

Bowling

Dr. Alfred Roulier



Ausgangssituation

Der Artikel nimmt Bezug auf die Aufgabe 19/9 aus Feynman Lectures I. Es wird die Bahnkurve einer Bowlingkugel untersucht.

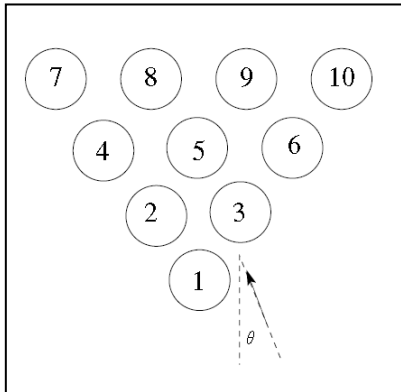


Abb.1

Die Empirie sagt, dass man beste Resultate erzielt, wenn die Kugel unter einem Winkel $\theta = 6^\circ$ ca. 12 cm seitlich einschlägt. Dieser Winkel gelingt mit einem geraden Wurf nicht, weil die 18 m lange und 1.08 m breite Bahn keinen genügend seitlichen Abwurf zulässt. Man muss durch Zugabe von Drall eine Bahnkurve erzeugen.

In einer ersten längeren Phase gleitet die Kugel. Hier kann man mittels eines Dralls eine gekrümmte Bahn erzeugen. In dieser Gleitphase erzeugt die Gleitreibung einen Drehimpuls. Wenn die Drehgeschwindigkeit am Berührungspunkt die Gleitgeschwindigkeit kompensiert, wechselt die Gleit- in eine gerade Rollbewegung. Die relevanten Vektoren sind in Abbildung 2 in einer Sicht von oben dargestellt.

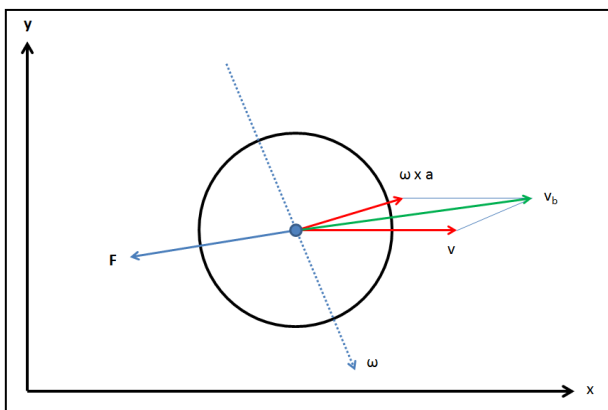


Abb.2

Die Kugel gleitet in Richtung des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v} . Die Kugel dreht sich zusätzlich um die horizontale Achse $\boldsymbol{\omega}$. \mathbf{a} ist der Radiusvektor vom Zentrum zum Kontaktpunkt (senkrecht nach unten). Der Vektor $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$ zeigt, wohin die Kugel rollen würde. Der Vektor \mathbf{v}_b zeigt Richtung und Geschwindigkeit der Kugelperipherie bei der Kontaktstelle Kugel-Bahn.

Die besprochenen Vektoren sind durch die Beziehung

$$\vec{v}_b = \vec{v} + (\vec{\omega} \times \mathbf{a}) \quad (1)$$

verknüpft. Wenn $\vec{v}_b \neq 0$, gleitet die Kugel, wenn $\vec{v}_b = 0$ endet die Gleitphase und das Rollen beginnt. Wenn die Kugel gleitet, wird sie durch Reibung gebremst. Die Reibungskraft beträgt:

$$\vec{F} = -\check{v}_b \cdot m \cdot g \cdot \mu \quad (2)$$

\check{v}_b ist Einheitsvektor, m die Kugelmasse, g die Erdbeschleunigung und μ Reibungskoeffizient.

Dynamik

Aus der oben besprochenen Situation lassen sich 2 Differentialgleichungen ableiten, \check{v}_b ist Einheitsvektor von \vec{v}_b :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} = -\check{v}_b \cdot g \cdot \mu \quad (3)$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\vec{F} \times \mathbf{a}}{\theta} = \frac{5 \cdot g \cdot \mu}{2 \cdot a^2} (\mathbf{a} \times \check{v}_b) \quad (4)$$

θ ist das Trägheitsmoment der Kugel, $\theta = 2/5 m \cdot a^2$.

Wenn \check{v}_b zeitlich konstant wäre, könnten die beiden Gleichungen (3) und (4) sofort integriert werden. Es folgt der Nachweis, dass dies zutrifft: Aus (1) folgt

$$\frac{d\vec{v}_b}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \mathbf{a} \right) = -A \cdot \check{v}_b - B \cdot \mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \check{v}_b) \quad (*)$$

$$A = g \cdot \mu; \quad B = \frac{5 \cdot g \cdot \mu}{2 \cdot a^2};$$

$$C = A + B \cdot a^2$$

Die zeitliche Änderung von \vec{v}_b hat dieselbe Richtung wie \vec{v}_b selbst, der Einheitsvektor \check{v}_b ist konstant. Somit kann man nun alle interessierenden Größen ausrechnen. Aus (3) ergibt sich

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(0) - A \cdot \check{v}_b \cdot t \quad (5)$$

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + t \cdot \vec{v}(0) - \frac{A \cdot t^2 \cdot \check{v}_b}{2} \quad (6)$$

\check{v}_b erhält man aus den Anfangsbedingungen des Wurfs und ist Einheitsvektor von

$$\vec{v}_b(0) = \vec{v}(0) + (\vec{\omega}(0) \times \mathbf{a}) \quad (7)$$

Nach welcher Zeit T wird $\vec{v}_b = 0$? In der Zeile (*) wurde gefunden, dass

$$\frac{d\vec{v}_b}{dt} = -C \cdot \check{v}_b.$$

Somit

$$\vec{v}_b = \vec{v}_b(0) - T \cdot C \cdot \check{v}_b = 0 \Rightarrow$$

$$T = \frac{|\vec{v}_b(0)|}{C \cdot \check{v}_b(0)} = \frac{2 \cdot |\vec{v}_b(0)|}{7 \cdot g \cdot \mu} \quad (8)$$

Welches ist der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} zu dieser Zeit?

$$\vec{v}(T) = \vec{v}(0) - A \cdot \check{v}_b \cdot T = \vec{v}(0) - \frac{2 \cdot \vec{v}_b(0)}{7} \quad (9)$$

6° sind unerreichbar !

Die Gleichung (6) zeigt, dass die Kugelbahn parabelförmig ist. Leider passt eine Parabel mit der gewünschten Steigung am Zielpunkt nicht in ein Rechteck von 18 m Länge und 0.84 m Breite (Bahnbreite minus Kugeldurchmesser von 0.24 m). Dies wird im folgenden Bild deutlich, in welchem eine Parabelschar der Form

$$y = y_0 + a \cdot x + b \cdot x^2$$

vom Zielpunkt zurück zur Abgangslinie aufgezeichnet ist. Dabei sind $y_0 = 0.12$ und $a = \tan(\theta) = 0.104$.

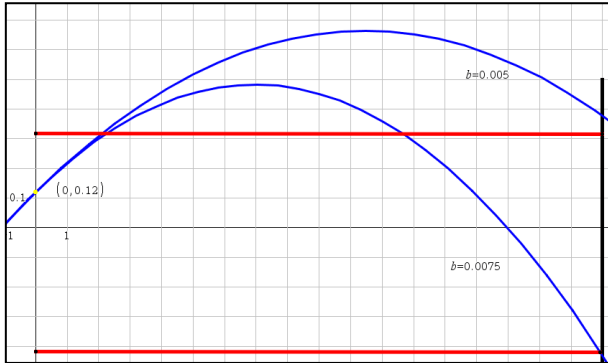


Abb.3

Dieser Befund ist nur von den Bahndimensionen und dem Wertepaar 6° / 0.12 m abhängig. Im Parameter b sind alle Anfangsgrößen und der Reibungskoeffizient verpackt. Man findet auf der Ablaufflinie rechts keinen Startpunkt so, dass die Kegelkugel innerhalb der Bahn bleibt. (In dieser Darstellung sind die Massstäbe der x- und y-Achse verschieden.)

6° sind doch erreichbar !

In der Bowlingpraxis wird das Ziel 6° / 0.12 m dadurch erreicht, dass man die ersten 2/3 der Bahn ölt. Auf diesem Bahnteil ist der Reibungskoeffizient klein, die Kugel gleitet wenig gebremst und nimmt wenig Drehmoment auf - die Bahnkurve ist kaum gekrümmt. Im letzten Drittel ist der Reibungskoeffizient höher, die Krümmung der Bahnkurve nimmt zu und das Gleiten kann sogar in das Rollen übergehen.

Im Abschnitt „Dynamik“ sind alle Grundlagen bereitgestellt worden, um diesen Ablauf numerisch zu analysieren.

Kegelwurf rechtshändig, nur Gleitphase:

```

Eingaben (m,kg,s)
Kugelradius r:=0.12 * 0.12 Erdbeschleunigung g:=9.8 * 9.8
Reibungskoeffizient 1 mu1:=0.05 * 0.05 Reibungskoeffizient 2 mu2:=0.25 * 0.25
Länge der Bahn lb:=18 * 18 Übergang von mu1 zu mu2 bei Länge lü:=12 * 12
Anfangsgeschwindigkeit v0:=8 * 8. Abgangswinkel alpha:=1.° * -0.017453
vx0:=v0 * cos(alpha) * 7.99878 vy0:=v0 * sin(alpha) * -0.139619
Anfangsdrehung der Kugel wo0:=-12.5 * -12.5 Orientierung der Drehachse beta:=-4.° * -0.069813
wx0:=wo0 * cos(beta) * -12.4696 wy0:=wo0 * sin(beta) * 0.871956
Startpunkt xs:=[0 -0.28 0] * [0 -0.28 0]
    
```

Abb.4

Zuerst erfolgt hier die Analyse des geölte Bahnteils:

```

Berechnung Abschnitt 1
Einheitsvektor der Peripheriegeschwindigkeit beimStart
vb1:=unitV([vx0 vy0 0]+crossP([wx0 wy0 0],[0 0 -r])) * [0.979194 -0.202926 0.]
Parameterform der Bahnkurve im 1. Teil
xk1:=t* vx0-0.5 * t^2 * vb1[1,1] * mu1 * g * 7.99878 * t-0.239903 * t^2
yk1:=xs[1,2]+t* vy0-0.5 * t^2 * vb1[1,2] * mu1 * g * 0.049717 * t^2-0.139619 * t-0.28
Wann erreicht die Kugel das Ende des ersten Abschnitts ?
lsg1:=zeros(xk1-lü,t) * {1.57459,31.7672} t1:=lsg1[1] * 1.57459
Wann würde die Gleitphase enden ?
tw1:= 2 * norm([vx0 vy0 0]+crossP([wx0 wy0 0],[0 0 -r])) / (7 * g * mu1) * 4.70081
Geschwindigkeitsvektor zur Zeit t1
v1:=[vx0 vy0 0]-mu1 * g * vb1 * t1 * [7.24329 0.016948 0.]
y-Koordinate zur Zeit t1 yt1:=xs[1,2]+t1* vy0-0.5 * t1^2 * vb1[1,2] * mu1 * g * -0.376578
Drehvektor zur Zeit t1
wt1:=[wx0 wy0 0]+ 5 * g * mu1 * t1 / (2 * r^2) * crossP([0 0 -r],vb1) * [-15.7314 -14.8675 0.]
    
```

Abb.5

Die Zeit tw1 ist grösser als t1, d.h. die Kugel gleitet die ganze Zeit. Die Schwerpunktschwindigkeit hat wie erwartet leicht abgenommen. Die Drehgeschwindigkeit um die y-Achse hingegen hat wegen der Gleitreibung zugenommen.

Nun werden die Endwerte des ersten Abschnitts zu den Anfangswerten des zweiten Abschnitts:

```

Berechnung Abschnitt 2
Einheitsvektor der Peripheriegeschwindigkeit beimStart bleibt unverändert
Parameterform der Bahnkurve im 2. Teil
xk2:=lü+t* v1[1,1]-0.5 * t^2 * vb1[1,1] * mu2 * g * -1.19951 * t^2+7.24329 * t+12
yk2:=yt1+t* v1[1,2]-0.5 * t^2 * vb1[1,2] * mu2 * g * 0.248584 * t^2+0.016948 * t-0.376578
Wann erreicht die Kugel das Ende des zweiten Abschnitts ?
lsg2:=zeros(xk2-lb,t) * {0.990984,5.04754} t2:=lsg2[1] * 0.990984
Wann würde die Gleitphase enden ?
tw2:= 2 * norm([v1[1,1] v1[1,2] 0]+crossP([wt1],[0 0 -r])) / (7 * g * mu2) * 1.07513
Geschwindigkeitsvektor zur Zeit t2
v2:=[v1[1,1] v1[1,2] 0]-mu2 * g * vb1 * t2 * [4.86589 0.509634 0.]
Impaktwinkel
theta:= atan(v2[1,2] / v2[1,1]) * 180 / pi * 5.97914 Grad
y-Koordinate auf der Ziellinie
yk2:=t2 * -0.115661
    
```

Abb.6

Die Zeit tw2 ist noch wenig größer als t2, d.h. die Kugel gleitet knapp über das Bahnde hinaus. Die Zielwerte 6° / 0.12 m werden erreicht.

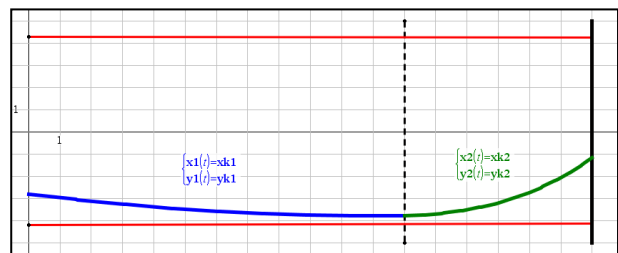


Abb.7

Wenn man die Anfangsgeschwindigkeit von 8 auf 7.5 zurücknimmt, rollt die Kugel auf dem letzten Meter.

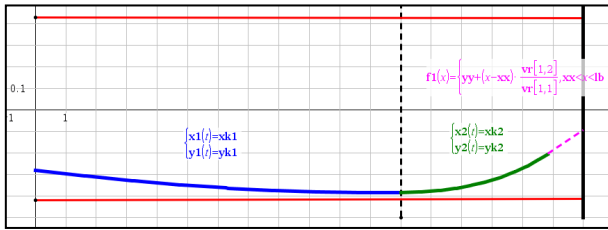


Abb.8

Bei geringerer Gleitgeschwindigkeit nimmt die Krümmung zu. Um den Zielpunkt 0.12 unter der Mittellinie zu treffen, muss man die Drehgeschwindigkeit beim Abwurf ebenfalls von -12.5 auf -7.5 reduzieren. Nun nimmt aber auch der Impaktwinkel ab und zwar von 6 auf 3.3 Grad. Mit einer Rollphase im letzten Abschnitt ist es nicht möglich, das Zielwertepaar $6^\circ / 0.12$ zu erreichen. Es ist also am besten, die Abwurfgeschwindigkeit so zu dosieren, dass die Kugel gerade bis zur Ziellinie gleitet.

Schließlich schätzen wir noch ab, welche Kraft aufzuwenden ist, um der Kugel den oben angenommenen seitlichen Drall zu geben. In der Annahme, dies sei in einer Abgabezone von $d = 0.5$ m Länge möglich, erhalten wir bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ für die entsprechende Zeit $\Delta t_\omega = d/v_0$.

Der Drehmomentstoß beträgt $K \cdot 2 \cdot r \cdot \Delta t_\omega$. Der Hebelarm reicht vom Griff oben bis zum Kontaktpunkt unten. Er ist gleich dem erzeugten Drehimpuls von $m \cdot r^2 \cdot \omega \cdot 2/5$. Mit $m = 6$ kg, $r = 0.12$ m erhalten wir:

$$K = \frac{m \cdot r \cdot v \cdot \omega}{5 \cdot d} \approx 35 \text{ N}$$

Autor:

Alfred Roulier
Neuenegg (Ch)