordert, dass die Schülerinnen und Schüler im Rahmen ihrer schulischen Ausbildung mehr Kompetenzen im Umgang mit neuen Medien erlangen. Dies verlangt auch der Lehrplan der bayerischen Realschulen an vielen Stellen. Da heute die Klassenräume noch nicht über hinreichend Computer verfügen, muss man zur Erfüllung dieser Forderungen in die Computerräume wechseln. Die damit verbundenen logistischen Probleme behindern seit langem den Unterricht mit neuen Medien. Einen Ausweg bietet hier der graphikfähige Taschenrechner, der an den bayerischen Realschulen als Hilfsmittel erlaubt ist. Mit diesem Band soll gezeigt werden, dass sich der graphikfähige Taschenrechner mit Erfolg nicht nur im Mathematikunterricht, sondern auch im Unterricht in den Fächern Betriebswirtschaftslehre/Rechnungswesen (BwR) und Physik gewinnbringend einsetzen lässt.

In diesem Band sollen die Einsatzmöglichkeiten verschiedener graphikfähiger Taschenrechner in den genannten Unterrichtsfächern exemplarisch an je einem

Beispiel gezeigt werden. Im Vordergrund sollen dabei die Stärken des graphikfähigen Taschenrechners stehen, nämlich das Verdeutlichen und das Visualisieren von Sachverhalten und Zusammenhängen.

Insbesondere würden sich die Autoren freuen, wenn es mit dem vorliegenden Band gelänge, den Lehrerinnen und Lehrern an den bayerischen Realschulen die Freude am Unterricht mit dem graphikfähigen Taschenrechner zu wecken, oder gar noch zu vergrößern. Deshalb ist es auch geplant im kommenden Schuljahr zusätzlich Einzelbände zum Einsatz in den einzelnen Unterrichtsfächern erscheinen zu lassen.

Diese Handreichung ersetzt nicht das Handbuch zu den graphikfähigen Taschenrechnern, in dem alle Möglichkeiten des Rechners beschrieben sind. Es geht vielmehr darum, mit möglichst wenig Aufwand ein unterrichtsorientiertes Kennenlernen des Rechners zu ermöglichen und neue Impulse für den Unterricht zu setzen.

Die Autoren der hier veröffentlichten Beiträge werden jeweils bei den einzelnen Arbeiten genannt.

„Es ist nicht gesagt, dass es besser wird, wenn es anders wird, wenn es aber besser werden soll, muss es anders werden.“

Georg Christoph Lichtenberg

München, im Juli 2005

Messwerterfassung im Physikunterricht – Das Wechselwirkungsprinzip

Andreas Erl

Ein hervorragend geeignetes Hilfsmittel, sowohl zu Demonstrationszwecken via Overheadprojektion, als auch für Gruppenarbeiten in Schülerübungen, stellt das Messwerterfassungssystem TI-84 Plus + CBL 2 (Calculator Based Laboratory 2) + Sensoren dar.

Dabei werden jedem CBL 2 jeweils ein Temperatur-, ein Spannungs- und ein Lichtstärkesensor beigelegt. Darüber hinaus sind weit über 40 zusätzliche Sensoren – z. B. von der Firma Vernier – im Handel erhältlich.

Als kleinen Einstieg in die low-cost-Messwerterfassung soll nun ein Demonstrationsexperiment zum Verständnis des Wechselwirkungsgesetzes vorgestellt werden.

Das Wechselwirkungsprinzip – oder: „Darf ich Ihnen die Hand schütteln?“

Aus dem (bayerischen) Lehrplan:

“Die Schüler lernen die Grundgrößen Kraft und Masse kennen und verfügen damit über fundamentale Kenntnisse der Mechanik. Die Auseinandersetzung mit dem Vektorcharakter der Kraft schafft die Basis für das Verständnis des Wechselwirkungsprinzips als grundlegendes physikalisches Prinzip.“ (Jgst. 7 Wpfg I)

Alleine diese zwei Sätze rechtfertigen einen bewussten Einsatz eines schnell und leicht einsetzbaren Hilfsmittels: die taschenrechnergestützte Messwerterfassung.

Verwendete Hard- und Software

GTR (TI-84 Plus bzw. TI-83 Plus)

CBL 2

2 Kraftsensoren der Firma Vernier

(Dual-Range Force Sensor)

PHYSICS-Applikation (kurz: PHYS-App)

(Stand: 09.09.2002) der Firma Vernier

Versuchsaufbau

Für diesen Versuch sind zwei Kraftsensoren notwendig. Kraftsensor 1 wird am CBL 2 am Channel 1 (~ CH1), Kraftsensor 2 am Channel 2 (~ CH2) angeschlossen. Das CBL 2 wird mit dem GTR verbunden (Gerät unter dem GTR – siehe Abb. 1).



Abb. 1: Angeschlossene Sensoren

Die beiden Kraftsensoren hängen mittels einer reißfesten Schnur (nur auf Zug), oder

direkt (auf Zug und Schub – siehe Abb. 2) aneinander.



Abb. 2: gekoppelte Kraftsensoren

Versuchsdurchführung

Um mit den Kraftsensoren Messwerte in der erreichbaren Genauigkeit erfassen zu können, müssen diese im Normalfall entsprechend ihrer Orientierung im Gebrauch (aufrecht, horizontal bzw. schräg) eingerichtet (justiert) werden. In diesem Versuch reicht es die Tendenzen zu zeigen, damit kann auf diesen Schritt – und die damit erreichbare Genauigkeit – verzichtet werden. Die erfassten Messwerte werden nicht weiterverarbeitet.

Allerdings muss einer der beiden Kraftsensoren genau „andersherum“ arbeiten: Diese Messwerte müssen, entsprechend dem Vektorcharakter der Kraft, in die entgegen gesetzte Richtung zeigen, also mit einem negativen Vorzeichen versehen werden. Dies erreicht man durch geeignete Kalibrierung der Sensoren. Aber der Reihe nach ...

Wir starten die PHYS-App durch drücken der [APPS]-Taste, wählen PHYSICS aus und bestätigen durch [ENTER]. Damit erscheint der Intro-Bildschirm (Abb. 3):

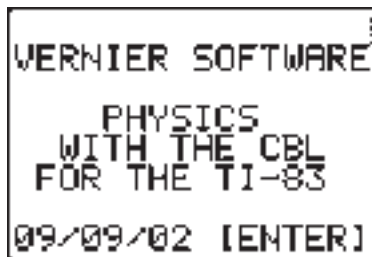


Abb. 3

Über das Hauptmenü (Abb. 4) gelangt man in die entsprechenden Einstellmöglichkeiten um für jeden Versuch die optimale Datenerfassung zu erhalten.

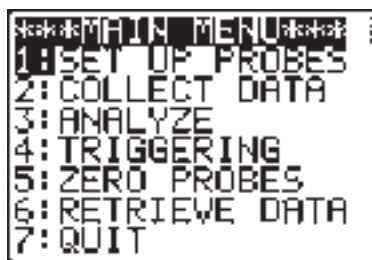


Abb. 4

[1] SET UP PROBES drücken um die verwendeten Sensoren einzurichten, und Anzahl der Sensoren eingeben (Abb. 5):

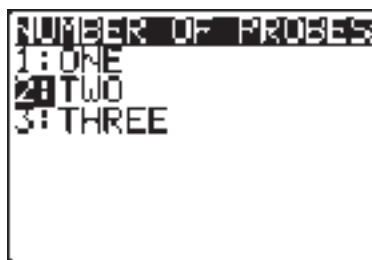


Abb. 5

Jetzt [2] TWO drücken, da zwei Sensoren verwendet werden. Im nächsten Menüpunkt erscheint eine Liste der am meisten verwendeten Sensoren (Abb. 6). Hier wählt man für beide Sensoren jeweils den Unterpunkt [2] FORCE.

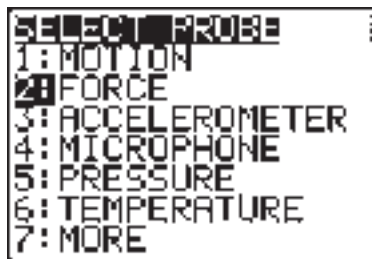


Abb. 6

Da an das CBL 2 eine Reihe von Kraftsensoren angeschlossen werden können, muss man im Kraftsensormenü den entsprechenden Sensor (3) DUAL-RANGE 10N auswählen ... (Abb. 7).

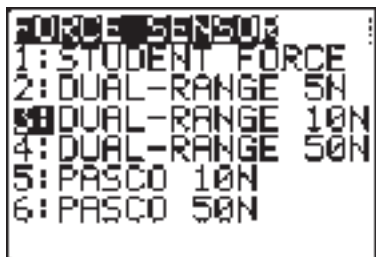


Abb. 7

... und ihn dann auch passend einstellen (Schiebeschalter an der Gehäuseseite, siehe Abb. 8).



Abb. 8: Gehäuseoberseite Kraftsensor

Nach dem Einrichten des ersten Sensors, muss dieser noch seiner Verwendung nach kalibriert werden. Dazu in der nächsten Abbildung (Abb. 9) den Menüpunkt (2) PERFORM NEW auswählen.



Abb. 9

Den Kraftsensor 1 ohne zusätzliches Massstück aufrecht halten (mit dem Haken nach unten) und dabei die Anzeige beo-

bachten. Bleibt die Anzeige einigermaßen konstant die [+]-Taste drücken und den zugehörigen Referenzwert (hier: 0, weil ohne zusätzliche Masse) eingeben (Abb. 10).

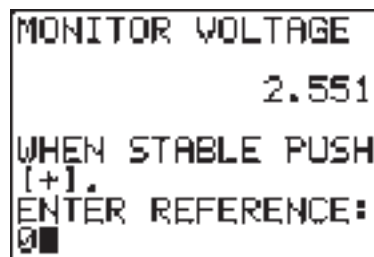


Abb. 10

Da alle Vernier-Sensoren lineare Sensoren sind, reichen zwei Messungen aus um die Kalibrierungsgleichung zu erzeugen. Ein Messwertpaar ist bereits aufgenommen. Nun hängen wir ein 500 g Massstück den Sensor 1 in selbe Lage wie oben an, warten wieder bis sich die Anzeige stabilisiert hat, drücken ebenfalls wieder die [+]-Taste und geben die zugehörige Gewichtskraft von 4,9 N ein (Abb. 11).

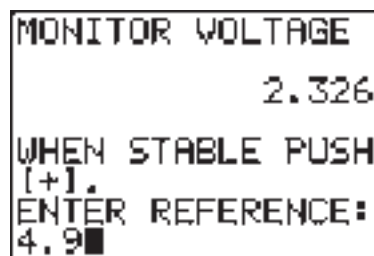


Abb. 11

Der GTR liefert die Kalibrierungsgleichung zurück – der Sensor ist einsatzbereit.

Beim 2. Kraftsensor verfährt man genauso. Um den Kraftsensor in seiner Anzeige „umzudrehen“ (Graph unterhalb der Zeitachse) gibt man an der entsprechenden Stelle nicht 4,9 sondern -4,9 (N) ein.

Damit sind die vorbereitenden Arbeiten erledigt (wenn man sich die Kalibrierungsgleichungen die der GTR zurückgibt auf-

schreibt, kann man sich in Zukunft diesen Schritt sparen und im Calibrationmenü den Punkt [3] MANUAL ENTRY auswählen und dort direkt eingeben).

Im Folgenden wird die Messwernerfassung vorbereitet: Im Main Menu den Punkt [2] COLLECT DATA auswählen (Abb. 12).

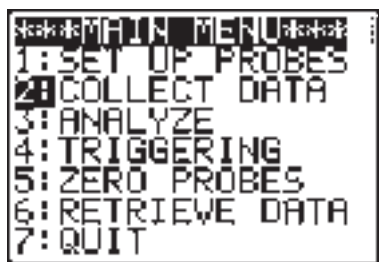


Abb. 12

Anschließend nochmals [2] TIME GRAPH drücken, um ein Kräfte-Zeit-Diagramm zu erhalten (Abb. 13).



Abb. 13

Im nächsten Screen wird die Samplingrate, also das Zeitintervall nach dem gemessen werden soll und die Anzahl der Messereignisse eingegeben. Hier empfiehlt es sich folgende Daten zu verwenden Abb. 14):

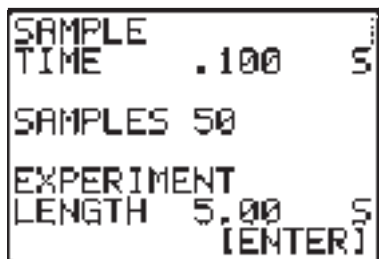


Abb. 14

Nach drücken der [ENTER]-Taste ließen sich eventuelle Fehler bereinigen. Ansonsten ist der Versuch jetzt startklar: Die beiden Kraftsensoren werden auf den Labortisch gelegt und aneinanderghängt.

Den Versuch starten ([ENTER]) und vorsichtig an einem der beiden Sensoren ziehen (oder auch schieben). Nach dem Ablauf der voreingestellten Zeit, werden die Messwerte automatisch vom CBL 2 zum GTR übertragen und dort in Listen abgelegt. Nach der Bestätigung ([ENTER]) gelangt man direkt in das SELECT GRAPH Menü. Dort können die beiden Kraft-Zeit-Graphen gleichzeitig im Display angezeigt werden (Abb. 17). Aus dem Menü [3] BOTH auswählen und mit [ENTER] bestätigen (Abb. 15 und Abb. 16):



Abb. 15

Die Eingabeaufforderung im nächsten Display (Abb. 16) ist mit der [ENTER]-Taste zu bestätigen.



Abb. 16

Es werden nun die beiden Graphen simultan gezeichnet.

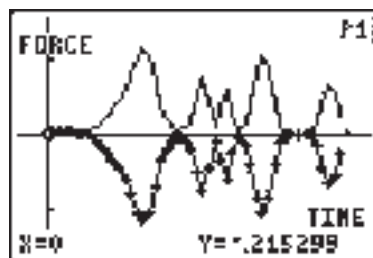


Abb. 17

Versuchsauswertung

In der Abbildung 17 erkennt man die beiden Graphen, die die Kraftsensoren liefern, sehr gut. Hier wird auf einen Blick die Symmetrie zur Zeitachse deutlich. In diesem Versuch wurde nur auf Zug gearbeitet.

Wird mit den beiden Kraftsensoren auch auf Schub gearbeitet, so erhält man folgende Abbildung 18:

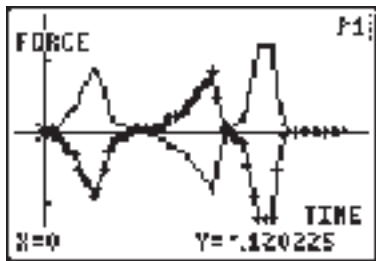


Abb. 18

Zu beachten ist in diesem Screenshot, dass bei dieser Versuchsdurchführung der am Kraftsensor ausgewählte Messbereich überschritten wurde. Man erkennt dies daran, dass der Graph an dieser Stelle horizontal abgeschnitten wirkt (dritter Berg, die Spitze fehlt).

Weiterführende Fragen und Versuche im Unterricht

- ◆ Als Variation einen der beiden Kraftsensoren mittels einer Tischklemme fixieren. Ist dann das Ergebnis ebenso?
- ◆ Einen Kraftsensor aufhängen, den zweiten an den ersten hängen – Was ist zu beobachten? Erwartetes Ergebnis?
- ◆ Im Unterricht nur den Versuch „auf Zug“ durchführen, und den Schülern einen Ausdruck für das Schulheft mitgeben. In der nächsten Stunde zu Beginn eine Folie des Versuches „auch auf Schub“ auflegen und im

Klassenrahmen diskutieren: „Was ist hier passiert?“ „Wie hat sich die Versuchsdurchführung geändert?“

◆ ...?

Autor: Andreas Erl

Kontakt: andreas.erl@t-online.de

Physik im Schulhof – Radfahren im Unterricht?

Rudolf Herdtweck

Vorbemerkung und Zielsetzung

Das Messwerterfassungssystem CBR mit TI-83 Plus/84 Plus ermöglicht Versuche außerhalb des Physiksaals. Solche Freifeldversuche motivieren Schüler und Schülerinnen eher als die Versuche aus der physikalischen Sammlung. Diese Versuche haben auch den Vorteil, dass die Alltagserfahrungen der Jugendlichen genutzt werden können. So haben sie eine Vorstellung von den Geschwindigkeiten oder den Bremswegen beim Fahrradfahren. Wenn sie dann im Physikunterricht diese Größen messen, können die gemessenen Werte Situationen oder Ereignissen aus der eigenen Erfahrung zugeordnet werden. Die Ergebnisse dieser Versuche lassen auch unmittelbar Schlussfolgerungen für die Alltagswelt zu, denn jeder Jugendliche ist auch Verkehrsteilnehmer. Untersuchungen von Geschwindigkeiten, Bremswegen und Beschleunigungen sind deshalb für viele von Interesse und sicherlich auch eine gute Grundlage für Diskussionen über das Verhalten im Straßenverkehr.

Unterrichtsverlauf

Ein Schüler befestigt den Ultraschallsensor mit der Schraubzwinde am Lenker seines Fahrrades, ebenso den graphikfähigen Taschenrechner, der durch ein Kabel mit dem Ultraschallsensor verbunden wird (Abb. 1).

Zur Versuchsdurchführung fährt man mit dem Fahrrad auf eine Hauswand zu und



Abb. 1

führt einen Bremsvorgang durch. Der Ultraschallsensor misst dabei den jeweiligen Abstand zwischen Fahrrad und Hauswand.

Auf dem Rechner wird das Programm RANGER() gestartet, indem man das APPS-Menü anwählt und dort den Menüpunkt CBL/CBR nimmt.

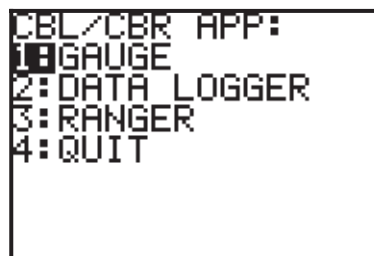


Abb. 2

Weiter kommt man in das Menü CBL/CBR APP: Menüpunkt [3] RANGER (Abb. 2) startet dann das Programm RANGER(). Dort kann der Benutzer zunächst wählen, ob er eine Realtime-Beobachtung wünscht, oder ob man die Messzeit individuell einstellt. Die zweite Möglichkeit ist günstiger, weil dann vom Programm auch die Geschwindigkeit und die Beschleunigung berechnet werden.

Diese beiden Größen werden später benötigt. Bei dem Versuch soll auf ein großes Hindernis (Hauswand) zugefahren werden, das den Schall gut reflektiert.

Um den Versuch durchzuführen, fährt ein Schüler aus ca. 15 m Entfernung auf eine Hauswand zu. Etwa 7 m vor der Hauswand startet er die Messung (durch Drücken der **ENTER**-Taste) und bremst anschließend das Fahrrad ab. Der Bremsweg ist im Allgemeinen kleiner als 2 m, so dass ein Bremsversagen keine Katastrophe bedeuten würde. Die Messdaten können nun den Schülern auf ihre Rechner überspielt werden. So können alle Schüler die folgenden Schritte nachvollziehen.

Man erhält dann beispielsweise ein s-t-Diagramm (Abb. 3). Der Abstand von der Wand wird anfangs nicht korrekt gemessen, weil die Entfernung noch zu groß ist.

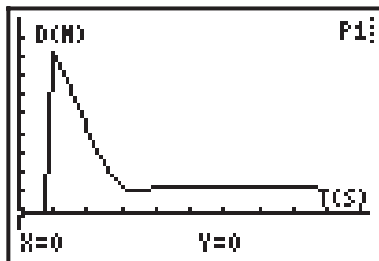


Abb. 3

Außerdem sieht man, dass der Schüler am Ende des Bremsvorgangs noch ein bisschen zurückgegangen ist, was durch das Aufheben des „Taucheffektes“ zustande kommt.

Das Programm bietet nun die Möglichkeit, den „interessanten“ Teil des Diagramms herauszuschneiden. Dann erhält man dieses s-t-Diagramm (Abb. 4):

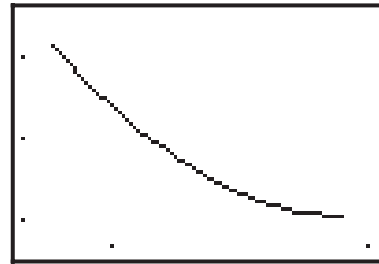


Abb. 4

Offensichtlich ist der Zusammenhang zwischen der Entfernung und der Zeit nicht linear. Die Diskussion mit den Schülern lässt einen quadratischen Zusammenhang vermuten, zumal der Kurvenverlauf einer Parabel aus dem Mathematikunterricht bekannt ist.

Nun bietet das Programm die Möglichkeit, durch die Messpunkte mit Hilfe von quadratischer Regression eine Ausgleichskurve zu legen. Dazu geht man in das STAT Menü (Aufruf durch Drücken der **STAT**-Taste) und wählt **CALC** aus. Anschließend **5** QuadReg. Dann muss man angeben zwischen welchen Listen die Regression berechnet werden soll und als welche Funktion sie anschließend zur Verfügung stehen soll. Also: QuadReg L1, L2, Y1. Die Ergebnisse zeigen die beiden folgenden Abbildungen (Abb. 5 und Abb. 6):

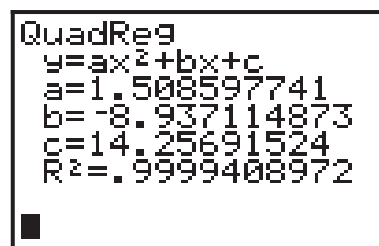


Abb. 5

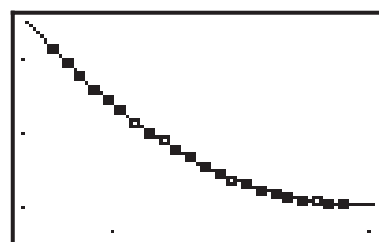


Abb. 6

Die Ausgleichskurven sind im Lehrplan nicht vorgesehen, gleichwohl machen die Schüler bei der herkömmlichen graphischen Auswertung auch nichts anderes, denn sie legen durch die Messwerte eine Kurve, die „möglichst gut passt“.

Hier hat man nun den Vorteil, dass man die Gleichung der Parabel erhält und dazu noch das Bestimmtheitsmaß R^2 , das ein Maß dafür ist, wie gut die Regressionskurve durch die Messpunkte verläuft. Würden alle Messwerte auf der Regressionskurve liegen, dann wäre $R^2 = 1$.

Demzufolge überrascht es auch nicht, dass die Ausgleichskurve „sehr gut“ durch die Messwerte verläuft. Somit haben wir schon unser erstes Teillernziel erreicht:

$$s \sim t^2$$

Das Programm RANGER() berechnet nun aus den Streckendifferenzen und den zugehörigen Zeitdifferenzen die Geschwindigkeiten. Man erhält dann das folgende Diagramm (Abb. 7):

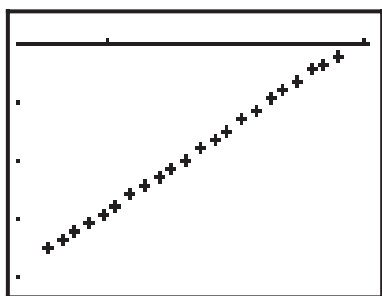


Abb. 7

Hier überrascht zunächst, dass die Geschwindigkeitswerte am Anfang negativ sind und dann bis zum Wert 0 m/s ansteigt. Dies liegt daran, dass der Abstand zur Wand während der Messung abnimmt. Deswegen sind die Änderung der Weglänge und damit auch die Geschwindigkeit negativ. Wenn diese Überlegung den Schü-

lern zu schwer fällt, könnte man eine Koordinatentransformation der Messwerte durchführen. Diesmal liegt offensichtlich ein linearer Zusammenhang vor, daher führt man diesmal eine lineare Regression mit Hilfe des STAT Menüs durch. R^2 ist auch diesmal wieder fast 1! Und die Ausgleichsgerade passt ausgezeichnet durch die Messwerte (Abb. 8 und Abb. 9).

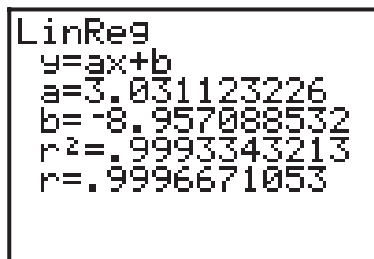


Abb. 8

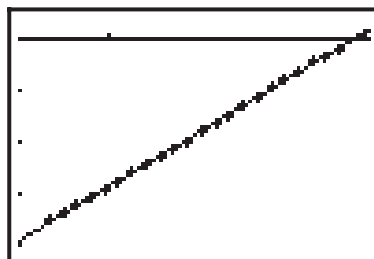


Abb. 9

Damit erreicht man auch das zweite Teillernziel:

$$v \sim t$$

Das bedeutet, dass die Beschleunigung konstant gewesen sein muss. Nun hat das Programm RANGER() mit Hilfe der Geschwindigkeitsdifferenzen und den zugehörigen Zeitdifferenzen auch die Beschleunigung berechnet. Natürlich muss man sich dabei auch im Klaren sein, dass sich Messfehler durch die Rechnung nun schon zum zweiten Male fortpflanzen. Man erhält dann das folgende Diagramm (Abb. 10):

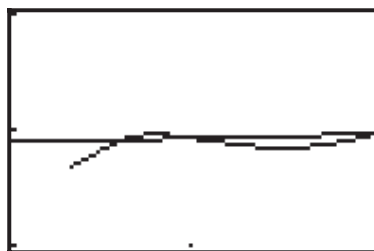
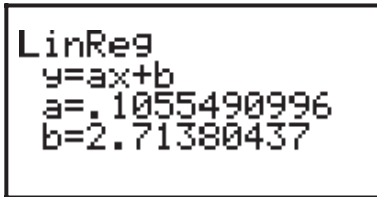


Abb. 10

Auch in diesem Falle kann man eine Regressionsgerade berechnen lassen und man erhält praktisch eine Parallele zur Zeitachse im Abstand 2,7 (Abb. 11).



```

LinReg
y=ax+b
a=.1055490996
b=2.71380437

```

Abb. 11

Das bedeutet, dass die Beschleunigung $2,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ beträgt, und aus den vorher schon besprochenen Gründen diesmal einen positiven Wert hat.

Aus der Steigung der Geraden im v-t-Diagramm lässt sich auch der Wert für die Beschleunigung ablesen: $3,03 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Ebenfalls möglich ist die Bestimmung der Beschleunigung aus dem s-t-Diagramm:

$\frac{a}{2} = 1,508 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow a = 3,02 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Dies ist eine sehr schöne Übereinstimmung!

Erfahrung und Bewertung

Die Schüler sind alleine durch die Tatsache, dass der Physikunterricht auch außerhalb des Physiksaales stattfinden kann und durch den starken Bezug zur Realität wie auch durch die Eigentätigkeit hoch motiviert. Voraussetzung ist allerdings der kontinuierliche Einsatz des Rechners zur Versuchsauswertung im Physikunterricht und die damit erworbene Sicherheit im Umgang mit dem Gerät und dem Programm.

Die Diskussion über die quadratische Abhängigkeit des Bremsweges von der Anfangsgeschwindigkeit und die damit ver-

bundenen Sicherheitsabstände im Straßenverkehr hat viele Schüler überrascht.

Weiterführende Einsatzmöglichkeiten

Hat man mehrere Ultraschallsensoren zur Verfügung, so kann man den Versuch abwandeln, indem man beispielsweise die Anfangsgeschwindigkeit variiert. Man kann dann die Abhängigkeit des Bremsweges von der Anfangsgeschwindigkeit untersuchen. Weitere Variationsmöglichkeiten sind die Untersuchung der Abhängigkeit von der Masse (anderer Schüler) oder von der Bremskraft (anderes Fahrrad).

Autor: Rudolf Herdtweck

Kontakt: rudolfherdtweck@web.de

Ermittlung der Gewinnschwelle – Break even point

Rupert Ernhofer

Möbio-Möbel verkauft Phonowagen zu einem Listenverkaufspreis von 120,00 € netto. Die variablen Kosten betragen 50,00 € je Stück und die Fixkosten 84.000,00 €. Wie viele Phonowagen muss Möbio-Möbel herstellen und verkaufen, damit die Gewinnschwelle überschritten wird?

Rechnerische Lösung

Nettoverkaufserlös/Stück	120,00 €
- Variable Kosten/Stück	50,00 €
Deckungsbeitrag/Stück	70,00 €

$$\text{Gewinnschwelle} = \frac{\text{Fixkosten}}{\frac{\text{Deckungsbeitrag}}{\text{Stück}}}$$

$$\text{Gewinnschwelle} = \frac{84.000,00 \text{ €}}{70,00 \frac{\text{€}}{\text{Stück}}}$$

$$\text{Gewinnschwelle} = 1200 \text{ Stück}$$

Graphische Lösung

Zur Ermittlung der graphischen Lösung benötigt man die Selbstkostengerade und die Nettoverkaufspreisgerade.

$$\text{SK} : y = 50 \cdot x + 84000$$

$$\text{NVP} : y = 120 \cdot x$$

Mit der $\boxed{Y=}$ -Taste wird der Y-Editor aufgerufen. Hier ist es möglich maximal zehn Funktionsgleichungen einzugeben. Sie

sind mit Y_1 bis Y_0 durchnummeriert (Abb. 1).

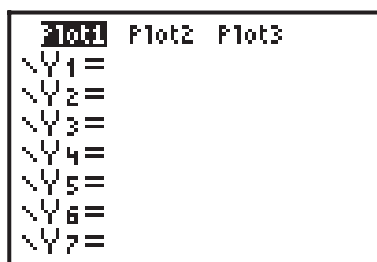


Abb. 1

Zur Eingabe der ersten Gleichung drückt man folgende Tasten:

$\boxed{5}\boxed{0}\boxed{X,T,\theta,n}\boxed{+}\boxed{8}\boxed{4}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0}$ und zum Abschluss der Eingabe $\boxed{\text{ENTER}}$ (Abb. 2).

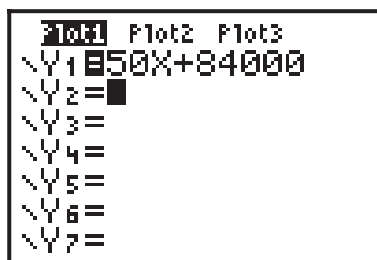


Abb. 2

Bevor der Graph der Funktionsgleichung gezeichnet werden kann, muss noch der Bereich des Bildschirms eingestellt werden. Nach dem Betätigen der $\boxed{\text{WINDOW}}$ -Taste wird der rechte Bildschirm gezeigt. Jede Eingabe in jeder Zeile wird mit $\boxed{\text{ENTER}}$ abgeschlossen (Abb. 3).

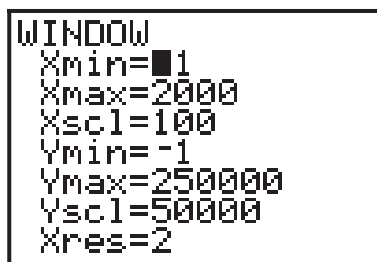


Abb. 3

Nach dem Betätigen der $\boxed{\text{GRAPH}}$ -Taste wird der Graph der eingegebenen Funktions-

gleichung in dem gewählten Fensterabschnitt gezeichnet (Abb. 4).

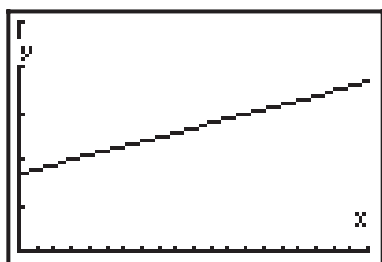


Abb. 4

Zur Eingabe der zweiten Gleichung drückt man folgende Tasten:

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{X,T,\theta,n}$ und zum Abschluss der Eingabe $\boxed{\text{ENTER}}$ (Abb. 5).

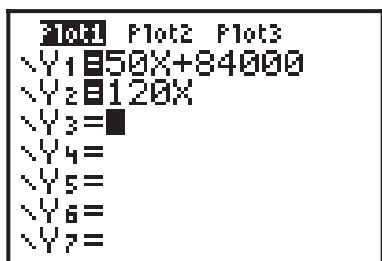


Abb. 5

Die x-Koordinate des Schnittpunkts der beiden Geraden ist die gesuchte Gewinnschwelle.

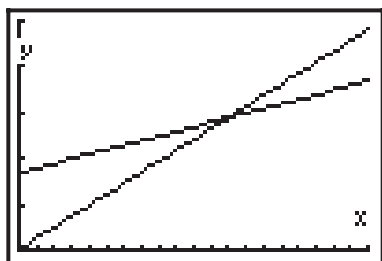


Abb. 6

Mit der $\boxed{\text{TRACE}}$ -Taste ist es möglich sich auf den beiden Graphen zu bewegen und gleichzeitig werden die zugehörigen Koordinaten angezeigt. Zwischen den Graphen kann man mit den beiden $\boxed{\blacktriangle}$ und $\boxed{\blacktriangledown}$ Tasten wechseln. Um sich verschiedene Koordinaten des Graphen anzuzeigen zu lassen, verwendet man die $\boxed{\blacktriangleleft}$ und $\boxed{\blacktriangleright}$ Tasten (Abb. 6). Mit $\boxed{2\text{nd}}\boxed{\text{CALC}}$ erhält man das unten abgebildete Menü (Abb. 7).

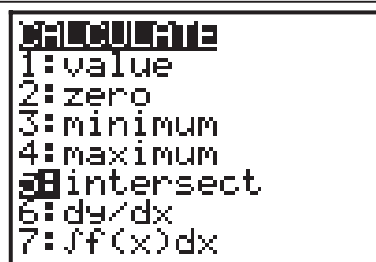


Abb. 7

Hier wählt man die Option $\boxed{5}$ intersect. Das Rechnerprogramm fragt nach dem ersten Graphen (First curve?), dem zweiten Graphen (Second curve?) und nach der wahrscheinlichen Lage des Schnittpunkts (Guess?) (Abb. 8 – Abb. 10).

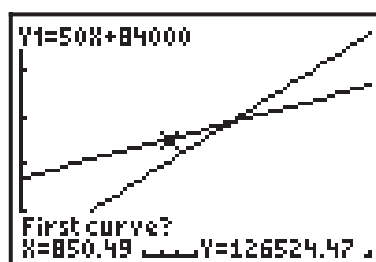


Abb. 8

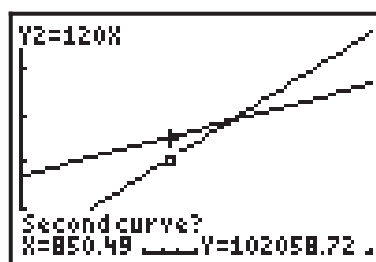


Abb. 9

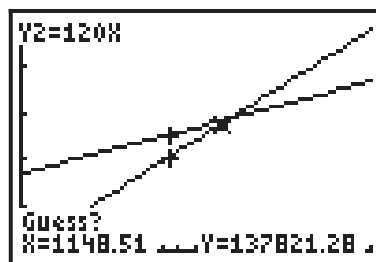


Abb. 10

Mit den Cursortasten und der $\boxed{\text{ENTER}}$ -Taste werden diese Fragen beantwortet.

Die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden werden wie in der Abbildung 11 angezeigt: S(1200|144000).

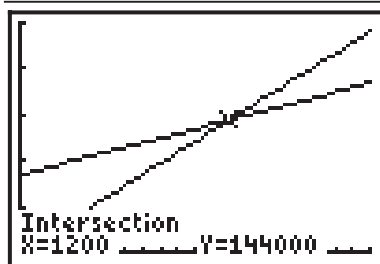


Abb. 11

Der x-Wert ist die gesuchte Gewinnschwelle.

Der Cursor befindet sich auf dem Schnittpunkt und am unteren Bildschirmrand werden die x- und y-Koordinaten des Schnittpunktes angezeigt.

Zu jeder Funktionsgleichung gehört eine Wertetabelle. Die zu den beiden Graphen gehörenden Wertetabelle kann man sich über $\boxed{2nd}[TABLE]$ anzeigen lassen (Abb. 12).

X	Y ₁	Y ₂
1197.0	143850	143640
1198.0	143900	143760
1199.0	143950	143880
1200.0	144000	144000
1201.0	144050	144120
1202.0	144100	144240
1203.0	144150	144360

X=1200

Abb. 12

Algebraische Lösung

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = 50 \cdot x + 84000 \\ \wedge y = 120 \cdot x \end{cases} & \mathbb{G} = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 120 \cdot x = 50 \cdot x + 84000 \\ \wedge y = 120 \cdot x \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 70 \cdot x = 84000 \\ \wedge y = 120 \cdot x \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1200 \\ \wedge y = 120 \cdot 1200 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1200 \\ \wedge y = 144000 \end{cases} & \mathbb{IL} = \{(1200 | 144000)\} \end{aligned}$$

Aufgabenvarianten

AV1: Möbio-Möbel verkauft Phonowagen zu einem Listenverkaufspreis von 120,00 € netto. Die variablen Kosten betragen 50,00 € je Stück und die Fixkosten 80.000,00 €. Wie viele Phonowagen muss Möbio-Möbel herstellen und verkaufen, damit die Gewinnschwelle überschritten wird?

AV2: Möbio-Möbel verkauft Phonowagen zu einem Listenverkaufspreis von 125,00 € netto. Die variablen Kosten betragen 50,00 € je Stück und die Fixkosten 84.000,00 €. Wie viele Phonowagen muss Möbio-Möbel herstellen und verkaufen, damit die Gewinnschwelle überschritten wird?

AV3: Möbio-Möbel verkauft Phonowagen zu einem Listenverkaufspreis von 120,00 € netto. Die variablen Kosten betragen 55,00 € je Stück und die Fixkosten 84.000,00 €. Wie viele Phonowagen muss Möbio-Möbel herstellen und verkaufen, damit die Gewinnschwelle überschritten wird?

Autor: Rupert Ernhofer

Kontakt: ernhofer@email.de

Es fährt ein Zug nach Nirgendwo – Ermittlung von Gleichungen linearer Funktionen

Rupert Ernhofer

Die Bahnverbindung zweier Städte A und B ist 1155 km lang. Ein Zug fährt von B nach A und benötigt dazu 11 Stunden. Von A fährt 2,5 Stunden später ein Zug nach B und benötigt für die Strecke 14 Stunden. Wo und wann treffen sich beide Züge?

(Quelle: Mathematik für Realschulen, Verlag Diesterweg)

Graphische Lösung

Im mathematischen Modell bedeutet das, dass der Zug von B nach A vom Punkt mit den Koordinaten (0|1155) zum Punkt mit den Koordinaten (11|0) fährt. Um dies graphisch darzustellen benötigt man die Geradengleichung, welche im $\overline{Y=}$ Editor eingegeben werden kann. Zur Bestimmung der Geradengleichung verwendet man die Listenfunktion des TI-83 Plus/84 Plus.

Mit $\overline{\text{STAT}}$ wird der Listengenerator gestartet. Hier wählt man die Option $\overline{1}$ Edit aus (Abb. 1).

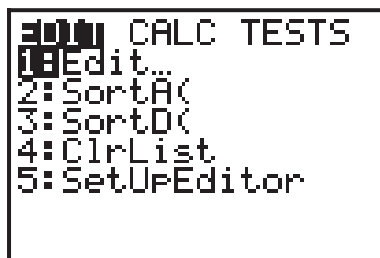


Abb. 1

Es stehen einem sechs Listen zur Verfügung. In die Liste L_1 gibt man die x-

Koordinaten der Punkte ein und in L_2 die zugehörigen y-Koordinaten (Abb. 2).

L1	L2	L3	Z
0.00	1155.00	-----	
11.00	0.00	-----	
-----	-----		
L2(x)=1155			

Abb. 2

Durch nochmaliges Anwählen der $\overline{\text{STAT}}$ -Taste gelangt man wieder in das Menü und hier wählt man $\overline{4}$ LinReg(ax+b) aus (Abb. 3).

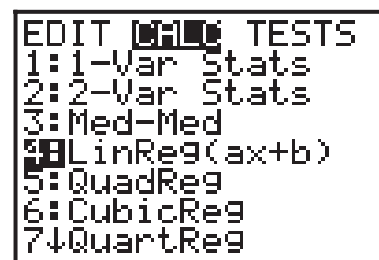


Abb. 3

Man gibt nun die Listen L_1 und L_2 ein und die zugehörige Variable unter der die Regressionsfunktion gespeichert wird (Abb. 4).

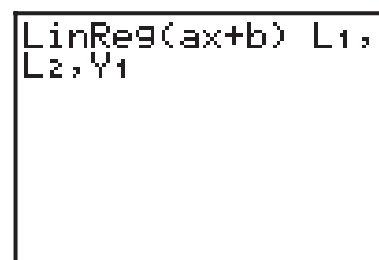


Abb. 4

Hinweis: Tastenfolge für Y_1 ; $\overline{\text{VARS}}$; Menüpunkt Y-VARS und hier die Option $\overline{1}$ Function... und dann Y_1 auswählen durch die $\overline{\text{ENTER}}$ -Taste bestätigen.

Die vom Rechner durchgeführte lineare Regression (Abb. 5) zeigt nun die folgende Geradengleichung:

$$y = -105 \cdot x + 1155$$

```
LinReg
y=ax+b
a=-105.00
b=1155.00
r²=1.00
r=-1.00
```

Abb. 5

Diese Gleichung ist automatisch im $\boxed{Y=}$ Editor unter Y_1 gespeichert worden. Mit $r^2 = 1.00$ bzw. $r = 1.00$ wird angezeigt, dass die Korrelation 100 % ist.

Jetzt kann die erste Gerade gezeichnet werden. Dazu wird der Fensterausschnitt festgelegt (Abb. 6).

```
WINDOW
Xmin=-1
Xmax=17
Xscl=1
Ymin=-1
Ymax=1200
Yscl=100
Xres=1
```

Abb. 6

Nach betätigen der $\boxed{\text{GRAPH}}$ -Taste wird die Gerade wie in der Abbildung 7 gezeichnet.

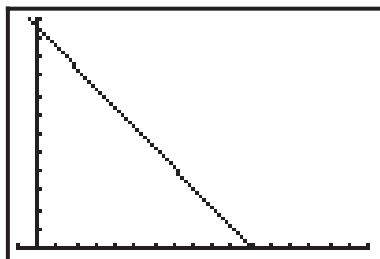


Abb. 7

Für den Zug von A nach B verfährt man analog. Man verwendet die Punkte mit den Koordinaten (2,5|0) und (16,5|1155). Diese Koordinaten können auch wieder in den Listen L_1 und L_2 gespeichert werden (Abb. 8).

L1	L2	L3	Z
2.50	0.00	-----	
16.50	1155.0	-----	
-----	-----	-----	
L2(3) =			

Abb. 8

Nur ist jetzt darauf zu achten, dass für die Regressionsgerade die Variable Y_2 verwendet wird (Abb. 9).

```
LinReg(ax+b) L1,
L2, Y2
```

Abb. 9

Die Geradengleichung für den zweiten Zug lautet: $y = 82,5 \cdot x - 206,25$ (Abb. 10).

```
LinReg
y=ax+b
a=82.50
b=-206.25
r²=1.00
r=1.00
```

Abb. 10

Mit Hilfe dieser beiden Geradengleichungen wie sie im $\boxed{Y=}$ Editor zu sehen sind (Abb. 11) ist es nun möglich den Schnittpunkt und damit den Treffpunkt der beiden Züge zu ermitteln.

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=-105X+1155
\Y2=82.5X+-206.2
5
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```

Abb. 11

In der Abbildung 12 sind die beiden Geraden, die die beiden Züge repräsentieren, dargestellt.

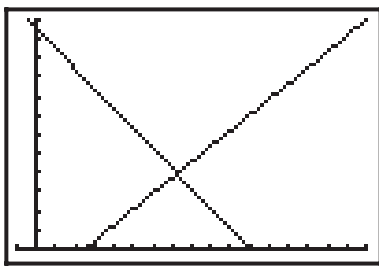


Abb. 12

Mit der Option $\boxed{5}$ intersect aus dem Menü CALCULATE ($\boxed{2nd}[CALC]$) kann der Schnittpunkt der beiden Geraden berechnet werden (Abb. 13).

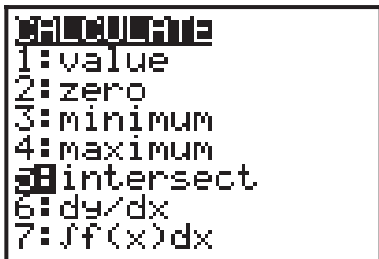


Abb. 13

Die beiden Züge treffen sich 7,26 Stunden nach dem der Zug von B nach A abgefahren ist.

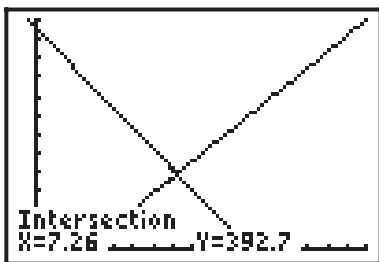


Abb. 14

Der Treffpunkt ist 392,7 km von A entfernt (Abb. 14)

Algebraische Lösung

Für die algebraische Lösung bietet sich das Gleichsetzungsverfahren an.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = -105 \cdot x + 1155 \\ \wedge y = 82,5 \cdot x - 206,25 \end{cases} & \mathbb{G} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 82,5 \cdot x - 206,25 = -105 \cdot x + 1155 \\ \wedge y = 82,5 \cdot x - 206,25 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 187,5 \cdot x = 1361,25 \\ \wedge y = 82,5 \cdot x - 206,25 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 7,26 \\ \wedge y = 82,5 \cdot 7,26 - 206,25 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 7,26 \\ \wedge y = 392,7 \end{cases} & \mathbb{L} = \{(7,26 | 392,7)\} \end{aligned}$$

Die algebraische Lösung entspricht mit ihren Werten genau der Lösung mit dem GTR.

Autor: Rupert Ernhofer

Kontakt: ernhofer@email.de

Alle Neune wie auf einer Schnur – Das 3. Kepler'sche Gesetz

Rupert Ernhofer

Die drei Kepler'schen Gesetze beschreiben die Planetenbewegung um die Sonne. Im Folgenden soll mit der mittleren Entfernung der Planeten von der Sonne und ihrer mittleren Umlaufdauer um die Sonne untersucht werden, ob mit Hilfe des grafikfähigen Taschenrechners es möglich ist einen Zusammenhang zu finden.

	a in AE	T in a
Merkur	0,387	0,24
Venus	0,723	0,62
Erde	1,000	1,00
Mars	1,524	1,88
Jupiter	5,203	11,86
Saturn	9,539	29,46
Uranus	19,287	84,02
Neptun	30,057	164,79
Pluto	39,4	247,7

Um einen möglichen funktionalen Zusammenhang zwischen dem mittleren Abstand und der mittleren Umlaufzeit zu ermitteln, werden die Werte für a und T in die Listen L₁ und L₂ eingetragen (Abb. 1).

L1	L2	L3	1
0,387	.24	-----	
.723	.62		
1	1		
1.524	1.88		
5.203	11.86		
9.539	29.46		
19.287	84.02		
L1(1) = .387			

Abb. 1

Als nächstes wird mit Hilfe von $\boxed{2nd}[STAT PLOT]$ ein Plot erzeugt, d. h. die einzelnen Wertepaare werden in einem Diagramm dargestellt (Abb. 2).



Abb. 2

Die Werte für die Einstellung des Graphikfensters ergeben sich aus der Tabelle für die mittleren Abstände und mittleren Umlaufzeiten (Abb. 3).

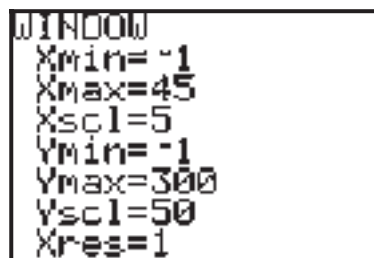


Abb. 3

Abb. 4 zeigt den Plot für die Wertepaare aus den beiden Listen L₁ und L₂.

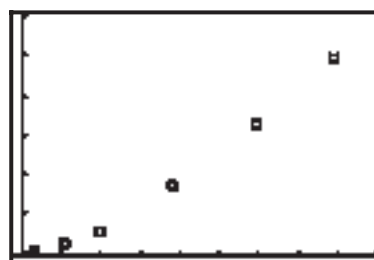


Abb. 4

Der Plot lässt vermuten, dass es sich um einen funktionalen Zusammenhang handeln könnte. Als mögliche Zusammenhänge bieten sich eine quadratische Funktion oder eine Potenzfunktion an. Dies soll mit

Hilfe des graphikfähigen Taschenrechners überprüft werden.

Mit der **[STAT]**-Taste ruft man das STAT Menü auf und wählt hier das Untermenü CALC aus. Hier wird aus dem Menü wie in Abb. 5 die Regression für eine quadratische Funktion ausgewählt.

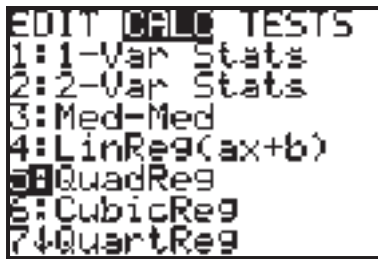


Abb. 5

Man gibt nun die Listen L_1 und L_2 ein und die zugehörige Variable unter der die Regressionsfunktion gespeichert wird (Abb. 6).



Abb. 6

Die Abb. 7 zeigt die Werte für die durchgeführte Regression.

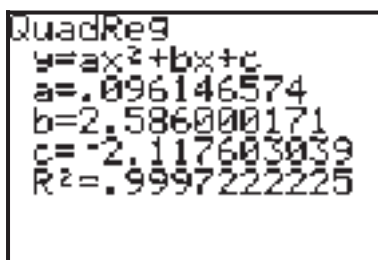


Abb. 7

Nach dem der Graph der quadratischen Regression unter Y_1 gespeichert ist, wird er jetzt eingezeichnet (Abb. 8):

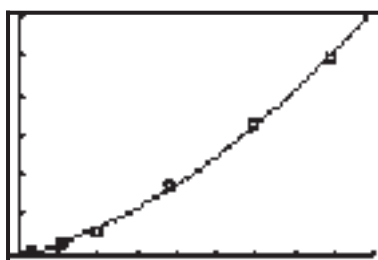


Abb. 8

Interessant wäre den Verlauf des Graphen in der Nähe des Ursprungs zu sehen, denn da sind die 4 Bildpunkte für die ersten Planeten unseres Sonnensystems abgebildet.

Mit der **[ZOOM]**-Taste kann man das ZOOM Menü öffnen oder über das WINDOW Menü die konkreten Werte für die Fenstereinstellung eingeben (Abb. 9):

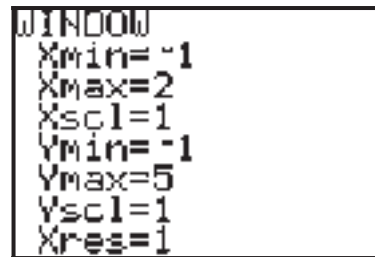


Abb. 9

Damit erhalten wir folgenden Ausschnitt des Graphen (Abb. 10):

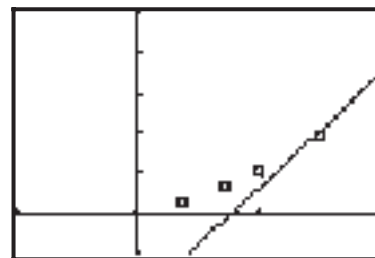


Abb. 10

Die Bildpunkte der ersten drei Planeten Merkur, Venus und Erde liegen über dem Graphen und der Bildpunkt für den Mars liegt auf dem Graphen. Es zeigt sich, dass trotz der guten Beschreibung des funktionalen Zusammenhangs durch eine quadratische Funktion, es in der graphischen Darstellung zu Abweichungen kommt.

Es wäre nun interessant zu untersuchen, ob es ein besseres Modell zur Beschreibung des funktionalen Zusammenhangs gibt. Es soll überprüft werden, in wie weit die Potenzfunktion in diesem Fall das bessere Modell wäre. Dazu wird aus dem CALC-Menü wie in Abb. 11 die Regression für eine Potenzfunktion ausgewählt.

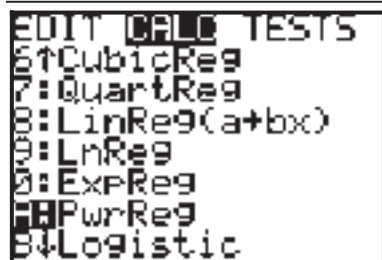


Abb. 11

Zum Speichern der Regressionsfunktion wird die Variable Y_2 gewählt (Abb. 12).

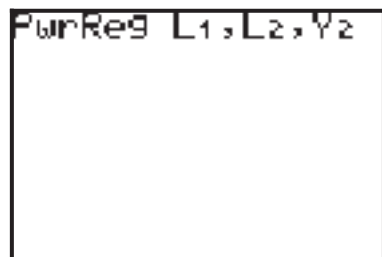


Abb. 12

Die Abb. 13 zeigt die Werte für die neue Regression.

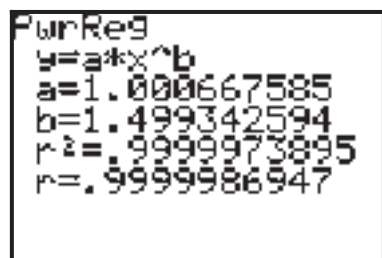


Abb. 13

Genauso wie bei der quadratischen Funktion soll jetzt auch die Potenzfunktion gezeichnet werden. Zuerst für den ganzen Bereich (Abb. 14).

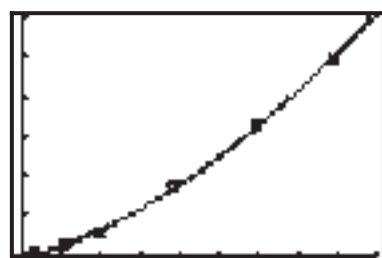


Abb. 14

Als nächstes wird der Bereich der ersten vier Planeten dargestellt (Abb. 15):

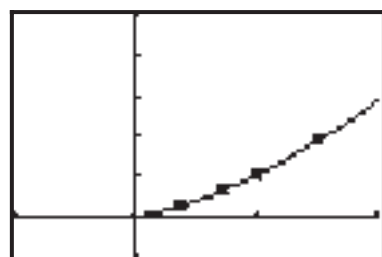


Abb. 15

Der Graph dieser Funktion repräsentiert den Zusammenhang gerade im Bereich der ersten vier Planeten erheblich besser als die quadratische Funktion. Dies verdeutlicht die Abbildung 16, die eine Zusammenfassung der Abbildungen 10 und 15 darstellt.

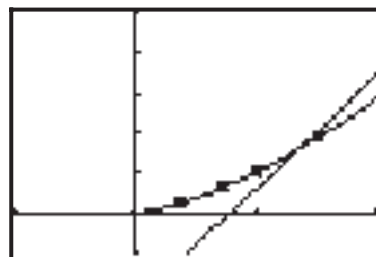


Abb. 16

Der funktionale Zusammenhang mit der Potenzfunktion (Abb. 13) soll näher betrachtet werden.

Hinter der Variablen x verbirgt sich der mittlere Abstand der Planeten zur Sonne und die Variable y steht für die mittlere Umlaufzeit der Planeten um die Sonne. Somit ergibt sich folgende Größengleichung:

$$T = 1,00 \cdot a^{1,5} \quad \text{oder} \quad T = 1,00 \cdot a^{\frac{3}{2}}$$

Wenn man die Gleichung quadriert, dann erhält man:

$$T^2 = 1,00 \cdot a^3 \quad T^2 = a^3$$

Dies gilt für alle neun Planeten und somit gilt damit auch das Verhältnis der Abstände und Umlaufzeiten zweier Planeten zueinander:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Dies ist das 3. Kepler'sche Gesetz.

Mit $R^2 = 1.00$ bzw. $R = 1.00$ wird angezeigt das die Korrelation 100 % ist. Bei der quadratischen Regression waren die Werte

fast genauso gut, aber wie oben beschrieben gibt es doch erhebliche Abweichungen in der Darstellung der ersten vier Planeten.

Der Graph der Regressionsfunktion (Abb. 14) liegt auf den einzelnen Wertepaaren. Allerdings hat man das Problem in dem Diagramm, dass die ersten Planeten alle fast im Ursprung liegen und somit nicht mehr als einzelne Bildpunkte erkennbar sind. Will man die ersten vier Planeten besser darstellen, dann sind die anderen fünf Planeten nicht mehr im Graphikfenster zu sehen.

In der Physik hilft man sich hier oft damit, dass man logarithmische Skalen verwendet. Bei der Verwendung von logarithmischen Skalen, wird auf die Größen der Logarithmus angewendet.

L1	L2	Ans	3
.387	.24	-----	
.723	.62		
1	1		
1.524	1.88		
5.203	11.86		
9.529	29.46		
19.287	84.02		
L3=log(L1)			

Abb. 17

Die logarithmischen Werte von a und T werden in die Listen L3 und L4 eingetragen. Dazu geht man mit dem Cursor in die Kopfzeile der Liste und gibt dann $\log(L_1)$ ein (Abb. 17). Genauso macht man es dann bei der Liste L4. Hier gibt man dann $\log(L_2)$ ein. Damit erhält man die beiden logarithmischen Skalen (Abb. 18).

L2	L3	L4	4
.24	-.4123	2.7148	
.62	-.1409	-.2076	
1	0	0	
1.88	.18298	.27416	
11.86	.71625	1.0741	
29.46	.9795	1.4692	
84.02	1.2853	1.9244	
L4(1) = -.619788758...			

Abb. 18

Um nun die Werte graphisch darzustellen, muss ein neuer Plot (Plot2) eingestellt werden, wobei der erste Plot (Plot1) auszuschalten ist. Die Werte für das Diagrammfenster ergeben sich aus den Listen L3 und L4 (Abb. 19 – 21).



Abb. 19

Eingabe der Werte für das Graphikfenster.

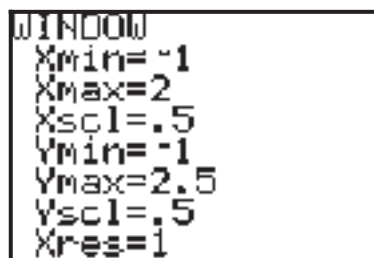


Abb. 20

Der Plot für die logarithmischen Werte.

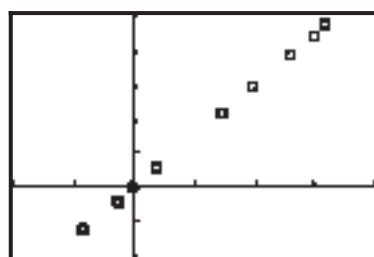


Abb. 21

Aufgrund des Plots in der Abb. 21 kann vermutet werden, dass es sich um einen linearen Zusammenhang handelt. Dieser mögliche funktionale Zusammenhang soll wieder mit Hilfe des CALC Menü überprüft werden (Abb. 22).



Abb. 22

Die Funktionsgleichung der Regressionsgeraden wird unter der Variablen Y_3 gespeichert (Abb. 23).

Autor: Rupert Ernhofer
 Kontakt: ernhofer@email.de

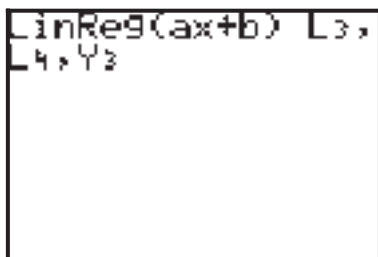


Abb. 23

Das Ergebnis (Abb. 24) zeigt, dass die Vermutung mit der linearen Regression richtig war.

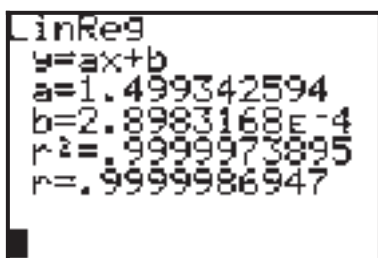


Abb. 24

Die Regressionsgerade geht durch alle Punkte des Plots (Abb. 25).

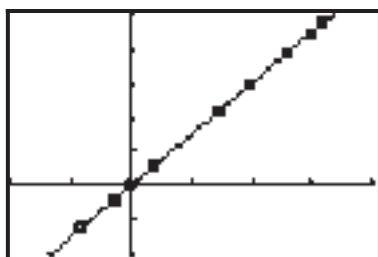


Abb. 25

Wie schon oben steckt hinter der Variablen x der mittlere Abstand $\log(a)$ und hinter y die mittlere Umlaufzeit $\log(T)$. Aus der Abb. 24 kann man für die Größengleichung schreiben:

$$\log T = 1,50 \cdot \log a + 0$$

$$\log T = 1,50 \cdot \log a$$

und damit

$$\log T = \frac{3}{2} \cdot \log a \quad T = a^{\frac{3}{2}}$$

Der funktionale Zusammenhang der beiden Größen bleibt trotz einer anderen Skala gleich.

Geometrische Ortslinien – Punkte mit gleichem Abstand von Geraden

Christoph Sobotta

Parallelenpaar

Gesucht sind alle Punkte, die von einer gegebenen Geraden einen vorgegebenen Abstand haben.

Zunächst erzeugen wir die Gerade g und eine Strecke, deren Länge den Abstand vorgibt (vgl. Abb. 1).

F2 **4** Gerade

F2 **5** Strecke

F6 **1** Entfernung und Länge

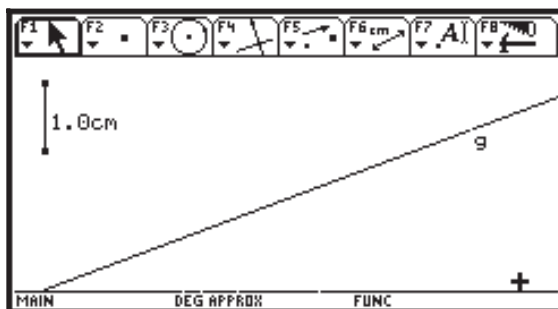


Abb. 1

Nun konstruieren wir zwei Punkte mit diesem Abstand von der Geraden g . Wir erzeugen einen auf der Geraden beweglichen Punkt, konstruieren in ihm eine Senkrechte zu g und zeichnen einen Kreis um ihn mit dem Abstand als Radius. Die beiden Schnittpunkte des Kreises mit der Senkrechten haben den vorgegebenen Abstand von der Geraden (vgl. Abb. 2).

F4 **1** Senkrechte

F4 **9** Maß übertragen

F3 **1** Kreis

F2 **3** Schnittpunkt

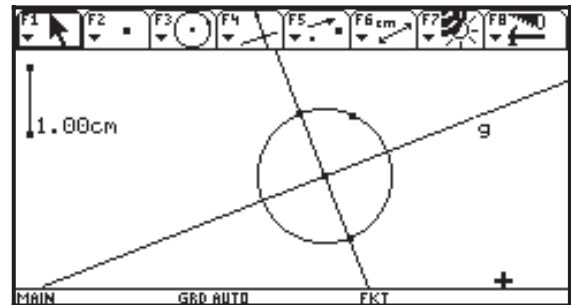


Abb. 2

Die Abb. 2 speichern wir zur späteren erneuten Verwendung unter dem Namen wh02 ab.

F8 **2** Kopie speichern als ... **ENTER**

Variable: wh02

Wir blenden den Kreis, den übertragenen Kreispunkt und die Senkrechte aus.

F7 **1** Ausblenden

Schließlich lassen wir die beiden Punkte ihre Spur aufzeichnen, während wir den beweglichen Punkt auf der Geraden g verschieben. Die Menge der einzelnen Ortspunkte lässt sich als Parallelenpaar zu g erkennen.

F7 **2** Spur ein

Mit dem Befehl „Ortslinie“ werden die zwei Parallelen eingezeichnet (vgl. Abb. 3).

F4 **A** Ortslinie (zweimal)

(Den die Spur erzeugenden Punkt und den beweglichen Punkt auf g anklicken)

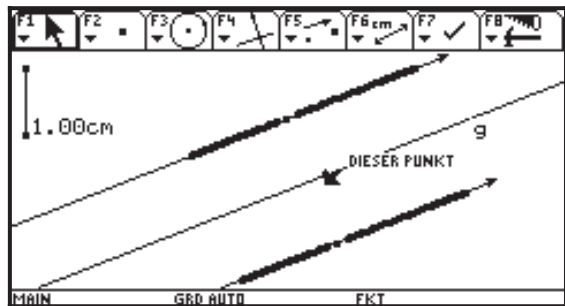


Abb. 3

Nach dem Ausschalten der Spur mit

F7 **2** Spur aus

können wir den Abstand verändern und die Lageveränderung der beiden Parallelen beobachten. Die große Verzögerung beim Zeichnen der Parallelen ist auf die aufwändige Konstruktion als Punktmenge zurückzuführen.

Makrokonstruktion

Zur Konstruktion von Punkten, die von zwei Geraden gleichen Abstand haben, ist es sinnvoll, eine Makrokonstruktion zu definieren, die in einem vorgegebenen, veränderlichen Abstand je zwei Parallelen zu den Geraden zeichnet.

Dazu laden wir die Abb. 2 (Datei wh02).

F8 **1** öffnen ...

Variable: wh02

Wir zeichnen nun in den beiden abstandsgleichen Punkten die Parallelen zur Geraden g und blenden wie oben den Kreis, den Kreispunkt und die Senkrechte aus (vgl. Abb. 4).

F4 **2** Parallele (zweimal)

F7 **1** Ausblenden

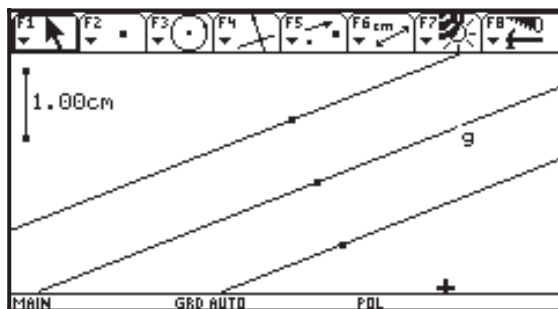


Abb. 4

Diese Konstruktion des Parallelenpaares definieren wir als Makrokonstruktion. Dazu müssen wir die Gerade g , den beweglichen Punkt auf g und die Maßzahl des Abstands als Startobjekte und die beiden Parallelen als Zielobjekte angeben. Die Namen für die Makrokonstruktion und für das Programm selbst können beliebig gewählt werden.

F4 **6** Makrokonstruktion

- **2** Startobjekte (Gerade g , Punkt auf g , Abstand)
- **3** Zielobjekt (beide Parallelen)
- **4** Definiere Makro (z.B. parpaar)



Abb. 5

Nach Aufruf der Makrokonstruktion mit dem gewählten Namen erhält man nach dem Anklicken der Geraden, des Punktes auf der Geraden und dem Abstand unmittelbar das Parallelenpaar. Durch Verändern des Abstands ändert auch das Parallelenpaar seinen Abstand zur Geraden.

F8 **1** öffnen

Typ: Makro

Variable: parpaar

F4 **6** Makrokonstruktion

- **1** Makro ausführen

Winkelhalbierende

Gesucht sind alle Punkte, die von zwei sich schneidenden Geraden gleichen Abstand haben.

Wir erzeugen die Geraden g und h und auf jeder der beiden Geraden je einen beweglichen Punkt. Außerdem zeichnen wir eine Strecke, deren Länge den Abstand darstellt. Mithilfe des Makros „parpaar“ (S. 26) konstruieren wir zu jeder der beiden Geraden das Parallelenpaar mit dem gewählten Abstand. Die vier Schnittpunkte der vier Parallelen sind die vier Punkte, die den gleichen vorgegebenen Abstand von den Geraden g und h haben.

- F2** **4** Gerade
- F2** **5** Strecke
- F6** **1** Entfernung, Länge
- F4** **6** Makro ausführen
- F2** **3** Schnittpunkt

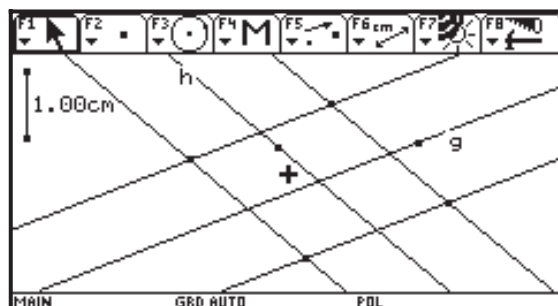


Abb. 6

Um das Bild übersichtlicher zu gestalten, blenden wir die vier Parallelen aus. Wir schalten die Spur der vier abstandsgleichen Punkte ein und verändern nun den Abstand. Dabei zeichnen die vier Punkte die Winkelhalbierenden zwischen den Geraden g und h . Wir können sie als Ortslinie einzeichnen lassen.

F7 **1** Ausblenden

F7 **2** Spur ein

F4 **A** Ortslinie (viermal)

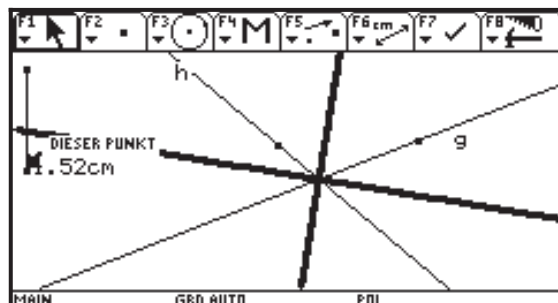


Abb. 7

Man muss jeweils einen der vier erzeugenden Punkte und den Streckenendpunkt

links anklicken, um die vier Halbgeraden zu erzeugen.

Für weitere Untersuchungen ist es lästig, dass die als Ortslinien sehr aufwändig erzeugten Winkelhalbierenden das Programm stark verlangsamen. Daher empfiehlt es sich, nach dem Erkennen der Winkelhalbierenden diese mit dem im Menü vorhandenen Befehl zu erzeugen.

Hier ist der TI Voyage™ 200 in großem Vorteil.

Autor: Christoph Sobotta

Kontakt: cum.sobotta@arcor.de

Jetzt können wir zur Verdeutlichung die Abstände der vier Punkte einzeichnen und messen, den Abstand ändern und auch die beiden Geraden g und h in ihrer gegenseitigen Lage verändern.

F4 **5** Winkelhalbierende

F4 **1** Senkrechte

F2 **5** Strecke

F6 **1** Entfernung und Länge

F6 **3** Winkel

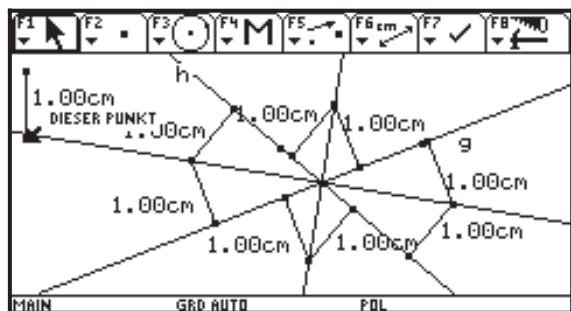


Abb. 8

Zusammenfassung:

Während die punktweise Erzeugung des Parallelenpaars im Schülerheft sehr schön durchzuführen ist, macht dieselbe Vorgehensweise bei den Winkelhalbierenden größte Schwierigkeiten, was die Zeichengenauigkeit und die nötige Zeit anbelangt.

Abbildung durch Parallelverschiebung

Christoph Sobotta

Ziel

Ausgehend von einer Doppelspiegelung an parallelen Achsen wird die Parallelverschiebung als neue, eigenständige Abbildung gefunden und definiert. Dabei bietet der Einsatz des TI Voyage™ 200 mithilfe der Zuggeometrie Cabri Géomètre hervorragende Unterstützung:

- ◆ Er erspart Routinearbeiten, die an dieser Stelle kein Unterrichtsziel sind und nur Zeitverlust bedeuten.
- ◆ Die Beweglichkeit der Figuren lässt Zusammenhänge erkennen.
- ◆ Es sind Darstellungen möglich, die in einer Heftzeichnung nicht durchführbar sind.

Doppelspiegelung an (bla)

Achsenpaar (alb) zeichnen

Zunächst werden zwei zueinander parallele Achsen a und b erzeugt, die in ihrer gemeinsamen Richtung, in ihrem Abstand und in ihrer Lage auf dem Bildschirm veränderbar sind (vgl. Abb. 1). Grundlage ist die Definition, wonach zwei Geraden mit einer gemeinsamen Senkrechten s zueinander parallel sind.

Das Achsenpaar erhält man durch folgende Anweisungen:

F2 **4** Gerade a

F2 **2** Punkt auf a

F4 **1** Senkrechte s zu a

F2 **2** Punkt auf s

F2 **4** Senkrechte b zu s

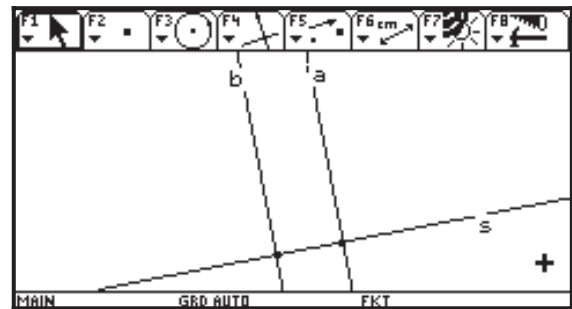


Abb. 1

An dem Punkt bei „a“ anfassend kann man das Parallelenpaar (alb) zusammen mit der gemeinsamen Senkrechten s auf dem Bildschirm verschieben. Am Schnittpunkt von b und s anfassend kann der Abstand der Parallelen, an einem beliebigen Punkt der Achse s anfassend kann die Richtung des Parallelenpaars verändert werden.

Als nächstes wird das Urdreieck ABC erzeugt (vgl. Abb. 2).

F3 **3** Dreieck

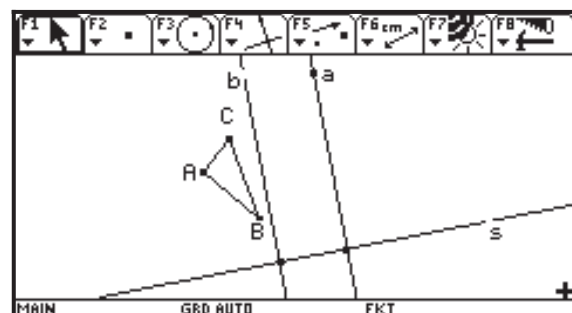


Abb. 2

Die Abb. 2 speichern wir zur späteren erneuten Verwendung unter dem Namen pv02 ab.

F8 **2** Kopie speichern als ...

Variable: pv02

Doppelspiegelung an (bla) ausführen

Das Dreieck ABC wird zuerst an der Achse b , das Bilddreieck dann an der Achse a gespiegelt (vgl. Abb. 3).

F5 **4** Geradenspiegelung

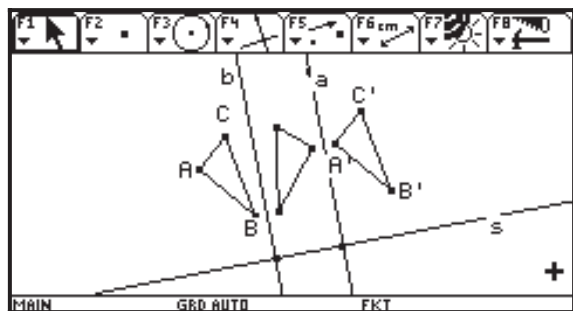


Abb. 3

Kongruenz

Im Folgenden werden das Urdreieck ABC und das Bilddreieck $A'B'C'$ betrachtet. Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit kann man mit dem Befehl

F7 **1** Ausblenden/Zeigen

das erste (unbenannte) Bilddreieck ausblenden und später wieder einblenden.

Es wird erarbeitet, dass die beiden Dreiecke gleichsinnig kongruent sind (Seitenlängen, Winkelmaße). Die Kongruenz wird besonders deutlich, wenn man mit dem Zugmodus das Urdreieck verändert (vgl. Abb. 4).

F6 **1** Entfernung u. Länge

F6 **3** Winkel

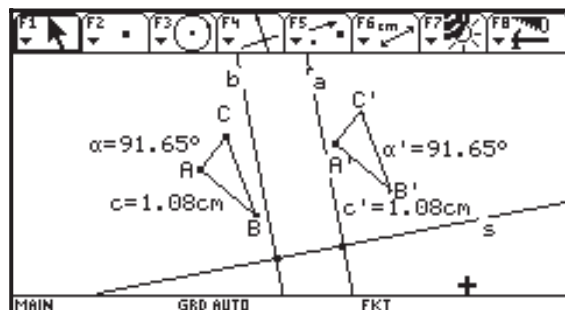


Abb. 4

Eigenschaften erarbeiten

Wenn man das Urdreieck ABC als ganzes bewegt, ergibt sich die Vermutung, dass man das Dreieck ABC auf das Dreieck $A'B'C'$ verschieben kann. Sie wird überprüft, indem man die jeweiligen Verbindungsstrecken von Ursprung und Bildpunkt erzeugt und hinsichtlich ihrer gegenseitigen Lage und ihrer Länge untersucht (vgl. Abb. 5 und Abb. 6).

F2 **5** Strecke

Parallele Verbindungsstrecken

F6 **2** Lagebeziehung prüfen

- **2** parallel

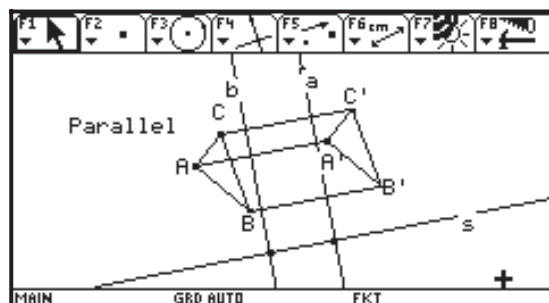


Abb. 5

Gleich lange Verbindungsstrecken

F6 1 Entfernung u. Länge

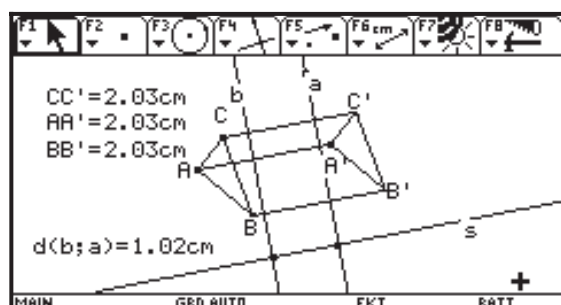


Abb. 6

Das Messen des Achsenabstands $d(b;a)$ zeigt den Zusammenhang. Der Nachweis erfolgt mithilfe der Eigenschaften der Achsenspiegelung.

Die Erkenntnis der gleich langen und parallelen Verbindungsstrecken kann man durch Verändern der Richtung und des Abstands des Achsenpaares noch verstärken (vgl. Abb. 7).

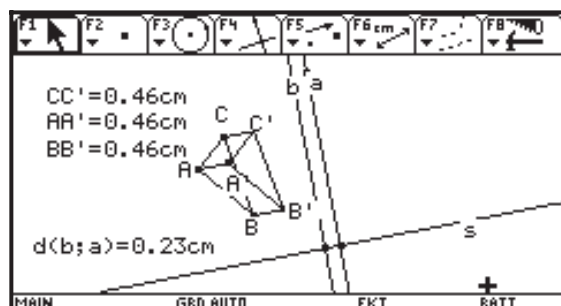


Abb. 7

Orientierung der Verbindungsstrecken

Es wird nun wieder die Datei pv2 geladen. Das Dreieck ABC wird erneut durch Doppelspiegelung abgebildet, nun aber zuerst an der Achse a und dann das Bilddreieck an der Achse b . Die Verbindungsstrecken von zugeordneten Ur- und Bildpunkten werden wieder eingezeichnet (vgl. Abb. 8).

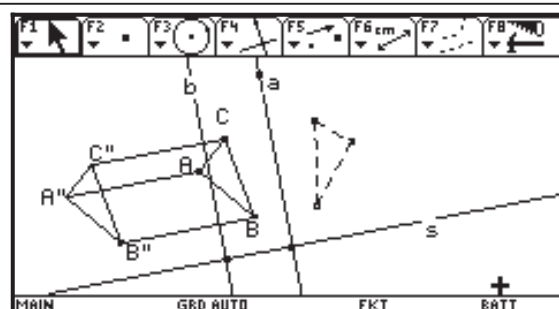


Abb. 8

Die Umkehrung der Reihenfolge der Achsen bewirkt eine Umkehrung der Orientierung. Dadurch werden die Pfeile motiviert.

Parallelverschiebung - Vektor

An dem ersten Punkt, mit dem die Achse a festgelegt wurde, kann man das Achsenpaar mit der Senkrechten s in der Zeichenebene verschieben.

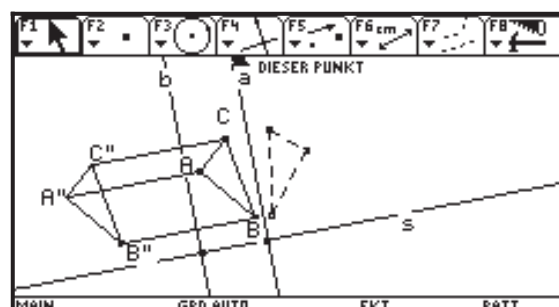


Abb. 9

Dabei sieht man, dass sich beim Verschieben des Achsenpaares Ur- und Bilddreieck nicht bewegen, lediglich das Zwischendreieck. Das bedeutet, dass alle Doppelspiegelungen mit einem Achsenpaar von bestimmter Richtung, mit bestimmtem Achsenabstand und mit festgelegter Achsenreihenfolge eine neue Abbildung namens *Parallelverschiebung* ergeben. Vom Achsenpaar sind nur Abstand, Richtung und Reihenfolge entscheidend. Diese Angaben kommen in den gleich langen, parallelen und gleich orientierten Pfeilen zum Ausdruck, die einen Vektor bilden. Er stellt

die Konstruktionsvorschrift der Parallelverschiebung dar.

Nach dem Zeichnen eines Pfeils, z.B. $\overrightarrow{AA''}$, kann jetzt zur Durchführung der neuen Abbildung das im Rechner gespeicherte Makro verwendet werden (vgl. Abb. 10).

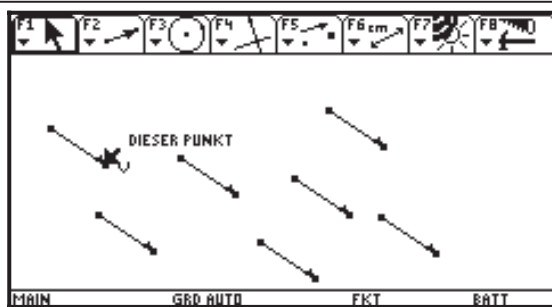


Abb. 12

F5 1 Parallelverschiebung

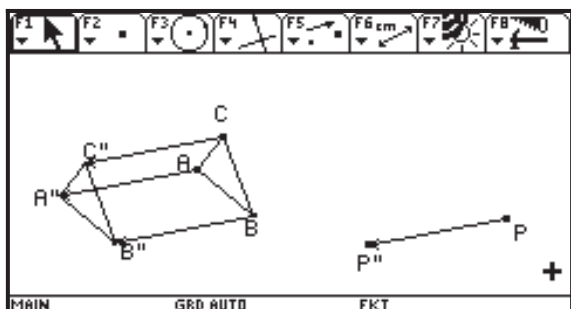


Abb. 10

Wenn man mehrere Ursprünge durch Parallelverschiebung mit einem vorgegebenen Vektor \vec{v} abbildet und jeweils die Pfeile vom Ursprung zum Bildpunkt einzeichnet, kann man durch Verändern von Länge, Richtung und Orientierung das Verhalten eines Vektors veranschaulichen (vgl. Abb. 11 und Abb. 12).

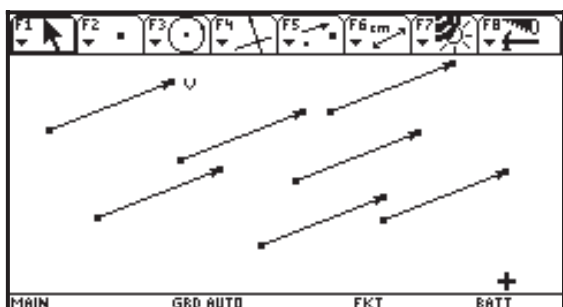


Abb. 11

Zusammenfassung

In den Abschnitten 2.1 und 2.2 erspart der Voyage™ 200 „nur“ zeitaufwändige Zeichenarbeit. Die dabei gewonnene Unterrichtszeit kommt der Erarbeitung der Eigenschaften und deren Nachweis zugute.

Die Kongruenz von Urdreieck und Bilddreieck in 2.3 und die Eigenschaften der Verbindungsstrecken von Ur- und Bildpunkten in 3.2 kann man in einer Heftzeichnung nicht so eindrucksvoll zeigen wie mithilfe der Zuggeometrie infolge ihrer Beweglichkeit.

Die Feststellung, dass eine Verschiebung des Achsenpaars Ur- und Bilddreieck in ihrer Lage nicht beeinflusst, lässt sich nur mit einem dynamischen Geometrieprogramm zeigen.

Autor: Christoph Sobotta
 Kontakt: cum.sobotta@arcor.de

Zinsen und Zinsen der Zinsen – Anwendung der Tabellenkalkulation

Rudolf Herdtweck

Sowohl im Mathematikunterricht, als auch im Unterricht des Faches Betriebswirtschaftslehre/Rechnungswesen kommen Aufgaben zum Berechnen des Zinseszinses vor. In beiden Unterrichtsfächern bietet sich dabei der Einsatz eines Tabellenkalkulationsprogramms an. Aus verschiedenen Gründen ist im Unterricht der Einsatz des Computers oft nicht möglich. Ein Ausweg bietet der graphikfähige Taschenrechner mit dem Tabellenkalkulationsprogramm CellSheet™ auf dem TI-83 Plus/84 Plus und dem TI-89 Titanium/Voyage™ 200.

Aufgabe

Ein Kapital von 800,00 € wird zu 6% verzinst. Untersuchen Sie die Wertentwicklung des Kapitals in den nächsten 10 Jahren, wenn die jährlichen Zinsen mitverzinst werden.

CellSheet™ starten

Um das Programm CellSheet™ zu starten, kann man mit der [APPS] Taste eine Liste der installierten Applikationen öffnen und den entsprechenden Menüpunkt aktivieren (Abb. 1).

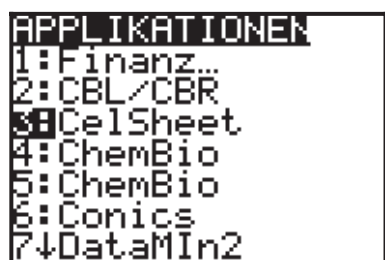


Abb. 1

Zunächst erscheint der Standardbildschirm, dann ein Hilfetext mit den wichtigsten Shortcuts (Abb. 2).

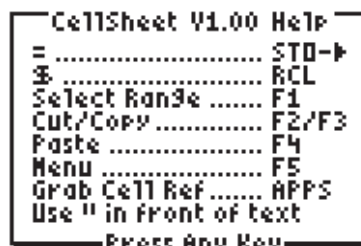


Abb. 2

Um in das Tabellenblatt (Abb. 3) zu gelangen drückt man zweimal eine beliebige Taste.

ZIET	A	B	C
1			
2			
3			
4			
5			
6			
A1:			Menu

Abb. 3

Das CellSheet™ -Tabellenblatt – Eingaben

Mit den Cursor-Tasten kann man sich durch die verschiedenen Zellen bewegen. Mit der ENTER Taste wird die Eingabezeile aktiviert und durch nochmaliges Betätigen wird die Eingabe abgeschlossen. Beginnt die Eingabe mit einem Anführungszeichen, wird die Eingabe als Text behandelt. Ein vorangestelltes Gleichheitszeichen kennzeichnet die Eingabe einer Formel. Dabei sind absolute und relative (gekennzeichnet durch das „\$“ Zeichen) Zellbezüge möglich.

Analyse des Problems

Das Wachstum des Kapitals wird durch folgende Beziehungen dargestellt.

$$\text{ZINS} = \text{KAPITAL_ALT} * \text{ZINSSATZ} / 100$$

$$\text{KAITAL_NEU} = \text{KAPITAL_ALT} + \text{ZINS}$$

Diese Formeln sind nach Aufbau einer entsprechenden Tabelle kopierfähig.

Rechenblatt im CellSheet™ (TI-83 Plus/84 Plus)

Man beginnt nun mit der Eingabe der Texte und Zahlen in das Tabellenblatt (Abb. 4).

ZI2I	A	B	C
1	KAPITAL	KAPAL	ZINS
2	800	800	48
3			
4	ZSATZ		
5	6		
6			

C2: =B2*~~A~~5/100 [Menu]

Abb. 4

Anschließend gibt man in die Zellen B2, C2 und D2 die entsprechenden Formeln ein. Dabei ist zu beachten, dass der Zinssatz (Zelle A5) relativ adressiert wird (Abb. 5).

ZI2I	B	C	D
1	KAPAL	ZINS	KAPN
2	800	48	848
3			
4			
5			
6			

D2: =B2+C2 [Menu]

Abb. 5

Sodann werden die Formeln des Bereichs B2:D2 in den Bereich B3:D11 kopiert. Dies ist möglich durch das Betätigen der $\boxed{Y=}$ Taste und anschließendem Markieren des zu kopierenden Bereichs. Mit der Taste $\boxed{\text{TRACE}}$ wird der Befehl Paste ausgeführt, der Inhalt wird dann eingefügt und man erhält den Bildschirm wie die Abbildung 6 zeigt:

ZI2I	B	C	D
6	1010	60.599	1070.6
7	1070.6	64.235	1134.8
8	1134.8	68.089	1202.9
9	1202.9	72.174	1275.1
10	1275.1	76.505	1351.6
11	1351.6	81.095	1432.7

D11: =B11+C11 [Menu]

Abb. 6

Will man nun die Wertentwicklung graphisch darstellen, benötigt man noch eine Spalte (E) für die Jahre. Diese kann man sich automatisch ausfüllen lassen. Dazu wählt man im Menü CELLSHEET (Abb. 7) $\boxed{3}$ Options... aus und aus diesem Untermenü OPTIONS (Abb. 8) den Befehl $\boxed{3}$ Sequence aus. Bei diesem Befehl muss man angeben, in welcher Zelle (E2) das Ausfüllen beginnen soll, sowie die Start- und Endzahl (Abb. 9).

```
CELLSHEET MENU
1:File...
2:Edit...
3:Options...
4:Charts...
5:Help
6:Quit CellSheet
```

Abb. 7

```
OPTIONS
1:Statistics...
2:Fill Range...
3:Sequence...
4:Import/Export...
5:Sort...
6:Col Decimal...
```

Abb. 8

```
SEQUENCE
1st Cell:E2
seq(X,X,1,10)
Down Right
Enter
```

Abb. 9

Dann erhält man das vollständige Tabellenblatt (Abb. 10).

ZIZI	C	D	E
1	ZINS	KAPN	JAHRE
2	48	848	1
3	50.88	898.88	2
4	53.933	952.81	3
5	57.169	1010	4
6	60.599	1070.6	5
E1: "JAHRE			Menu

Abb. 10

Für die graphische Darstellung wählt man im Menü unter Charts (Abb. 11) den Befehl Scatter (Abb. 12) und wählt die x-Liste (Jahre) und die y-Liste (Kapn) aus (Abb. 13)

Zur Optimierung der Graphik und zum Lösen weitere Aufgaben (Hausaufgabe) können die Schülerinnen und Schüler das Rechenblatt in der Schule oder zu Hause mittels des Programms TI CellSheet Konverter™ in EXCEL™ exportieren und sich dort geeignet darstellen lassen.

Autor: Rudolf Herdtweck

Kontakt: rudolfherdtweck@web.de

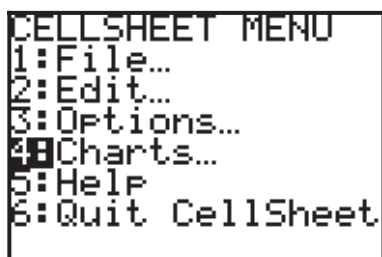


Abb. 11

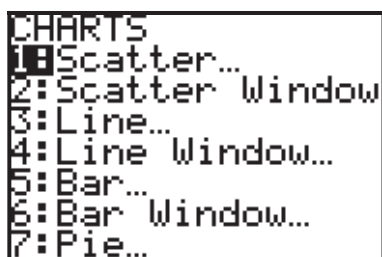


Abb. 12

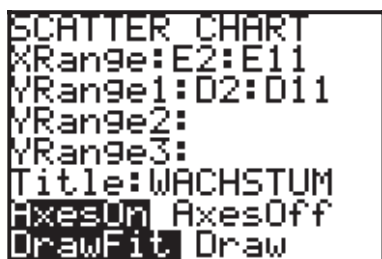


Abb. 13

Das Ergebnis zeigt die Abb. 14.

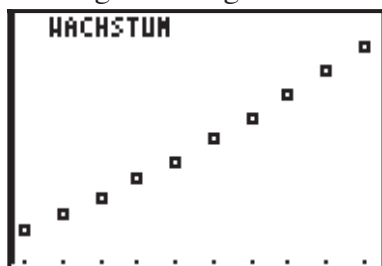


Abb. 14



Graphikfähige Taschenrechner im Einsatz an bayerischen Realschulen

Andreas Erl, Rupert Ernhofer,
Rudolf Herdtweck, Christoph Sobotta

Haben Sie Fragen zu den Produkten von Texas Instruments?
Oder sind Sie an weiteren Unterrichtsmaterialien, der Ausleihe von Rechnern oder einer Lehrerfortbildung interessiert? Gerne steht Ihnen unser Customer Service Center mit Rat und Tat zur Seite. Nehmen Sie mit uns Kontakt auf:

E-Mail: ti-cares@ti.com

Telefonisch von Montag bis Freitag 9.00 - 17.00 Uhr

Deutschland

Telefon: 06196-97 50 15

Telefax: 06196-97 50 44

education.ti.com/deutschland

Österreich

Telefon: 01-50 29 10 007

Telefax: 01-50 29 10 034

education.ti.com/oesterreich

Schweiz:

Telefon: 01-27 30 688

Telefax: 022-71 00 036

education.ti.com/schweiz

Texas Instruments 

c/o Sitel

Woluwelaan 158

1831 Diegem

Belgien

Umweltfreundlich gedruckt auf chlorfreiem Papier