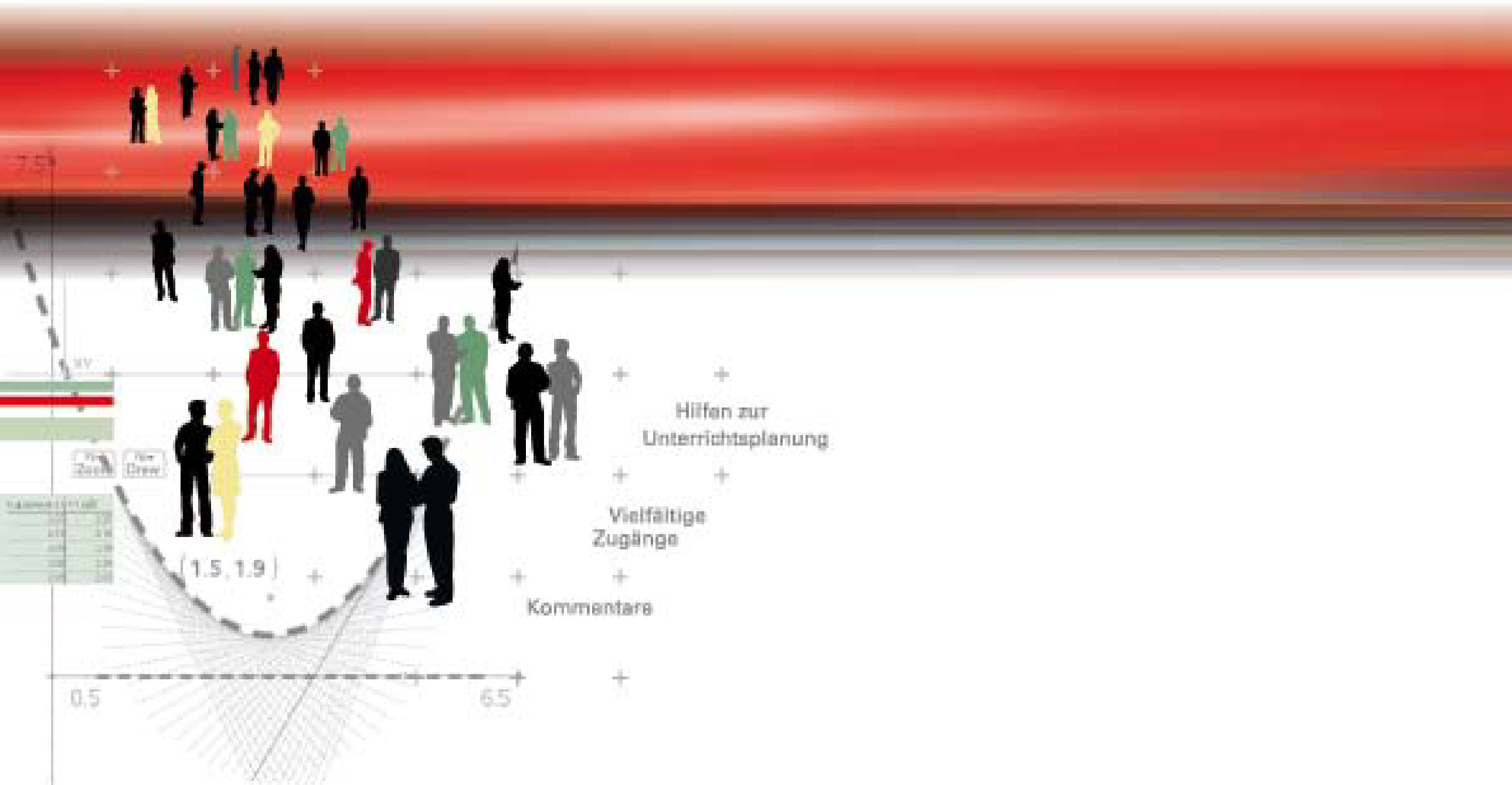
T³ DEUTSCHLAND
T³ ÖSTERREICH
T³ SCHWEIZ

T³-AKZENTE

Integralrechnung mit neuen Medien verstehensorientiert unterrichten

Ursula Schmidt, Andreas Pallack (Hrsg.)



Texas Instruments

T³-AKZENTE

Integralrechnung mit neuen Medien verstehensorientiert unterrichten

Ursula Schmidt, Andreas Pallack (Hrsg.)

Redaktion:
Andreas Pallack (Leitung), Ursula Schmidt und als Heftbegleiter: Barbara Hüser, Hubert Langlotz

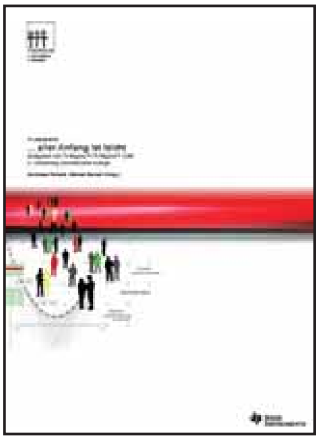
Autorinnen und Autoren:
Wolfgang Beer, Tobias Kaatze, Karl-Heinz Keunecke, Hubert Langlotz, Andreas Pallack, Angelika Reiß, Franz Schlöglhofer, Ursula Schmidt, Michael Schwarz, Robert Stark

Verlag:
Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Zentrum für Lehrerbildung

© 2011 T³
Dieses Werk wurde in der Absicht erarbeitet, Lehrerinnen und Lehrern geeignete Materialien für den Unterricht an die Hand zu geben. Die Anfertigung einer notwendigen Anzahl von Fotokopien für den Einsatz in der Klasse, einer Lehrerfortbildung oder einem Seminar ist daher gestattet. Hierbei ist auf das Copyright von T³ hinzuweisen. Jede Verwertung in anderen als den genannten oder den gesetzlich zugelassenen Fällen ist ohne schriftliche Genehmigung von T³ nicht zulässig. Alle verwendeten Marken sind Eigentum ihrer Inhaber.

Inhaltsverzeichnis

Infos zu weiteren Büchern:



Andreas Pallack & Bärbel Barzel (Hrsg.)
… aller Anfang ist leicht (Version 2.0)

Das Heft eignet sich bestens für den Einstieg in die TI-Nspire™ Technologie (hier Version 2.0). Nach einer kurzen Einführung finden Sie in diesem knapp 100 Seiten starken Heft in einem Basisteil Beiträge namhafter Autoren, die grundlegende Fragen im Umgang mit TI-Nspire™ sowie TI-Nspire™ CAS klären: Im Artikelteil, der sich anschließt, finden Sie weitere Ausarbeitungen.

Andreas Pallack & Hubert Langlotz (Hrsg.)
Differenzialrechnung mit neuen Medien verstehensorientiert unterrichten

Der erste Band der kleinen Analysisreihe nimmt die Differenzialrechnung in den Blick. Vorgestellt wird ein didaktisches Rahmenmodell, das zur Reflexion des eigenen Unterrichts genutzt werden kann. In den Einzelbeiträgen berichten Autorinnen und Autoren aus der Praxis über ihre Erfahrungen zum Einsatz digitaler Werkzeuge im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe.

Zu weiteren Materialien finden Sie Informationen unter www.ti-unterrichtsmaterialien.net.

© T³ 2011

Hinweise zum Buch
Integralrechnung mit neuen Medien verstehensorientiert unterrichten

Liebe Leserinnen und Leser,

bevor Sie starten, möchten wir Ihnen gerne einige Informationen über das Buch und nützliche Hinweise zum Umgang mit ihm geben.

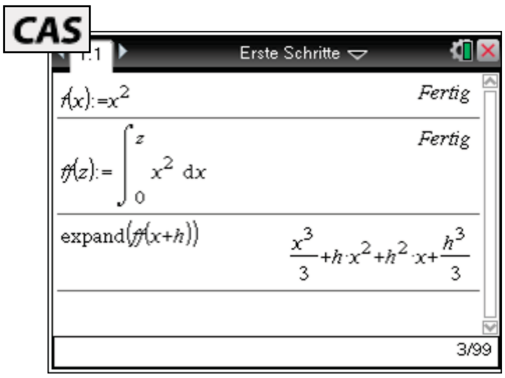
Die Reihe T^3-Akzente

Das vorliegende Buch ist das zweite aus einer Reihe, die sich explizit mit Gegenständen der gymnasialen Oberstufe auseinandersetzt. Ein markantes äußeres Kennzeichen dieser Reihe ist das im Titel jeweils prominent platzierte Adjektiv **verstehensorientiert**. Tatsächlich arbeitet das bundesweite Netzwerk T^3 seit vielen Jahren daran, Lehrkräften zu helfen, dass ihre Schülerinnen und Schüler die Inhalte und Denkweisen des Faches Mathematik besser verstehen und sie nachhaltig produktiv nutzen können. Wir tragen mit diesem Buch den Diskussionsstand zur Integralrechnung zusammen. Die Vorschläge in diesem Buch sehen wir entsprechend als einen Werkstattbericht, der zur Diskussion und Weiterentwicklung einlädt.

Alle Bücher der T^3-Akzente Reihe werden jeweils von zwei Lehrern begleitet. Sie entscheiden mit bei der Auswahl der Manuskripte und unterziehen das gesamte Heft in jeder Phase seiner Entstehung einer intensiven Prüfung. Wir danken auf diesem Weg **Barbara Hüser** und **Hubert Langlotz** für ihre Arbeit als Heftbegleiter.

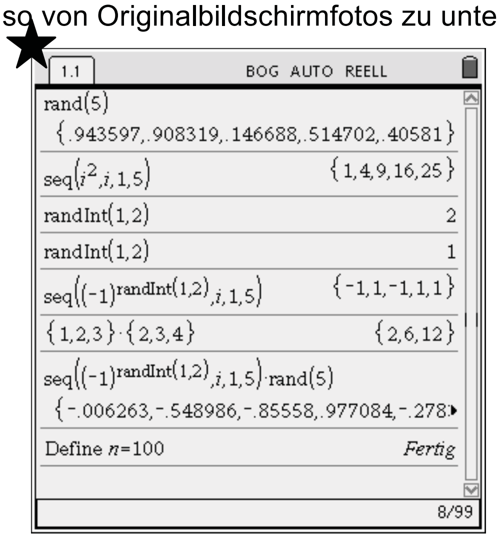
Hinweise zum Umgang mit dem Buch

Das Buch wurde für die Technologie **TI-Nspire™** geschrieben. In den Artikeln finden Sie jeweils Hinweise, ob diese nur für TI-Nspire™ CAS oder sowohl für TI-Nspire™ CAS wie auch TI-Nspire™ (numerischer Graphikrechner ohne CAS) geeignet sind. Alle Aufgaben lassen sich auch mit der entsprechenden **TI-Nspire™ Software** oder **TI-Nspire™ CAS Software** am Computer bearbeiten. Das CAS Zeichen zeigt an, dass an dieser Stelle das CAS benötigt wird:



Die erläuternden Bildschirmfotos im Heft stammen überwiegend von Handhelds mit der Softwareversion 2.1. Kostenlose Softwareupgrades können auf den TI-Webseiten (education.ti.com/deutschland, education.ti.com/oesterreich, education.ti.com/schweiz) abgerufen werden – insbesondere finden Sie dort die jüngst von TI vorgestellte Version 3.0 der TI-Nspire™ Technologie, zu denen jetzt auch Handhelds mit Farbdisplay angeboten werden. Alle im Buch abgedruckten Befehle wurden mit der Version 3.0 von TI-Nspire™ CAS getestet. Die Beispiele aus diesem Buch kann man entsprechend auch mit neueren Versionen umsetzen.

Zu Gunsten der Lesbarkeit des Textes wurden einige Bildschirmfotos montiert (z. B. vergrößert), um eine bessere Übersicht zu bieten. Diese sind mit einem Stern am oberen linken Rand gekennzeichnet und so von Originalbildschirmfotos zu unterscheiden.



Wie auch in den ersten beiden Bänden dieser Reihe greifen die Beiträge auf ein Glossar mit nützlichen Bedienhinweisen zurück. Glossarhinweise erkennen Sie daran, dass sie grau hinterlegt sind (z. B. Graphen einer Funktion zeichnen). Die entsprechende Passage finden Sie dann auch im Glossar. Damit Sie dieses Buch auch langfristig nutzen können, drucken wir das Glossar nicht ab, sondern stellen es basierend auf der aktuellen Version des Betriebssystems online zur Verfügung.

Sie haben nun zwei Möglichkeiten, auf das Glossar zuzugreifen:

(1) Sie laden das Glossar aus der Materialdatenbank herunter:
www.ti-unterrichtsmaterialien.net, Schlagwort ‚*Glossar*‘

(2) Sie nutzen unser Online-Glossar:
http://wiki.zum.de/TI-Nspire/Glossar

Das Glossar wird regelmäßig aktualisiert. Sämtliche Bedienhinweise in den Einheiten und Artikeln sind so verfasst, dass sie mit allen zukünftigen Glossars verträglich sind.

In den Kopfzeilen der Artikel finden Sie eine Laufleiste:

Titel der Einheit	Kopiervorlage	Lösungshinweise	Didaktischer Kommentar	Zusatzmaterial

Ihr können Sie entnehmen, in welchem Teil des Artikels Sie sich gerade befinden. Die Aufgabenstellungen finden Sie z. B. unter *Kopiervorlage*, Hinweise für den Unterricht in der Regel unter *Didaktischer Kommentar*.

Ebenfalls auf der Materialdatenbank (www.ti-unterrichtsmaterialien.net) finden Sie viele der in diesem Buch vorgestellten TI-Nspire™-Dateien.

Münster, im Mai 2011

Ursula Schmidt, Andreas Pallack (Herausgeber)

 © T^3 2011

Von Flächen, Summen und Bilanzen

Integralrechnung verstehensorientiert unterrichten

Ursula Schmidt, Kamen

Was verbinden Abiturienten zu Beginn ihres Studiums noch mit dem Begriff „Integralrechnung“? Meist erhält man Antworten wie „Flächenberechnung“, „Stammfunktionen bestimmen“, „Umkehrung der Differenzialrechnung“. Dass die Integralrechnung aber auch andere Aspekte hat, wie z. B. aus einer Änderungsrate den Gesamtbestand zu rekonstruieren, ist weniger vertraut. Liegt das daran, dass im Mathematikunterricht der Integralbegriff meistens über das Problem der Berechnung von Flächeninhalten eingeführt wird? Schülerinnen und Schüler setzen häufig verkürzt und einseitig die Integralrechnung mit der Flächeninhaltsberechnung gleich und kommen nur mühsam auf die Idee, sie auch in anderen Anwendungskontexten zu nutzen.

Früher? – ein Blick in den Klassenraum

Ein Standardproblem zur Einführung in die Integralrechnung ist die Berechnung der Größe der Fläche, die der Graph der Funktion $y = x^2$ mit der x-Achse und der Geraden $x = 1$ im 1. Quadranten einschließt.

Der Inhalt dieses Flächenstücks wird eingeschachtelt durch die Berechnung einer Obersumme und einer Untersumme. Dazu wird das Intervall [0; b] in n gleich große Teilintervalle der Länge b/n zerlegt. Da die Funktion f monoton steigend ist, werden bei der Bildung der Untersumme alle Funktionswerte auf einem Teilintervall durch den Funktionswert am linken Rand des Teilintervalls abgeschätzt und für die Obersumme entsprechend durch den Funktionswert am rechten Rand des Intervalls. Dabei lautet z. B. der Term für die Obersumme:

$$S_O(b) = \sum_{i=1}^{n} \left(i \cdot \frac{b}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n}.$$

Etwas einfacher ohne Summenzeichen:

$$S_O(b) = \left(\frac{b}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = \left(\frac{b}{n}\right)^2 \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Mit einigen Umformungen ergibt sich:

$$S_O(b) = \frac{b^3}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right). \text{ Für } n \to \infty \text{ folgt: } S_O(b) \to \frac{b^3}{3}.$$

Die Untersumme wird analog berechnet. Ober- und Untersumme schachteln den gesuchten Flächeninhalt ein und stimmen im Grenzwert $n \to \infty$ überein.

Dieser Zugang zum Integral ist algebraisch sehr aufwändig und für die meisten Schülerinnen und Schüler nur schwer nachzuvollziehen. Dazu kommt, dass dabei Formeln für die Summen von Quadratzahlen verwendet werden, die aus dem bisherigen Unterricht nicht bekannt und sehr speziell sind, so dass die Herleitung des Terms für den Flächeninhalt häufig keine vollständige Herleitung ist, sondern Zwischenergebnisse vom Himmel fallen.

Meist – so zumindest meine Erfahrung – wird die Berechnung eines Integrals ohne Kalkül nur an dieser einen exemplarischen Rechnung durchgeführt; der Weg zum Rezept ist dann kurz: Integralfunktion = Flächeninhalt über dem Intervall [0; x] = Stammfunktion an der oberen Grenze.

Die zu schnelle Formalisierung verhindert die Ausbildung angemessener Vorstellungen. In der Folge bleibt die Begriffsbildung rudimentär und es erfolgt außer auf der formal-syntaktischen Ebene keine Vernetzung mit den Vorstellungen der Differenzialrechnung. Diese ist aber auch insbesondere dann schwer herzustellen, wenn die Ableitung nur geometrisch als Steigung einer Tangente an den Graphen eingeführt wurde.

Verstehensorientierung in der Integralrechnung

Unterricht, der ein vertieftes und nachhaltiges Begriffsverständnis anstrebt, sollte deshalb nicht die formale, algebraisch überfrachtete Theorie an den Anfang stellen, um sie anschließend auf Beispiele anzuwenden, sondern umgekehrt vorgehen: Die Beispiele, die zu Beginn durchgearbeitet werden, sollten eine tragfähige Basis bilden, auf der durch zunehmende Abstraktionen das Theoriegebäude errichtet wird. Die Einführungsbeispiele sollten möglichst viele Aspekte des Begriffs erfassen und auch so angelegt sein, dass Fehlvorstellungen vermieden werden.

Um mehr Sinn in einer neuen Begriffsbildung zu sehen, ist es für viele Schülerinnen und Schüler motivierend, diese Begriffe in einem realen Bezug kennenzulernen. Das heißt nicht unbedingt, dass man in der Schule genauso rechnen muss wie in realen Anwendungssituationen! Diese sind häufig so komplex, dass unter Berücksichtigung aller Faktoren der Blick auf die eigentlich grundlegenden Ideen verstellt wird. Die schulischen Kontexte können reale Anwendungen nur selten vollständig umsetzen – sie können sich aber an realen Anwendungen orientieren und so den Begriffen Bedeutung geben. Realitätsorientierte Kontexte stecken einen Rahmen ab, der die anschauliche Vorstellung der Lernenden unterstützt.

In der Arbeit mit Kontexten lernen die Schülerinnen und Schüler Sachsituationen zu mathematisieren und mathematische Ergebnisse wiederum im Kontext zu bewerten. Sie lernen auch, wie sie unbekannte Situationen für sich handhabbar machen, indem sie heuristische Strategien anwenden. Die erworbenen mathematischen Kompetenzen im Modellieren und Problemlösen tragen damit auch über die konkrete Aufgabe oder Unterrichtsreihe hinaus. Außerdem tragen Kontexte auch zur fächerübergreifenden Bildung bei, da die Lernenden inhaltlich etwas über den Kontext erfahren.

Neben der Realitätsorientierung ist für einen nachhaltigen Kompetenzerwerb auch wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler sich die Ideen und Konzepte aktiv handelnd aneignen. Der Unterricht sollte so angelegt sein, dass genügend Raum bleibt zum Explorieren und Experimentieren und für unterschiedliche Lösungswege. Der Austausch von Beobachtungen und Vermutungen sowie die Präsentation von Lösungen schaffen Kommunikationsanlässe, die zur Klärung des Verständnisses beitragen. Unterstützt wird dies durch kooperative Unterrichtsformen und Phasen selbstständigen Arbeitens.

Kontexte zur Sinnstiftung in der Integralrechnung

Zu den grundlegenden Vorstellungen, die mit dem Integralbegriff verbunden sind, gehören:
- Messen (Längen, Flächeninhalte, Volumina)
- Rekonstruieren: von der Änderungsrate zum Bestand (Produktsummen)
- Kumulieren und Bilanzieren (einen Bestand verwalten)
- Mittelwertbildung (Erwartungswerte)
- die näherungsweise Berechnung diskreter Summen.

Bei der geometrischen Einführung über den Flächeninhalt fehlt z. B. der Bilanzaspekt, d. h. man muss später mühsam zusätzlich erarbeiten, dass Integrale auch negativ werden können.

Um viele Aspekte des Integralbegriffs zu erfassen, bieten sich für eine Einführung deshalb eher Aufgabenstellungen an, bei denen ein Bestand (eine Funktion) aus der mittleren oder momentanen Änderungsrate (der gegebenen Ableitungsfunktion) näherungsweise oder exakt rekonstruiert wird. Idealerweise wurde im vorhergehenden Unterricht der Ableitungs-

 © T^3 2011

begriff als momentane Änderungsrate entwickelt, so dass nun bei der Einführung des Integrals der Zusammenhang der beiden Begriffe von Anfang an deutlich wird.

Hilfreich ist es, die Schülerinnen und Schüler in der Einführungsphase relativ schnell mit verschiedenen Kontexten bekannt zu machen und daraus die gemeinsame Grundidee zu extrahieren. Dazu bietet sich als Arbeitsform eine arbeitsteilige Gruppenarbeit an, gefolgt von einer anschließenden Präsentationsphase. Z. B. können die einzelnen Gruppen Plakate erstellen, die dann in Form eines Museumsgangs präsentiert werden. Dieses Vorgehen wurde unter anderem im Projekt SINUS-Transfer erprobt. [MSW NRW, 2007]

Beispiel für einen Einführungskontext: Wassertank

Die grundlegenden Ideen lassen sich bereits an einem sehr einfachen Beispiel entwickeln. Der folgende Aufgabentext kann als Vorstellungsübung vorgelesen werden (oder suchen Sie unter dem Schlagwort „Wassertank“ ein passendes Bild im Internet).

Stellen Sie sich einen Wassertank vor: Der Wassertank ist aus weißem Kunststoff. Er ist annähernd quaderförmig, hat aber leicht abgerundete Ecken und Kanten sowie zur Stabilisierung leichte Rillen an den Wänden. Er steht auf einer Metallplatte. Er ist 1,20 lang, 1,00 m breit und 1,16 cm hoch.

Der Wassertank hat oben eine verschraubbare Öffnung, durch die er befüllt werden kann. An einer Seitenfläche hat er 15 cm über seiner Bodenfläche einen Auslass mit Hahn. Im Moment ist soviel Wasser im Tank, dass es 50 cm hoch steht.

Der Hahn wird geöffnet. Es fließen 10 Liter/min. ab. Nachdem der Wasserstand im Tank die Höhe des Hahns erreicht hat, wird der Hahn geschlossen. Mit einem Schlauch wird der Tank sofort wieder von oben mit Wasser befüllt. Die Zuflussrate beträgt 15 Liter/min. Der Füllvorgang wird beendet, wenn das Wasser im Tank 1,00 m hoch steht.

a) Stellen Sie die Höhe des Wasserstands in diesem Tank in Abhängigkeit von der Zeit dar.

b) Stellen Sie auch die Zufluss-/Abflussrate in Abhängigkeit von der Zeit dar.

c) Der Tank wurde vollständig geleert und wird jetzt wieder befüllt. Die Zuflussrate wird dabei gleichmäßig erhöht von 0 Liter/min zu Beginn auf 20 Liter/min nach 5 Minuten. Stellen Sie die Zuflussrate und die Wassermenge im Tank während dieser 5 Minuten grafisch dar.

Lösungen und Hinweise

a) Hilfreich ist, zuerst zu überschlagen, wie lange der Abflussvorgang etwa dauert, um eine geeignete Zeiteinheit zu finden. Danach können die Schülerinnen und Schüler eine Wertetabelle für den Wasserstand erstellen und danach zeichnen. Die Aufgabe kann auf dem Rechner gelöst werden, erforderlich ist das aber nicht.

Grundfläche: $1{,}20\ m^2 = 120\ dm^2$; Volumen zu Beginn: $1{,}2\ m^2 \cdot 0{,}5\ m = 0{,}6\ m^3$, also $600\ \ell$. Auf Höhe des Hahns sind noch $120 \cdot 1{,}5\ \ell = 180\ \ell$ im Tank. Bei einer Abflussrate von $10\ \ell$/min ist der Tank nach 42 min bis zum Hahn geleert.

Die Screenshots zeigen einen experimentellen Zugang mit dem Rechner. Zuerst wurde im Minutentakt gerechnet – später im 5-Minutentakt.

	A zeit	B liter	C hoehe	D abfluss	E
1	0	600	50	10	
2	1	590	49.1667	10	
3	2	580	48.3333	10	
4	3	570	47.5	10	
5	4	560	46.6667	10	
6	5	550	45.8333	10	

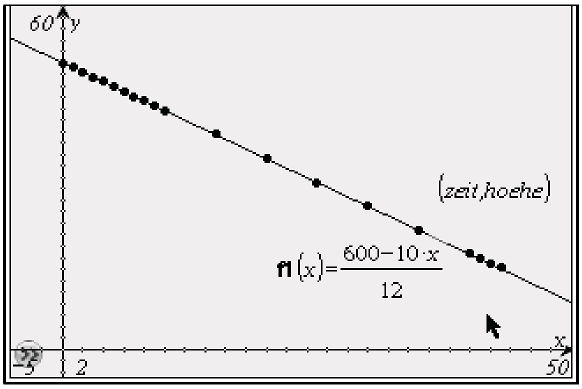
D1 10

	A zeit	B liter	C hoehe	D abfluss	E
10	9	510	42.5	10	
11	10	500	41.6667	50	
12	15	450	37.5	50	
13	20	400	33.3333	50	
14	25	350	29.1667	50	
15	30	300	25.	50	

D11 50

		B liter	C hoehe	D abfluss	E
15	30	300	25.	50	
16	35	250	20.8333	50	
17	40	200	16.6667	10	
18	41	190	15.8333	10	
19	42	180	15.	10	
20	43	170	14.1667	10	

B19 =b18–d18



Die Wasserhöhe wird in der Abflussphase durch diesen Term beschrieben:

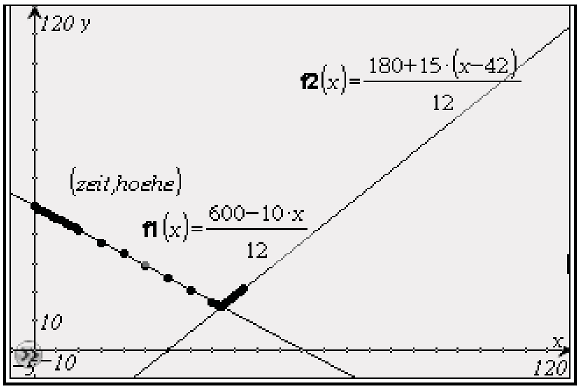
f1(x) = (600 - 10*x)/12.

Nach 42 min setzt der Zufluss von 15 ℓ/min ein. Die Tabelle im Rechner kann weitergeführt werden oder es wird sofort ein Term notiert:

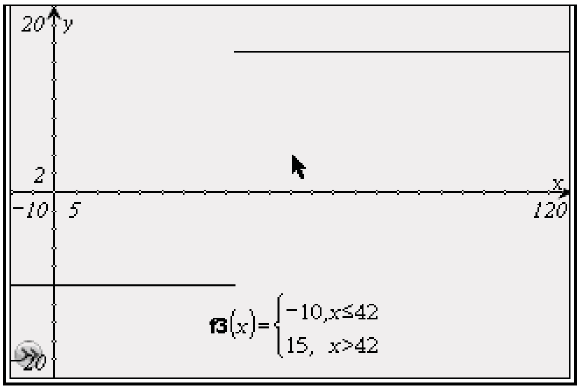
f2(x) = (180 +15*(x - 42))/12.

	A zeit	B liter	C hoehe	D abfluss	E
18	41	190	15.8333	10	
19	42	180	15.	15	
20	43	195	16.25	15	
21	44	210	17.5	15	
22	45	225	18.75	15	
23	46	240	20.	15	

B20 =b19+d19



b) Die Zufluss-/Abflussrate wird erst anschließend gezeichnet, um im Zusammenhang mit dem Graph der Wassermenge die Vorzeichen festzulegen: „minus“ für Abfluss, „plus“ für Zufluss.

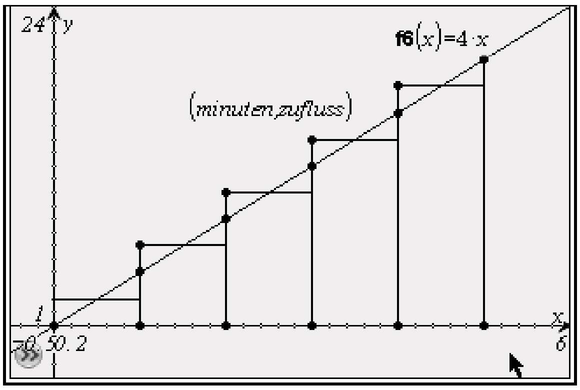


Hinweis: Da der Begriff „Zufluss“ missverständlich ist, weil man sich darunter sowohl die Zuflussrate als auch die Menge des zugeflossenen Wassers vorstellen kann, empfiehlt sich in Aufgabenstellungen durchweg „Zufluss*rate*“ für die Änderungsrate zu schreiben (manchmal findet sich auch „Zufluss*geschwindigkeit*“).

c) Die Situation wirkt konstruiert, wenn man realistische Kontexte erwartet. Sie liefert aber den Schlüssel, wie die Schülerinnen und Schüler mit dieser neuen Situation umgehen können. Bei anderen Zuflussraten wählen sie aus ihrem Repertoire heuristischer Strategien die Strategie „Zurückführen auf Bekanntes“ und das heißt hier: konstante Zuflussraten. Der gesamte Zeitraum von 5 Min. wird in viele kleinere Zeitintervalle (vielleicht zunächst 1 Min. oder 0,5 Min.) zerlegt, auf denen die Zuflussrate als konstant betrachtet wird. Die lineare Funktion wird also näherungsweise ersetzt durch eine Treppenfunktion.

Es bleibt nur noch zu diskutieren, wie die Treppen gebildet werden: nimmt man für die Höhe der Stufe auf einem Intervall den kleinsten Funktionswert (hier also den Funktionswert am linken Rand) oder nimmt man den größten Funktionswert (hier also den Funktionswert am rechten Rand). Schülerinnen und Schüler schlagen häufig vor, einen Mittelwert aus beiden zu bilden.

Grafisch stellt sich das so dar:



	A minuten	B wasser	C zufluss	D hoch	E
◆				=wasser*1	
1	0	0	0	0	
2	1	2.	4	0.166667	
3	2	8.	8	0.666667	
4	3	18.	12	1.5	
5	4	32.	16	2.66667	
6	5	50.	20	4.16667	

B2 $=b1+0.5\cdot(c1+c2)$

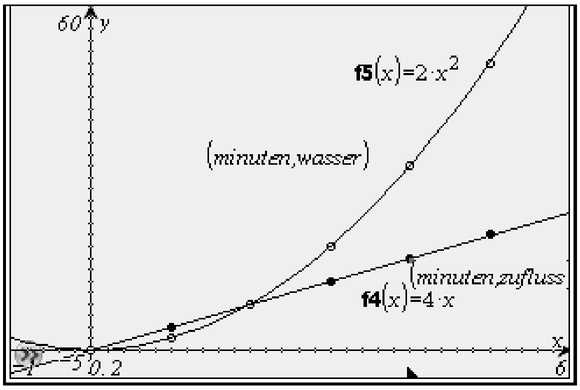
Manchmal ist ein Lehrerimpuls nötig, manchmal kommen die Schülerinnen und Schüler aber auch ganz allein auf eine geometrische Deutung des Sachverhalts: Mit den Maßzahlen aus dem Produkt *Zuflussrate * Zeitintervall* berechnen sie die Maßzahl des Inhalts der Rechteckfläche über einem Teilintervall. Die Produktsumme steht für die Gesamtmenge des zugeflossenen Wassers.

Je nach Variante der Annäherung ergeben sich so Untersummen, Obersummen oder Mittelsummen. Letztere lassen sich aber leicht umdeuten als Summe der Flächeninhalte von Trapezen, was insgesamt bedeutet: der Flächeninhalt unter dem Graphen der (linearen) Zuflussfunktion wird bestimmt.

Mit Hilfe der Dreiecksformel aus der Sekundarstufe I lässt sich das Ergebnis überprüfen:

$$0{,}5 \cdot x \cdot 4x = 2x^2$$

Der Graph dieser Funktion läuft genau durch die Punkte des Streuplots, der die Wassermenge in Abhängigkeit von der Minutenzahl zeigt.



Wenn diese Zusammenhänge geklärt sind, kann man sich noch einmal dem Problem des Abflusses von Wasser zuwenden. Das kann an dem Ausgangsbeispiel a), b) diskutiert werden. Solange Wasser abläuft, muss diese Menge subtrahiert werden; geometrisch gedeutet heißt das: Hier muss ein Flächeninhalt mit (negativem) Vorzeichen addiert werden.

In der Gesamtbilanz bis zu einem Zeitpunkt x werden oberhalb der Zeitachse liegende Flächeninhalte positiv und unterhalb der Zeitachse liegende Flächeninhalte negativ gezählt. Das Volumen im Wassertank ist dann eine Summe vorzeichenbehafteter Flächeninhalte (orientierter Flächeninhalte).

Die Orientierung bzw. das Vorzeichen kann auch folgendermaßen definiert werden: Man läuft auf der Zeitachse vom linken Rand des Teilintervalls zum rechten Rand und umrundet dann weiter die Fläche: geschieht dies im mathematisch negativen Sinne, ist die Fläche negativ orientiert, sonst positiv.

Fazit: Anders als bei einem Einstieg über Flächenberechnungen steht bei diesem Beispiel die Idee der Bilanzierung im Vordergrund. Damit ist es leicht, den Unterschied zwischen einer Integralfunktion (hier: als Bilanzsumme) und einer Flächeninhaltsfunktion zu erkennen. Für letztere hätte man eben alle Flächeninhalte positiv addiert. Damit lassen sich mit diesem vom Kontext her sehr einfachen Beispiel schon wesentliche Grundvorstellungen zu Integralfunktionen aufbauen.

Die Idee, aus der lokalen Änderungsrate die Bestandsfunktion selbst zu rekonstruieren, funktioniert natürlich nicht nur im Kontext „Wassertank“, sondern auch im Großen (z. B. Steuerung der Zu- und Abflüsse an einem Pumpspeicherkraftwerk, [Schmidt, 2007]). Man könnte diesen Kontext im Anschluss an die Aufgabe „Wassertank“ ansprechen, um den Schülerinnen und Schülern zu zeigen, wo die Mathematik, die sie eben gelernt haben, in der Umwelt vorkommt.

Auf dem Weg zum Integralbegriff

Wo stehen wir? Bisher können die Schülerinnen und Schüler Integrale von Treppenfunktionen und von linearen Funktionen bestimmen.

Die hierbei erworbenen Rechentechniken reichen aus, **jedes** Kumulationsproblem zu lösen, bei dem die Änderungsraten durch Messungen gewonnen werden und in Form von diskreten **Messwerten** in einer Tabelle vorliegen. In einer grafischen Darstellung lassen sich benach-

© T³ 2011

barte Messpunkte geradlinig verbinden. Man berechnet dann, genau wie vorher, die orientierten Flächeninhalte der Trapeze und bildet anschließend deren Summe.

So lassen sich aus Aufzeichnungen der Geschwindigkeit zurückgelegte Wege rekonstruieren, aus Messungen der Beschleunigung gewinnt man wiederum Aussagen über die Geschwindigkeit. In dem Artikel *„Trägheitsnavigation“* von Wolfgang Beer wird erläutert, in welchem realen Kontext man tatsächlich so vorgeht und am Beispiel der Fahrt mit einem Tretroller lernen die Schülerinnen und Schüler, wie diese Rekonstruktionsschritte im Einzelnen gestaltet werden.

Bei anderen Messdaten ist nicht so deutlich, dass die gegebene Funktion eine Änderungsrate ist. Hier liegt der Fokus eher auf dem Aspekt Kumulation einer Größe zu einem Gesamtbestand.

Zum Beispiel wird im Artikel *„Die Schweinegrippe – mathematisch gesehen“* von Robert Stark und Tobias Kaatze im Kontext der Ausbreitung einer Epidemie aus der fortgesetzten Summierung der Anzahl der Neuerkrankungen auf die Gesamtzahl aller Infizierten geschlossen.

Eine vergleichbare Sachlage hat man z. B. bei Messdaten zur Ansammlung von Schadstoffen (in der Luft, im Körper).

Die Deutung der Teilprodukte als (orientierte) Flächeninhalte ist eine spezielle Darstellung, die als Interpretationshilfe dienen kann oder eine heuristische Funktion hat. Sie hat den Vorteil, dass mit dem Begriff „Fläche“ eine vertikale Vernetzung über die gesamte Schulzeit möglich ist. Wird sie aber überbetont, kann dies zu Fehlvorstellungen der Schülerinnen und Schüler führen.

Eine Verbindung zu dem Flächenkonzept der Sek. I, aber auch zu Füllproblemen wird von Hubert Langlotz in seinem Artikel *„Von Flächen und Füllhöhen“* hergestellt.

Eine mögliche horizontale Vernetzung lässt sich zwischen Integralrechnung und Wahrscheinlichkeitsrechnung herstellen: Z. B. lässt sich die Berechnung einer kumulierten Binomialverteilung auf die Berechnung des Integrals der Gauß-Funktion zurückführen.

Diese Anwendungsbeispiele legen aber auch nahe, dass es nützlich wäre, ein Verfahren zu finden, mit dem man Integrale zu anderen als konstanten und linearen Funktionen bestimmen kann. Auch hier trägt wieder die Problemlösestrategie „Zurückführen auf Bekanntes“, indem die neue Aufgabe auf die Situation mit den gegebenen Messwerten zurückgeführt wird: Es wird eine Wertetabelle der Funktion erstellt, die Punkte werden zu einem Streckenzug verbunden und die Fläche unter der Kurve wird durch (orientierte) Trapezflächen (oder Rechtecke) angenähert.

Die Berechnungen lassen sich aber erheblich vereinfachen, wenn man nicht immer wieder diskretisieren muss, sondern in einem stetigen Modell verbleiben und auf die dort zur Verfügung stehende, leistungsfähige Theorie zurückgreifen kann.

Übergang von einer diskreten Problemstellung zu einem stetigen Modell

Voraussetzung ist, dass die Schülerinnen und Schüler verinnerlicht haben, wie man näherungsweise durch Aufsummieren von Flächeninhalten von Rechtecken oder Trapezen zu (bestimmten) Integralen gelangt. Man kann dann dazu übergehen, bei fester unterer Grenze die obere Grenze zu variieren und damit den funktionalen Aspekt zu betonen. In dieser Phase wird dekontextualisiert, d. h. die Lernenden arbeiten ab jetzt innermathematisch weiter und konzentrieren sich auf die Zusammenhänge der Randfunktion f und der Integralfunktion. Die Existenz der Integralfunktion wird an dieser Stelle nicht problematisiert.

Als Integralfunktion I_a zu einer Funktion f: [a;b] → IR definiert man die Funktion, die jedem x ∈ [a;b] den orientierten Inhalt der Fläche zuordnet, die f mit der Rechtsachse zwischen a und x einschließt. f nennen wir hier auch Randfunktion.

Beispiel: $f_1(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$

Berechnen Sie mit einem numerischen Verfahren eine Wertetabelle der Integralfunktion I_0 von 0 bis zu der Obergrenze x und stellen Sie die Ergebnisse in einem Streuplot dar.

Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass $I_0(0) = 0$ (d. h. der Bestand ist zu Beginn = 0).

Welche Beziehungen erkennen Sie zwischen den Graphen von f_1 und I_0?

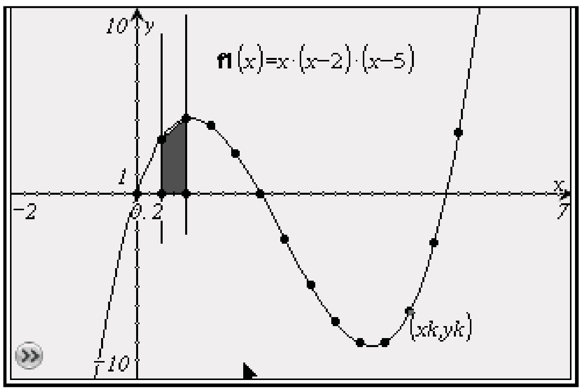
Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse noch auf einem anderen Weg.

Kommentierte Lösungsskizze
(Flächenberechnung in der Tabellenkalkulation)

Bei der Bearbeitung der Anwendungsaufgaben haben die Schülerinnen und Schüler alle Techniken erworben, um diese Aufgabe selbständig in Partnerarbeit oder Kleingruppen zu lösen.

Die Wertetabelle wird in **Lists & Spreadsheet** angelegt. Für den ersten Versuch könnte der Abstand der Stützstellen z. B. 0,4 betragen. In den Anwendungsaufgaben ist die untere Grenze häufig 0, diese wird hier übernommen.

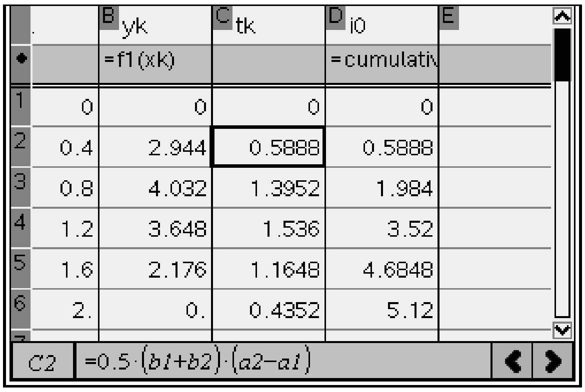
Im nächsten Schritt werden die Integrale über den Teilintervallen durch (orientierte) Trapezflächen angenähert. Eines davon ist exemplarisch eingezeichnet.



Die Wertetabelle der Integralfunktion entsteht dann durch sukzessives Aufaddieren der (orientierten) Teiltrapeze.

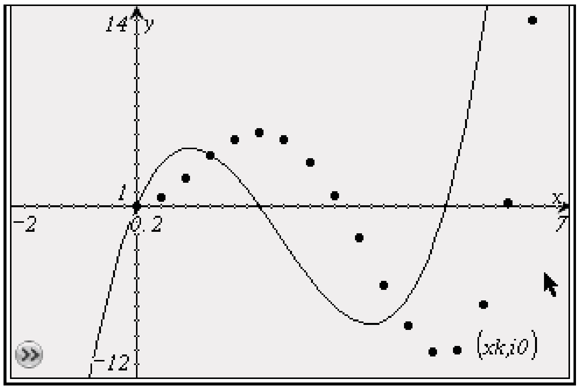
Um eine Vorstellung vom Verlauf der Integralfunktion zu erhalten, wird ein Streuplot zusammen mit dem Graphen der Randfunktion f in ein Koordinatensystem gezeichnet.

© T^3 2011



	B yk	C tk	D i0	E
◆	=f1(xk)		=cumulativ	
0	0	0	0	
0.4	2.944	0.5888	0.5888	
0.8	4.032	1.3952	1.984	
1.2	3.648	1.536	3.52	
1.6	2.176	1.1648	4.6848	
2.	0.	0.4352	5.12	

C2 =0.5·(b1+b2)·(a2−a1)



Beobachtungen

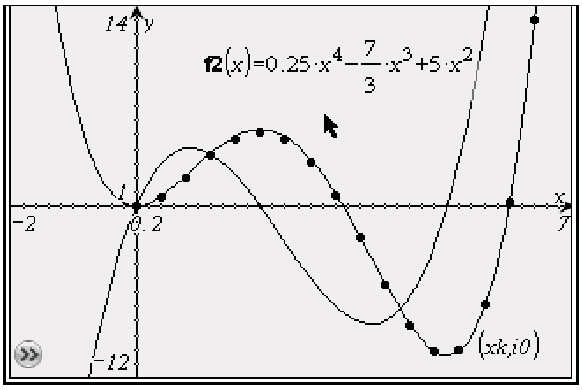
- Das Punktediagramm hat ein Maximum an der Nullstelle von f_1.
- Wenn x größer ist als diese Nullstelle, ist der Graph der Integralfunktion zunächst streng monoton fallend und $f_1(x)$ nimmt negative Werte an.
- Wenn $f_1(x)$ positive Werte annimmt, ist der Graph der Integralfunktion streng monoton steigend.

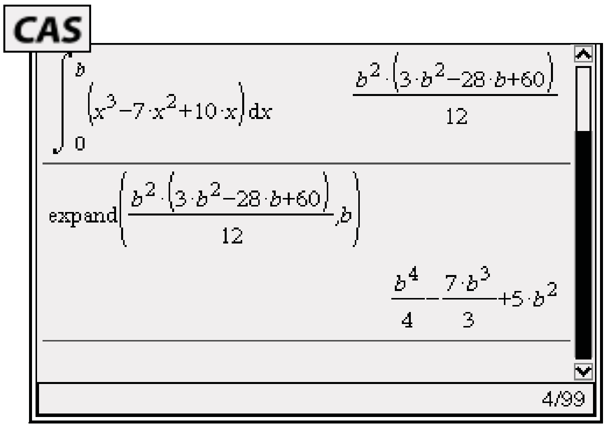
Vermutung: f_1 ist die erste Ableitung der Integralfunktion I_0.

Überprüfen lässt sich dies, indem man einen Term findet, der abgeleitet mit $f_1(x)$ übereinstimmt,

z. B. $f_2(x) = 1/4\ x^4 – 7/3\ x^3 + 5x^2$. [Probe: $f_2'(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$]

Das sollten Schülerinnen und Schüler auch noch im Kopf rechnen können, aber sie können es später überprüfen, indem sie im **Calculator** das Integral berechnen lassen. Zunächst einmal bietet sich aber ein grafischer Test an: Neben den Streuplot von I_0 wird der Graph der Funktion f_2 gezeichnet.





Die Übereinstimmung ist selbst in dieser noch relativ groben Näherung schon erstaunlich. Wie gut sie ist, sieht man besser, wenn man sich die Funktionswerte von $f_2(x)$ in **Lists & Spreadsheet** ansieht:

		B yk	C tk	D i0	E
◆		=f1(xk)		=cumulati	=f2(xk)
4	1.2	3.648	1.536	3.52	3.6864
5	1.6	2.176	1.1648	4.6848	4.88107
6	2.	0.	0.4352	5.12	5.33333
7	2.4	−2.496	−0.4992	4.6208	4.8384
8	2.8	−4.928	−1.4848	3.136	3.34507
9	3.2	−6.912	−2.368	0.768	0.955733

E6 =5.333333333334

Um die Näherung zu verbessern, müssen die Schülerinnen und Schüler den Abstand zwischen den Stützstellen verkleinern, wodurch ein intuitiver Grenzübergang vorbereitet wird.

Zusammenfassung

Kern des beschriebenen Zugangs ist, dass man eine Wertetabelle der Integralfunktion aufstellt. Dazu wird ein numerisches Verfahren genutzt, was im Zusammenhang mit Anwendungen, in denen Messwerte vorliegen, entwickelt wird.

Die Wertetabelle wird als Streuplot zusammen mit dem Graphen der Randfunktion visualisiert, anschließend werden Zusammenhänge hergestellt.

Hinweis: Die Lehrkräfte müssen darauf achten, dass die Schülerinnen und Schüler nicht nur die charakteristischen Punkte betrachten, sondern auch Monotonie- und Vorzeichenüberlegungen einbeziehen.

Um die Vermutung an weiteren Beispielen zu testen, reicht es, die Randfunktion $f_1(x)$ auszutauschen und Tabelle und Graph noch einmal zu aktualisieren. Die Schülerinnen und Schüler können damit das Beobachtete verallgemeinern und sich immer wieder über den Zusammenhang vergewissern.

In den Kontexten, in denen aus der Änderungsrate der Bestand rekonstruiert wurde, erscheint die Tatsache, dass die Änderungsrate des Bestandes die ursprünglich gegebene Änderungsrate ist, nicht wirklich überraschend. Hier wird aber sichergestellt, dass dieser Zusammenhang auch für alle Formen von Kumulation gilt, insbesondere auch in der Deutung des kumulierten (orientierten) Flächeninhalts.

Das beschriebene Vorgehen führt direkt von den anschaulichen Anwendungsbeispielen zum Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Schülerinnen und Schüler, die in der Differenzialrechnung mit Änderungsraten gearbeitet haben, können ihre Kenntnisse reaktivieren und nutzen, um die Zusammenhänge von Änderungsrate und Bestand anhand der Graphen und der Tabelle zu erläutern – eine gute Übung im mathematischen Argumentieren! Die Vernetzung mit der Differenzialrechnung dürfte in beiden Bereichen zu einem weiter vertieften Verständnis der Begriffe führen.

Zu den Standardaufgaben in der Differenzialrechnung gehört es, Graphen von Ableitungsfunktionen zu skizzieren und auch umgekehrt zum Graphen einer Ableitungsfunktion den Funktionsgraphen zuzuordnen oder zu rekonstruieren. Wenn mit den Funktionstermen entsprechend verfahren wird, kennen die Lernenden bereits vor der Einführung in die Integralrechnung den Begriff Stammfunktion (als „Aufleitung“) und können die Beobachtung auch so formulieren:

Vermutung: Die Integralfunktion I_0 ist eine Stammfunktion der Randfunktion f.

Es soll hier aber noch einmal betont werden, dass man durch dieses Verfahren auch dann Graphen von Integralfunktionen erhält, wenn (noch) gar kein Term für die Stammfunktion bekannt ist. „Integrierbar sein“ heißt also nicht dasselbe wie „eine Stammfunktion haben“. Dies ist ein wichtiger Punkt, der im Unterricht bei einem kalkülorientierten Ansatz häufig nicht so klar herausgearbeitet wird.

Wenn aber eine Stammfunktion F der Randfunktion f bekannt ist, lassen sich die Integralfunktionen einfach ermitteln durch

$$\mathbf{I_a(x) = F(x) - F(a),\ x \in [a;b].}$$

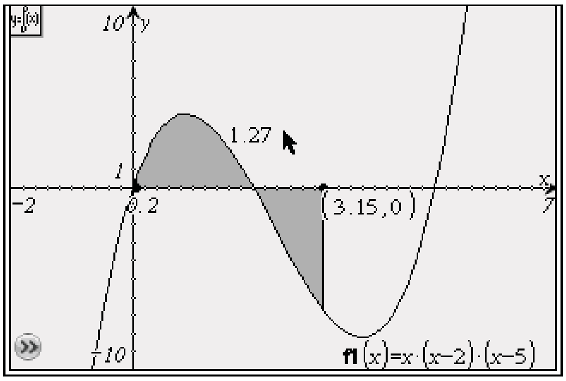
Alternative Lösungswege

Um die Wertetabelle der Integralfunktion aufzustellen, kann man alternativ zu der numerischen Berechnung der Teilflächen und anschließender Summation in **Lists & Spreadsheet** auch die Möglichkeiten nutzen, die Rechner darüber hinaus bieten.

Direkter numerischer Zugang

Man kann ganz schlicht **Notes** oder den **Calculator** nutzen, um zu einer gegebenen Randfunktion schnell mehrere Integrale mit gleicher unterer, aber unterschiedlichen oberen Grenzen zu berechnen, die oberen Grenzen und Ergebnisse in zwei Listen schreiben bzw. in eine Tabellenkalkulation eintragen und davon einen Streuplot der Integralfunktion erzeugen.

Geometrisches Integrieren



In **Graphs** kann man die Fläche unter einem krummlinig begrenzten Graphen vom Rechner „messen“ (bzw. berechnen) lassen. Durch Variation der oberen Grenze kann man ebenfalls eine Wertetabelle erstellen. Auf TI-Nspire™ kann man sich das Eintippen der Werte sparen, wenn man *Data Capture* verwendet.

In dem Artikel „Von Flächen und Füllhöhen“ von Hubert Langlotz wird dieses Verfahren genutzt.

Bei dem geometrischen Weg kann man noch eleganter zu dem Graphen der Integralfunktion A gelangen, wenn man sich das Erstellen der Wertetabelle einspart und den Punkt (x|A(x)) mit einer geometrischen Konstruktion gewinnt. Wie man dabei mit Hilfe von *Maßübertragung und Geometriespur* vorgeht, zeigen Karl-Heinz Keunecke und Angelika Reiß in ihrem Artikel „Stammfunktionen zu 1/x“. Sie bieten dort auch eine genaue Anleitung zur Gewinnung einer Integralfunktion zur Randfunktion $f(x) = x^2$ zum Download an.

Und weiter?

Geschafft! Der Hauptsatz ist erarbeitet. Nun lassen sich eine ganze Reihe von Anwendungsproblemen mit diesem Kalkül lösen. Die Schülerinnen und Schüler denken deshalb häufig, dass sie damit ein universelles Rezept gefunden haben. Daher sollten ihnen im folgenden Unterricht immer wieder einmal Aufgaben gestellt werden, wo genau dieses Rezept nicht funktioniert und sie wieder (zunächst einmal) numerisch oder graphisch integrieren müssen.

Ein Beispiel für diesen Fall kann das Auffinden der Stammfunktion zu $f(x) = 1/x$ sein. Hier kann man wieder numerisch vorgehen oder den geometrischen Weg wählen, den Keunecke/ Reiß in ihrem Artikel beschreiben.

Betont man den Aspekt „**Integrale zum Messen**“, so liegen den Schülerinnen und Schülern auch bei der Berechnung einer Bogenlänge oder eines Rotationsvolumens zunächst noch keine Formeln vor. Hier kann man im Unterricht systematisch die Problemlösestrategie „Zurückführen auf Bekanntes“ betonen: Die Bestimmung des Inhalts einer krummlinig begrenzten Fläche wird zurückgeführt auf die näherungsweise Berechnung von Rechteckflächen, die Ermittlung eines Rotationsvolumens wird zurückgeführt auf die Berechnung von Zylindervolumina und die Berechnung einer Bogenlänge wird zurückgeführt auf den Abstand zwischen zwei Punkten. Michael Schwarz und Franz Schlöglhofer stellen in ihren Artikeln „*Die Chipstüte*“ und „*Die Bogenlänge eines Funktionsgraphen*“ dar, wie man dabei im Einzelnen vorgeht.

Eine weitere Anwendung der Integralrechnung ist die **Bestimmung von Mittelwerten**, wodurch sich noch einmal eine horizontale Vernetzung zur Stochastik ergibt.
Ausgehend von der Definition des arithmetischen Mittels

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

wird diese Gleichung umgeformt zu

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n} \approx \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Geometrisch bedeutet dies, die Fläche unter einer krummlinig begrenzten Kurve in ein flächengleiches Rechteck zu verwandeln.

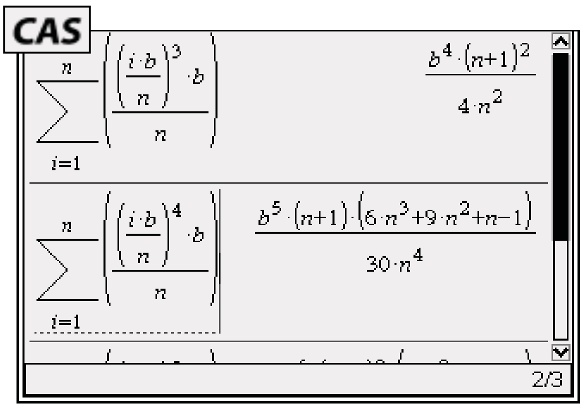
Andreas Pallack geht auf den Aspekt des Mittelns mit einem Integral in seinem Artikel „Berechnung der mittleren Sonnenscheindauer“ ein.

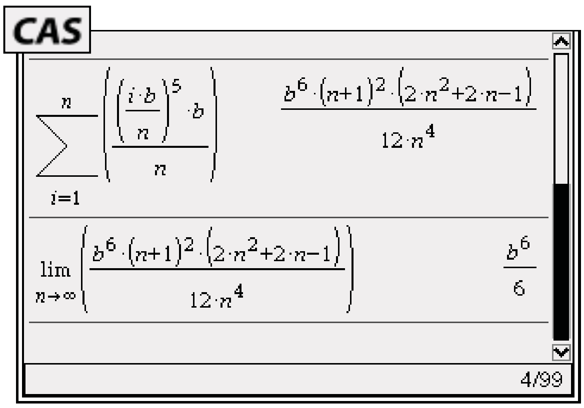
Die Rolle des Rechners in der Integralrechnung

Der Rechner hilft hier beim Aufbau von Grundvorstellungen, einerseits durch dynamische Visualisierungen, andererseits durch heuristisch-experimentelles Arbeiten beim Problemlösen. Rückblickend kann man feststellen, dass der Rechner ermöglicht, relativ elementar aus den Änderungsraten die Bestandsfunktion graphisch zu rekonstruieren. Dazu braucht man nur die Tabellenkalkulation und/oder man nutzt die Grafikmöglichkeiten des Rechners. Die Zusammenhänge, die in dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ausgedrückt werden, lassen sich über die Graphen gut visualisieren.

Anwendungsprobleme lassen sich mit einem numerischen Verfahren näherungsweise hinreichend gut bearbeiten. Der Rechner kann aber auch genutzt werden, um Stammfunktionen zu komplexeren Termen zu bestimmen (im Sinne einer Black Box).

Und man kann mit Schülerinnen und Schülern, die bereits einen verständnisorientierten Integralbegriff aufgebaut haben, den klassischen formalen Zugang rechnerunterstützt nachvollziehen. Der Rechner entlastet dabei von algebraischen Umformungen und liefert die Summenformeln sowie die Grenzwerte. Für die Potenzfunktionen $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$ und $f(x) = x^5$ wird das hier exemplarisch gezeigt:

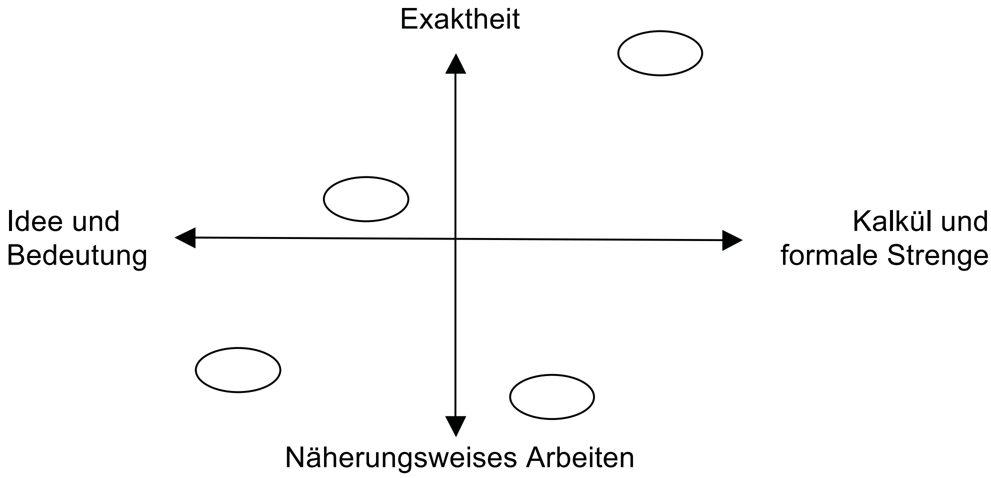




So wird das ganze Spannungsfeld zwischen anschaulichem, anwendungsbezogenem Arbeiten und symbolisch formalem Denken abgesteckt. Für die Beantwortung einer Frage auf der Anwendungsebene wird eine näherungsweise Berechnung in der Regel ausreichend sein, so dass man dort dann auch mit Graphen und Tabellen auskommt. Ein vertieftes Begriffsverständnis ist aber erst zu erlangen, wenn auch die Betrachtung von Grenzwerten hinzukommt. Nur so erkennt man tiefere Zusammenhänge und gewinnt letztlich einen leistungsfähigen Kalkül. Aber: dieser Kalkül sollte im Unterricht nicht ohne anschauliche Grundvorstellungen aufgebaut werden.

Die folgende „Navigationskarte“ soll eine Anregung sein, während der Unterrichtsreihe zur Integralrechnung immer mal wieder darüber nachzudenken, an welcher Position zwischen diesen gegensätzlichen Polen man sich gerade befindet und was man als nächstes ansteuern möchte.

Navigationskarte



Literatur

Danckwerts, Rainer und Vogel, Dankwart (2006) Analysis verständlich unterrichten, Spektrum Verlag, München.

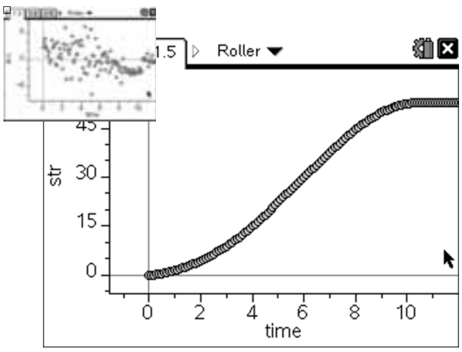
MSW NRW (2007) Impulse für den Mathematikunterricht der Oberstufe, Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.), Klett-Verlag, Stuttgart.

Schmidt, Ursula (2007) Kumulation statt Flächeninhalt – Integralrechnung mit Werkzeugen und in Gruppenarbeit, in: ISTRON: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Bd. 11 (Hrsg. Greefrath, G./ Maaß, J.), S. 168 ff., Franzbecker-Verlag, Hildesheim.

Trägheitsnavigation

Wolfgang Beer, Rutheneum seit 1608, Gera

Kann man die zurückgelegte Strecke ohne Maßband bestimmen?



Steckbrief der Aufgabe

Sekundarstufe II (Analysis oder Mechanik)

Dauer: 2 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler
- verfügen über einen Beschleunigungssensor und zugehörige Bedienkenntnisse
- können die Grundgesetze der geradlinigen Bewegung anwenden
- können die Begriffe „Ableitung“ und „Integral“ im Sachzusammenhang anwenden

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- analysieren Bewegungsvorgänge
- vertiefen ihre Fähigkeiten im Umgang mit elektronischen Rechen- und Messmitteln

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler
- wenden die Integralrechnung an einem praktischen Beispiel an
- erarbeiten sich die Bedeutung des Begriffs „Trägheitsnavigation“

Rolle der Technologie (TI-Nspire™ mit Touchpad, TI – Nspire™ CAS mit Touchpad)
- Messen
- Visualisieren
- Rechnen mit einer Tabellenkalkulation (**Lists & Spreadsheet**)

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Graphisch: Interpretation der vom Datenerfassungssystem eingelesenen Diagramme, Anpassung der Diagramme durch Intervall-Auswahl
- Numerisch: Datenerfassung/Messwerterfassung, Erstellung von Zahlenlisten und Messwerttabellen, Berechnen von Flächensummen aus großen Datenmengen
- Physikalisch: Verwenden der Technologie zum Messen physikalischer Größen

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
- Partnerarbeit (mit Unterstützung durch die Lehrkraft)
- „Arbeit am anderen Ort“ – Unterricht im Freien
- Präsentation mit Plakaten
- Aufnahme von analogen Messreihen mit dem Fahrrad oder einem Fahrstuhl

Trägheitsnavigation

Eine der größten Herausforderungen beim Führen eines U-Bootes ist die Orientierung im Meer. Es gibt keine Fenster, durch welche man sich an Fixpunkten orientieren könnte und klassische GPS-Geräte versagen ebenfalls ihren Dienst. Es ist aber möglich, durch die permanente Analyse der auf das Boot einwirkenden Kräfte (und damit der Beschleunigungen) auf Richtungsänderungen und Geschwindigkeiten zu schließen. Die Genauigkeit der Bewegungsanalyse hängt dabei stark von der Abtastrate der Beschleunigungssensoren, deren eigener Genauigkeit und Anzahl (3 Achsen) ab.

Prinzipiell stellt die U-Boot-Navigation bis heute hohe Ansprüche an die Messtechnik und kann keinesfalls allein auf Trägheitsnavigation basieren. Aktuell verwendet man Bojen, die ihre GPS-Positionen per Funk an die Boote senden. Daraus wird dann die genaue Position berechnet. Künftig werden U-Boote und Taucher wohl mit dem 2007 in den USA patentierten Unterwasser-GPS navigieren können.

Im Unterricht steht zwar kein U-Boot zur Verfügung, aber das Prinzip der Trägheitsnavigation können Sie auch mit einem anderen Fahrzeug untersuchen. Als Fahrzeug steht Ihnen hier ein Roller zur Verfügung und außerdem ein Sensor, mit dem Sie Beschleunigungen messen können.

Aufgabe
Bestimmen Sie aus der Messung der Beschleunigung die Strecke, die Sie mit dem Roller zurückgelegt haben.

Hinweise zur Versuchsdurchführung
Sie können diesen Versuch prinzipiell mit jedem aus der Ruhe heraus geradlinig beschleunigenden System durchführen. Jedoch muss – unter Beachtung der Rechenleistung und der Speicherkapazität der Technologie – die Länge der Teststrecke unter 100 m liegen (die Obergrenze für die Datenerfassung liegt bei insgesamt 2500 Wertepaaren).

Die in x-Richtung wirkende Beschleunigung im Ruhezustand muss vor Beginn der Messung unbedingt auf Null (zero) gesetzt werden und die Neigung des Sensors darf sich beim Fahren nicht verändern. Besonderen Wert sollten Sie auf die Befestigung legen: Fixieren Sie den Beschleunigungssensor LGA-BTA sorgfältig mit Gummi- oder Klettbändern horizontal am Roller. Störende Vibrationen lassen sich durch eine dünne Filzunterlage dämpfen.

Hinweise zur Auswertung
Der zurückgelegte Weg ergibt sich durch zweimalige Integration der Beschleunigungsdaten über die Zeit. Diese Integration kann vom TI-Nspire™ CAS nicht direkt ausgeführt werden. Erfassen Sie die Messdaten in **Lists & Spreadsheet**, um dort anschließend die weitere numerische Auswertung vornehmen zu können (durch zweifache numerische Integration). Stellen Sie anschließend das Geschwindigkeits – Zeit – Diagramm und das Weg – Zeit – Diagramm dar.

Erläuterung von Begriffen
In der Physik versteht man unter
– *Geschwindigkeit:* die erste Ableitung des Weges nach der Zeit
– *Beschleunigung:* die erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit bzw. die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit

 © T^3 2011

Wer sich mit den verfügbaren Sensoren bereits auskennt, wird geneigt sein, den Motion-Detector (Go!Motion, TI-CBR2) anzuwenden. Dies ist die einfachste Variante, bei der sich – eine sehr kurze Teststrecke von bis zu 8 m vorausgesetzt – ein sauberes Weg-Zeit-Diagramm ergeben kann. Die geräteinterne Software erzeugt durch Differenzieren die Listen der Momentangeschwindigkeit und Momentanbeschleunigung.

Bei der Trägheitsnavigation geht es aber um die Umkehrung: gemessen wird nicht die Distanz, sondern die Momentanbeschleunigung. Zur Auswertung müssen die Messdaten über die Zeit integriert werden, um zunächst die Geschwindigkeit und anschließend die Strecke zu erhalten.

Falls die Schülerinnen und Schüler mit der Verwendung von Sensoren und EasyLink bereits vertraut sind, können sie probieren, die Versuchsplanung selbst zu entwickeln.
Beim TI-Nspire sind für diesen Versuch keine Programmierkenntnisse notwendig. Durch die Verwendung der Tabellenkalkulation gelangen die Schülerinnen und Schüler zu den gesuchten Daten für die Diagramme.

Geräte

1. CAS – Rechner

Für den Versuch ist der TI-Nspire™ CAS optimal geeignet, weil ein fachübergreifendes Arbeiten in Physik und Mathematik möglich ist. Die Datenerfassungs-Software ist bereits vorinstalliert.

2. Sensor und Erfassungssystem

Beschleunigungssensor LGA-BTA

Vernier EasyLink™

Reihenfolge beim Versuchsaufbau:

- neues Dokument auf dem TI-Nspire™CAS erzeugen
- Vernier EasyLink™ via USB verbinden
- Vernier LGA-BTA an das EasyLink™ anstecken

3. Fahrzeug

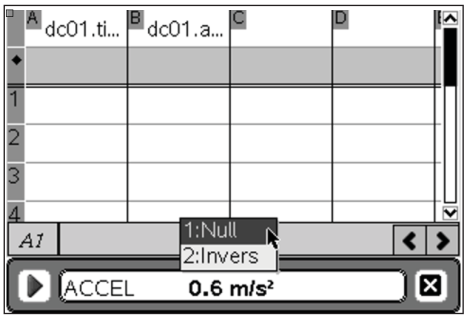
An Stelle des Rollers kann natürlich auch ein Fahrrad, ein Moped oder ein Auto verwendet werden. Mit dem Roller lässt sich der Versuch in einem großen Unterrichtsraum oder einem langen Gang des Schulhauses durchführen, was die Organisation erleichtert.
Bedingt durch die eher „untypische“ Art der Weg-Zeit-Analyse über die Messung der Beschleunigung und zur Minimierung des mathematischen Aufwandes sollte die Bewegung möglichst perfekt linear erfolgen und die Fahrbahn eben sein.

Von *Mirco Tewes (Berlin)* wurde eine Kurzanleitung veröffentlicht, in der eine solche Datenerfassung in einem Fahrstuhl gezeigt wird:
http://wiki.zum.de/GTR_und_TC_mit_CAS_in_Physik/Aufgaben/Fahrstuhl

Der kleine Beschleunigungssensor (27 x 45 x 20mm) ist mit einem sehr flexiblen Anschlusskabel (2,40m) versehen. Er sollte auf der Lenkerachse oder unter dem Trittbrett des Rollers mit Gummibändern oder Klettband befestigt werden. Dabei ist der direkte Kontakt zu vermeiden, es wird eine dünne Filzunterlage, wie sie z. B. für Stuhlbeine verwendet wird, empfohlen. Das bringt die notwendige Stabilität, hinterlässt an den Geräten keine unschönen Spuren und dämpft Quer- und Vertikalbeschleunigungen. Außerdem kann man auf diese Weise den Sensor für die Verwendung justieren.

Befestigen Sie den Sensor so, dass die positive x-Achse möglichst **exakt in Fahrtrichtung** zeigt und die **Auflageebene des Sensors parallel zur Fahrbahn** ist. Der Aufdruck auf dem Sensorgehäuse ist dabei selbsterklärend.

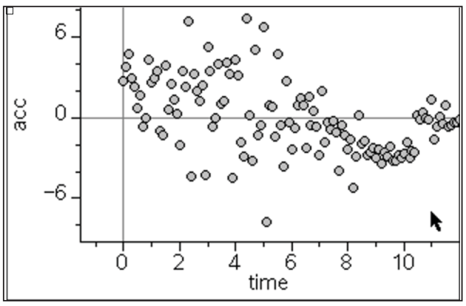
Nun ist es an der Zeit, eine Probefahrt durchzuführen. Wählen Sie eine hinreichend freie Strecke, auf der Sie aus der Ruhe heraus in mehreren Schüben beschleunigen und anschließend bis auf Null wieder abbremsen können. Messen Sie mit einer Stoppuhr oder durch Zählen die dafür erforderliche Zeit. Je nach freier Wegstrecke ergeben sich 5 bis 10 Sekunden. Stellen Sie eine Möglichkeit her, während der Rollerfahrt sowohl das EasyLink als auch den Rechner gefahrlos mitzunehmen. Achten Sie auch auf das Anschlusskabel.



Zuerst wird ein neues Dokument geöffnet, danach das Easylink angeschlossen. Die Abfrage nach der Verwendung des Sensors ist mit **Lists & Spreadsheet** zu beantworten. Im Anschluss daran wird der perfekte Sitz des Sensors kontrolliert und das Fahrzeug in Startposition gebracht. Im nächsten Schritt erfolgt das Nullsetzen. Wenn das Sensor-Fenster aktiv ist, kann man mit den Sensoreinstellungen den Startwert der Beschleunigung auf Null setzen. Klicken Sie dazu am TI-Nspire™CAS Touchpad auf den aktuellen Messwert. Das Nullsetzen erklärt sich hier von selbst.

Im nächsten Schritt werden im Menü der Datenerfassung bei [1: Experiment] die Abtastrate und die Dauer der Erfassung eingestellt. Als Abtastrate haben sich im vorliegenden Fall dt = 0,1 s oder dt = 0,2 s bewährt.

Durchführung des Versuchs
Stellen Sie oder Ihr Assistent sich in Startposition.
Alle Geräte fest? Erfassungsfenster im Display aktiv (dicker Rahmen)?



Starten Sie die Messung von Hand. Fahren Sie sofort los und versuchen Sie erst kurz vor Beenden der Messung den Stillstand zu erreichen. Am Ende werden die Tabellenspalten A [dc01.time] und B [dc01.accel1] mit Daten gefüllt sein. Haben Sie einen Fehler bemerkt oder wollen aus einem anderen Grund die Messung wiederholen, so drücken Sie einfach erneut die Enter-Taste oder klicken das Touchpad an und beantworten die Nachfrage zum Umgang mit den alten Daten mit [Verwerfen]. Stellen Sie die Messwerte in der Applikation **Data & Statistics** dar (Listen graphisch darstellen).

Versuchsauswertung
Wegen v = ds/dt und a = dv/dt=d²s/dt² erhält man aus den Messwerten der Beschleunigung a_x durch einmalige Integration die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von t und durch zweimalige Integration den Weg s in Abhängigkeit von t. Leider haben wir aber keinen Term für die Beschleunigungsfunktion, sondern nichts anderes als eine gigantische Wertetabelle.

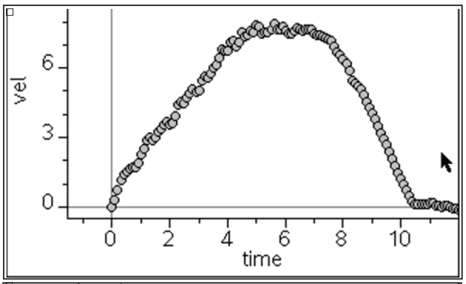
Messwerte über Lists & Spreadsheets verarbeiten
Das Ermitteln des Integrals ist in unserem Fall nichts anderes als die graphische Darstellung der Beträge von Flächeninhalten schmaler Rechtecke und deren Summierung. Dafür eignet sich **Lists & Spreadsheet**:

- Unsere Zeitintervalle zwischen zwei Messungen haben die gleiche Länge, z. B. dt=0,1 s.
- Wir bilden die mittlere Beschleunigung aus dem linksseitigen und rechtsseitigen Messwert am Intervall. Um die Geschwindigkeit in dem Intervall zu nähern, multiplizieren wir die mittlere Beschleunigung mit dem Zeitintervall 0,1. Der Zelle c1 wird der Wert 0 zugeordnet – die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t=0. Der Inhalt von Zelle c2 ist eine Formel (siehe Abbildung rechts). Diese lässt sich interpretieren als Berechnung des Flächeninhalts eines Rechtecks (bzw. Trapezes).

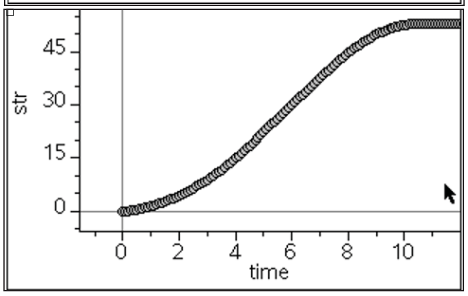
	A time	B acc	C vel	D str
◆				
1	0.	2.75466	0	0
2	0.1	3.81822	0.328[illegible]44	0.016432
3	0.2	4.72754	0.755932	0.070661
4	0.3	2.94343	1.13948	0.165432

C2 $=c1+\frac{b1+b2}{2}\cdot 0.1$

- So verfahren wir mit jedem Teilintervall, wobei das vorherige Ergebnis immer mit addiert wird.
  Tragen Sie demnach in Zelle c2 die Formel =c1+(b1+b2)/2·0.1 ein. Damit gehört zu jedem Intervall ein bestimmter Flächeninhalt.
- Kopieren Sie die Formeln nach unten. Der Spalte c geben Sie z. B. den Namen „vel(ocity)“.
- Fügen Sie eine neue Seite mit der Applikation **Data & Statistic** in das Dokument ein. 1. Achse: time; 2. Achse: velocity. Das ursprüngliche scheinbare Chaos der Datenpunkte verändert sich – eine Ordnung wird sichtbar: Nach etwa 10 s wurde der Stillstand wieder erreicht. Wenn sich deutliche Unstimmigkeiten zeigen – z. B. negative Geschwindigkeiten am Ende trotz eindeutigem Stillstand –, muss der Sensor neu justiert werden.



- Analog zum Berechnen der Geschwindigkeiten tragen Sie nun in Spalte d die gefahrene Strecke in Abhängigkeit von der Zeit ein. Der Startort ist Null, weswegen in Zelle d1 eine 0 eingetragen wird. In Zelle d2 tragen Sie die Formel =d1+(c1+c2)/2·0.1 ein und kopieren sie nach unten. Spalte d wurde hier der Name „(str)ecke“ zugeordnet. Nach dem Einfügen einer (weiteren) neuen Seite mit der Applikation **Data & Statistic** wird die Strecke in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit angetragen.



Versuchsabschluss
Gerade die Weg-Zeit-Kurve sagt viel über die Qualität der aufgezeichneten Daten aus. Wahrscheinlich werden die Schüler mehrere Durchläufe des Versuchs machen müssen, bevor die Grafik auch zu Versuchsschluss einen echten Stillstand zeigt. Achten Sie darauf, bei neuen Messwerten ggf. das Koordinatensystem anzupassen.

Ergebnis
Im hier beschriebenen Fall wurde ein Luftroller von einem Jugendlichen gefahren.
Maximalgeschwindigkeit: 7,5 m/s = 27 km/h (aus dem v-t-Diagramm)

Gesamtstrecke: **53 m** (aus dem s-t-Diagramm)

Physikalische Experimente dieser Art dienen der Festigung des Wissens und der Anwendung erlernter Verfahren. Wenn Schülerinnen und Schüler in ihrer eigenen Erfahrungswelt experimentieren und ohne allzu strenge Vorgaben ihre Ideen umsetzen können, wird sich ein bedeutend höherer Lerneffekt einstellen als bei der Vorführung eines Lehrerversuchs.

Die TI-Nspire™-Technologie hilft – technisches Equipment in ausreichendem Maße vorausgesetzt – , den Schülerinnen und Schülern ihr eigenes Lernen im Fach Mathematik und in den naturwissenschaftlichen Fächern individuell zu gestalten.

Der Versuch stellt für die Integralrechnung den Aspekt „Rekonstruktion einer Größe“ aus ihrer Änderungsrate in den Fokus. Da die Lernenden hier möglichst selbstständig arbeiten sollen, ist es sinnvoll, wenn sie die mathematischen Grundlagen zur Auswertung schon vorher an einem einfacheren Beispiel erworben haben.

Im Unterricht sollte der Effekt des Glättens durch das Integrieren (also der Effekt, dass die Summe kleiner schwankender Werte eine Folge relativ gesehen weniger streuender Werte ergibt) thematisiert werden.

Der Versuch eignet sich für Einzel- oder Partnerarbeit. In jedem Fall sollte der Versuch von den Schülern sorgfältig dokumentiert werden.

Literatur/Quellenangaben

Fotos und Screenshots: Wolfgang Beer

Internetquellen (Stand 01.04.2011)

http://patft.uspto.gov/
http://www.pte.at/news/070316023/unterwasser-gps-soll-u-boot-navigation-revolutionieren/
http://wiki.zum.de/GTR_und_TC_mit_CAS_in_Physik/Aufgaben/Fahrstuhl

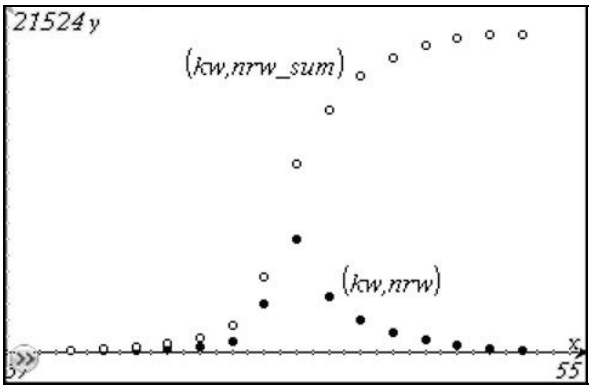
 © T³ 2011

Die Schweinegrippe – mathematisch gesehen

Robert Stark, Bünde
Tobias Kaatze, Lemgo

Bild: Claus Rebler

Wie kann man den Verlauf einer Pandemie modellieren?



Steckbrief der Aufgabe

Sekundarstufe II (Analysis, Stochastik)
Dauer: 2-3 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler
- beherrschen die Grundlagen der Integralrechnung sowie den Umgang mit Exponentialfunktionen
- kennen normalverteilte Zufallsvariablen

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- modellieren reale Daten
- übertragen mathematische Ergebnisse auf die Realität
- argumentieren und kommunizieren bei der Problemlösung

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler
- nutzen unterschiedliche Darstellungen der Daten (Tabelle, Graph)
- wenden zwei Wege zur graphischen Darstellung des Integrals an
- können ihre Ergebnisse vor realem Hintergrund diskutieren und bewerten

Rolle der Technologie (TI-Nspire™ mit Touchpad / TI-Nspire™ CAS mit Touchpad):
- Visualisieren von Daten
- Berechnen/Auswerten

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Graphisch: Visualisieren von Daten
- Numerisch: Näherungsweises Integrieren durch Aufsummieren
- Algebraisch: Berechnen von Integralen

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
- Kooperatives Lernen: Die Arbeitsschritte werden erst in Einzelarbeit durchgeführt, anschließend in Partnerarbeit oder in kleinen Gruppen verglichen und dann dem Klassenverband präsentiert.
- Komplexere Transferschritte – wie zum Beispiel das Herstellen von Zusammenhängen zwischen Aufgabenteilen – sollten im Klassenverband diskutiert werden.

Die Schweinegrippe in Nordrhein-Westfalen

Die Anfang des Jahres 2009 in Mexiko aufgetretene Influenza (Schweingrippe) ist nach kurzer Zeit auch in Deutschland ausgebrochen. Während der Sommerferien gab es einen starken Anstieg der Neuinfizierten, was die zuvor noch relativ unbekannte Krankheit in den Rang einer Pandemie erhob. Ein möglicher Grund für diesen plötzlichen Anstieg könnte das Reiseverhalten der Deutschen sein. Überfüllte Touristikzentren bieten der Krankheit einen optimalen Lebensraum, um sich auszubreiten. Mit steigendem Bekanntheitsgrad der Krankheit wuchs auch die Vorsicht der Deutschen und die Zahl der Neuinfizierten wurde wieder rückläufig.

Nach Angaben der WHO war der Höhepunkt der Pandemie auf der Nordhalbkugel im Dezember 2009 bzw. Januar 2010 überschritten. Am 10. August 2010 erklärt die WHO die Pandemie für beendet. Mittlerweile (Stand Mitte 2011) gibt es in Deutschland erneut Infizierte und auch Tote.

1. Stellen Sie für den Zeitraum der Pandemie in einer groben Skizze auf Papier – ohne Rückgriff auf Zahlen – den Verlauf für die Anzahl der
   - wöchentlich neu Infizierten und
   - der insgesamt Infizierten

   in Abhängigkeit von der Zeit dar.

Im Folgenden sollen die Daten der Pandemie mathematisch untersucht werden. Die unten abgebildete Tabelle zeigt die Anzahl der Neuinfizierten im Jahr 2009 im Bundesland NRW pro Kalenderwoche.

Kalenderwoche	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
Neuinfizierte	85	120	148	192	385	698	2996	6922	3405	1997	1197	762	399	83	85

2. Stellen Sie auf Ihrem Rechner die Zahlen der Neuinfizierten und die der Gesamtinfizierten für NRW in Abhängigkeit von der Zeit graphisch dar. Beschreiben Sie die Entwicklungen mit eigenen Worten. Entspricht der Verlauf ungefähr dem Ihrer Skizze?

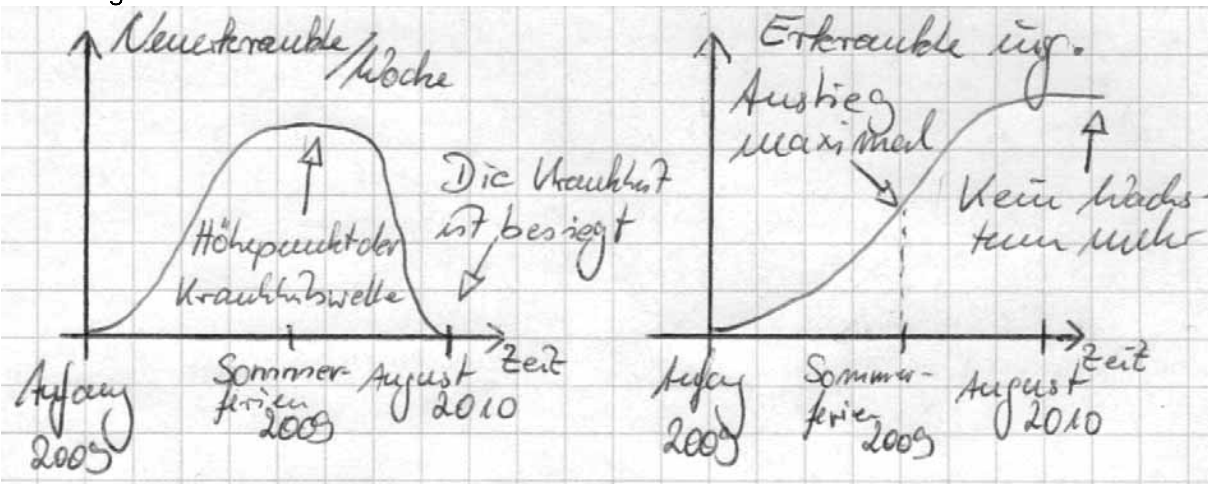
3. Modellieren Sie den Verlauf der Daten mit Hilfe einer Glockenkurve und beurteilen Sie die Passung Ihres Modells. Wenn Sie diesen Funktionstyp noch nicht kennen, bearbeiten Sie statt dieser Aufgabe die Zusatzaufgabe unten – hier wird der Umgang mit diesem Funktionstyp erläutert.

Zusatzaufgabe
Wir betrachten nun die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$, die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung.

a) Summieren Sie die Funktionswerte für x = -4, -3, ... , 3, 4 sukzessive auf.
b) Bestimmen Sie das Integral von -∞ bis zu einer Zahl z = -4, -3, ..., 3, 4.
c) Bestimmen Sie das Integral von -∞ bis zu einer Zahl z = -3.5, -2.5, ..., 2.5, 4.5.
d) Vergleichen Sie die ermittelten Zahlenwerte (aus den Teilaufgaben a)-c)) miteinander. Was fällt auf? Erklären Sie Ihre Beobachtung mit Hilfe einer Skizze.
e) Modellieren Sie den Verlauf der Daten mit Hilfe einer Glockenkurve und beurteilen Sie die Qualität Ihres Modells.

 © T^3 2011

Aufgabe 1
Eine mögliche Skizze könnte so aussehen:



Charakteristisch sind das Maximum bei der Anzahl der Neuerkrankungen und die Wachstumsobergrenze bei der Gesamtzahl der Erkrankten. Zusatzinformationen (wie Zeitangaben) können – müssen aber nicht mit verarbeitet werden.

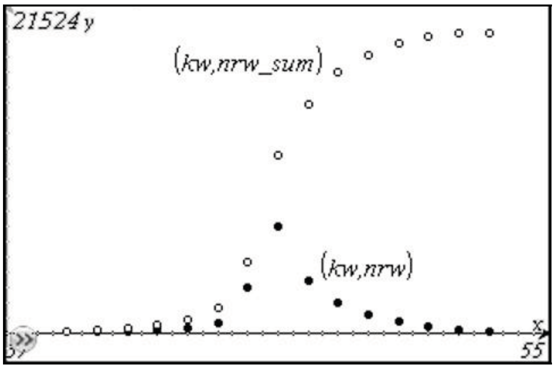
Aufgabe 2
Die Daten werden in der Applikation **Lists & Spreadsheet** eingegeben. Die Spaltennamen der nebenstehenden Abbildung bedeuten:
kw: Kalenderwoche, nrw: Anzahl der Neuinfizierten pro Woche in NRW, nrw_sum: Gesamtzahl der Infizierten in einer bestimmten Kalenderwoche.

	A kw	B nrw	C nrw_sum	D
◆			=cumulative	
1	39	85	85	
2	40	120	205	
3	41	148	353	
4	42	192	545	
5	43	385	930	

C **nrw_sum**:=cumulativesum(**nrw**)

Die Zahl der Gesamtinfizierten in NRW erhält man mit dem *cumulativesum*-Befehl, womit die Werte sukzessiv aufsummiert werden (Listen, verarbeiten). Insgesamt erkrankten in den betrachteten Wochen 19.543 Menschen.

Auf einer neuen Seite starten Sie die Applikation **Graphs.** Hier können die Daten der Spalten als Streudiagramm dargestellt werden (Graph, zoomen, um das Fenster einzustellen).

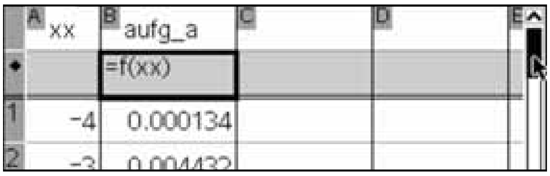


Die Schülerinnen und Schüler wurden vorab aufgefordert, den Verlauf qualitativ zu skizzieren (siehe oben). Nun kann diskutiert werden, ob die Zeichnung anhand der Daten ihren ursprünglichen Vorstellungen entspricht. Nimmt die Anzahl der Neuinfizierten pro Woche ab, so muss auch der Graph der die Zahl der Gesamtinfizierten darstellt weniger stark steigen, aber er steigt nach wie vor an. Gegen Ende der Pandemie geht die Anzahl der Neuinfizierten gegen 0, die Anzahl der insgesamt Infizierten gegen eine feste Zahl.

Zusatzaufgabe (die Lösung zu Aufgabe 3 ist identisch mit Teil e) dieser Aufgabe)
a) Öffnen Sie die Applikation **Calculator** auf einer neuen Seite. Hier definieren Sie die Funktion f(x) wie vorgegeben.

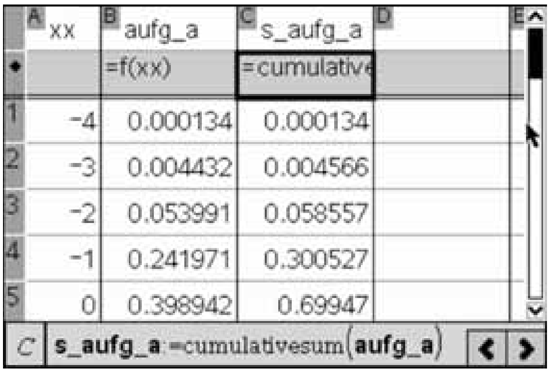
$f(x):=(2\cdot\pi)^{-0.5}\cdot e^{-0.5\cdot x^2}$ *Fertig*

Öffnen Sie eine neue Applikation **Lists & Spreadsheet** im gleichen Dokument. Geben Sie in der ersten Spalte die Zahlen von -4 bis 4 ein (siehe auch Listen, erzeugen).

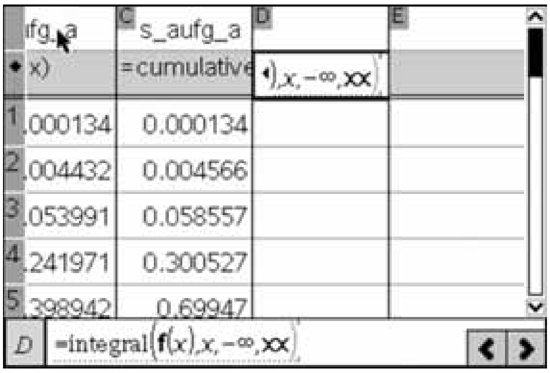


Zur besseren Orientierung wurden die Variablen in den folgenden Spalten nach den Aufgaben benannt. In Spalte B wurden mit Hilfe einer Spaltenformel die zu xx gehörenden Funktionswerte berechnet.

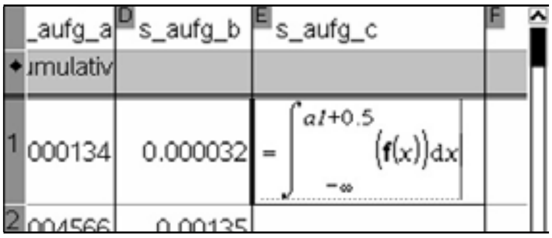
Als nächstes werden die einzelnen Funktionswerte mit dem *cumulativesum*-Befehl sukzessiv aufsummiert (Listen, verarbeiten) und unter einer neuen Listenvariable (hier: s_aufg_a) gespeichert.



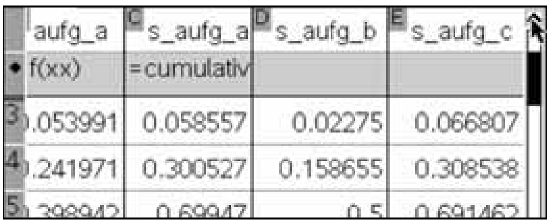
b) In der bereits vorhandenen Applikation **Lists & Spreadsheet** wird nun in einer neuen Spalte das Integral berechnet. Um das Integral nur einmal eingeben zu müssen, wird die obere Grenze mit den Werten in Spalte A (Variable xx) verknüpft. Die Spalte benennen wir anschließend mit s_aufg_b.



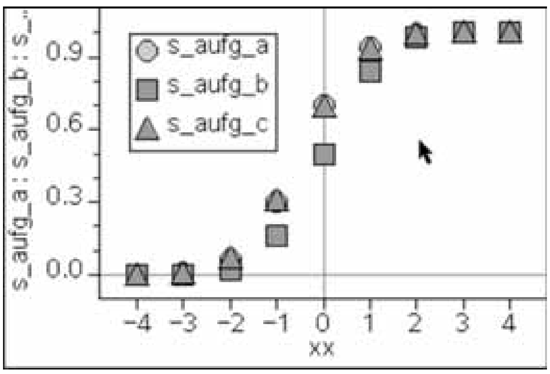
c) In einer weiteren Spalte kann das Integral bis -3.5, -2.5 ... berechnet werden, indem man die obere Grenze durch A1+0.5 ersetzt.



Insgesamt ergibt sich die folgende Tabelle:



d) Die aus den Aufgabenteilen a) und b) erhaltenen Daten können anschließend als Streudiagramm in **Data & Statistics** angezeigt werden. Die x-Koordinate ist jedes Mal die selbsterzeugte Folge xx, für die y-Koordinaten wählt man die Bezeichnungen der drei Spalten s_aufg_a, s_aufg_b und s_aufg_c.



Es zeigt sich, dass die Verwendung des Integrals ohne *Korrektur* (s_aufg_b) die sukzessive aufsummierten Funktionswerte faktisch schlecht annähert. Der zusätzlich eingefügte Korrektursummand 0.5 (s_aufg_c) erzeugt hingegen gut passende Werte.

Was hat nun die Summe über Funktionswerte mit dem Integral zu tun? Ohne eine sachliche Klärung macht die Verwendung des Integrals wenig Sinn, da die Zusammenhänge in den innermathematisch gestellten Aufgaben a)–c) auch Zufall sein könnten.

Zur Erklärung führe man sich vor Augen, dass man die Aufsummierung von Funktionswerten auch durch ein Integral über eine Treppenfunktion angeben kann:

$$\sum_{i=-\infty}^{n} f(i) = \int_{-\infty}^{n+1} t(x)\,dx\,.$$

Das Integral summiert dann Flächeninhalte von Rechtecken. Ein Funktionswert f(x) aus der Summe wird im Integral berücksichtigt durch ein Flächenstück der Breite 1 und der Höhe f(x). Graphisch lässt sich dies durch nebeneinander liegende Säulen darstellen. Die x-Achse wird dazu in Intervalle der Breite 1 zerlegt. Die Intervallgrenzen kann man unterschiedlich legen: z. B. könnte die linke Grenze jeweils mit dem x_ Wert der Funktion übereinstimmen:

$$t(x) = \begin{cases} \ldots \\ f(-2), x \in [-2,-1[\\ \ldots \end{cases}$$

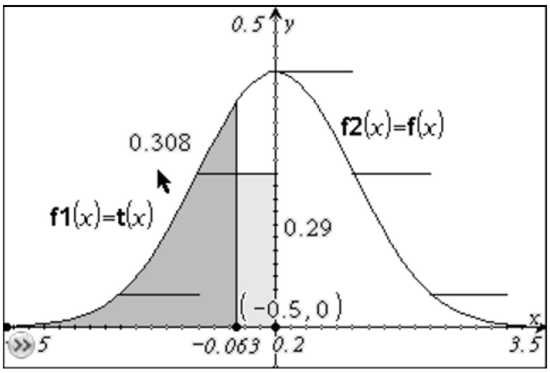
Man könnte aber auch z. B. das Intervall symmetrisch um den x-Wert der Funktion legen:

$$t(x) = \begin{cases} \ldots \\ f(-2), x \in [-2{,}5;-1{,}5[\\ \ldots \end{cases}$$

Das Integral summiert hier Flächeninhalte von Rechtecken. Um mit Hilfe eines Integrals einen Funktionswert f(x) zu erhalten, benötigt man ein Flächenstück der Breite 1 und der Höhe f(x). Da bei der betrachteten Funktion die Werte unter -3 faktisch 0 sind, konnten in den Berechnungen kleinere Funktionswerte vernachlässigt werden. Beim Integral können wir entsprechend vom uneigentlichen Integral ($\int_{-\infty}^{\ldots}$) ausgehen, das zur Berechnung der kumulierten Normalverteilung üblicherweise verwendet wird.

Bei der Approximation einer Treppenfunktion mit einer Normalverteilungsdichtefunktion sollte man beachten, dass nicht die Funktionswerte, sondern vielmehr die aufsummierte Fläche möglichst gut approximiert wird. Das erreichen wir hier durch das Verschieben der oberen Grenze um 0,5.

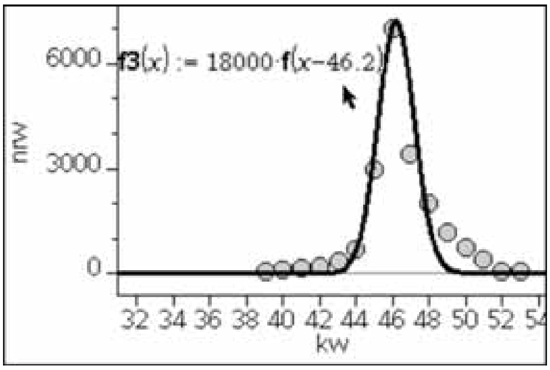
Die folgende Abbildung fasst das Gesagte anhand eines Beispiels zusammen:



Abgebildet sind die Graphen der Treppenfunktion t, wie obenstehend definiert – und von f. Dargestellt sind die Integrale $\int_{-\infty}^{-1} t(x)\,dx = \sum_{i=-\infty}^{-1} f(i) \approx 0.29$ und $\int_{-\infty}^{-1+0.5} f(x)\,dx \approx 0.31$. Man sieht, dass die Glockenkurve jeweils oberhalb der Treppenfunktion liegt. Entsprechend darf über f(x) nicht „ganz so weit" integriert werden.

Anhand dieser graphischen Darstellung kann man plausibel machen, dass die aufsummierten Funktionswerte der Glockenkurve und das abschnittsweise berechnete Integral (mit verschobener oberer Grenze) nahezu übereinstimmen.

Aufgabe 3 und Teil e)
Die Glockenkurve wurde hier von Hand angepasst, indem man die Daten in der Applikation **Data & Statistics** darstellt und einen weiteren Graphen ergänzt. Die Funktion f wurde durch Transformation und systematisches Probieren angepasst, bis Graph und Funktionswerte gut übereinstimmten.



Berechnet man nun das Integral (mit Korrektursummand – siehe Zusatzaufgabe), erhält man eine gute Anpassung an die gegeben Daten:

	nrw	C s_aufg_1	D s_aufg_e	E
◆		=cumulativ		
8	6992	11616	11122.4	
9	3405	15021	16257.6	
10	1997	17018	17807.	
11	1197	18215	17991.3	

D10 $= \int^{a10+0.5} (f3(x))\,dx$

Im Unterricht sollte man mit den Lernenden reflektieren, inwiefern die Auswahl der Glockenkurve zur Modellierung der Daten tatsächlich Sinn macht – der Rückbezug zu Aufgabe 1 sollte entsprechend erfolgen – hieraus ergibt sich dann auch die Betrachtung der summierten Werte (zur Abschätzung der Passung) und die Verbindung zum Integral.

 © T^3 2011

Ausgehend von einer intuitiven Annahme über den Verlauf einer Grippewelle wird ein mathematisches Modell (Normalverteilung) behandelt und innermathematisch untersucht. Die Lernenden erhalten so die Chance, ihren ersten Zugang in einer mathematischen Theorie wieder zu finden.

Wie beim Umgang mit Daten üblich, muss man im ersten Schritt ein Gefühl dafür entwickeln, wie man die Daten beschreiben könnte. Der eigentliche Wert der Modellbetrachtung liegt nun darin, dass man mit Hilfe nur weniger Modellparameter (mit zwei Parametern lässt sich die normierte Glockenkurve vollständig festlegen) die Entwicklung von Pandemien beschreiben kann. Das gilt allerdings nur für *typische Verläufe*. Das Wiederaufleben der Grippe zu Beginn des Jahres 2011 werden die gängigen Modelle kaum beschreiben können. Deswegen ist die Reflexion der Modellierung hier besonders wichtig.

Mit Hilfe der Normalverteilung werden in der Regel stochastische Verteilungen beschrieben. Im vorgestellten Fall geht es jedoch um den Verlauf einer Pandemie, was mit einer stochastischen Verteilung nichts zu tun hat. Im Unterricht gilt es deswegen Ähnlichkeiten wie auch zentrale Unterschiede herauszustellen.

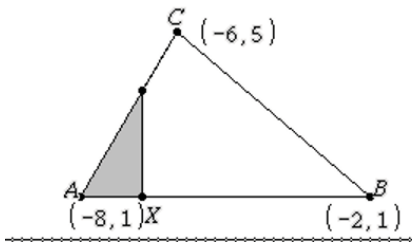
Literatur/Quellenangaben

Robert Koch Institut: http://influenza.rki.de

Von Flächen und Füllhöhen

Hubert Langlotz, Elisabeth-Gymnasium Eisenach

Wie hängt die Größe der gefärbten Fläche von X ab?



Steckbrief der Aufgabe

Sekundarstufe II (Integralrechnung)
Dauer: 2-3 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler können
- Flächeninhalte geradlinig begrenzter Figuren berechnen.

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- wenden ihre Kenntnisse zu Änderungsraten an
- erfassen funktionale Zusammenhänge und können diese verbal beschreiben
- argumentieren und begründen innerhalb des innermathematischen Kontextes

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler
- bestimmen kumulierte Größen

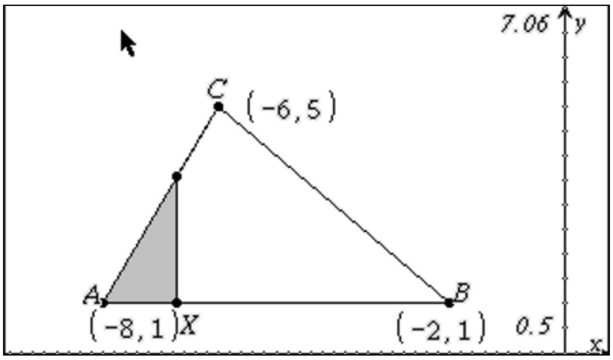
Rolle der Technologie (TI-Nspire™ mit Touchpad, TI-Nspire™ CAS mit Touchpad):
- Visualisieren
- Berechnen

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Berechnung der Flächeninhalte beliebiger Polygone
- grafische Darstellung der funktionalen Zusammenhänge

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
- es ist sowohl als Einzel- als auch als Gruppenarbeit denkbar
- binnendifferenzierendes Arbeiten bietet sich an, da die Aufgabe auf verschiedenen Niveaus gelöst werden kann.

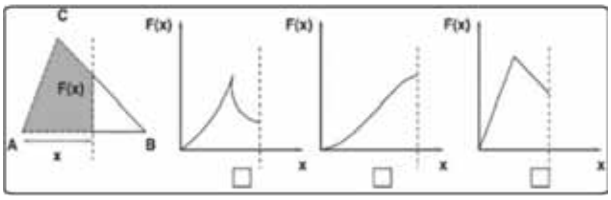
Dreiecksfläche

Die im Bild grau unterlegte Teilfläche des Dreiecks verändert ihre Größe, wenn der Punkt X auf der Grundseite des Dreiecks bewegt wird.



a) Beschreiben Sie in Worten, wie sich die Fläche verändert, wenn der Punkt X von A nach B verschoben wird.

b) Erläutern Sie, dass nur eine der rechts dargestellten drei Lösungsvarianten den Zusammenhang zwischen grau unterlegter Fläche und Position des Punktes X beschreiben kann.



c) Bestimmen Sie durch Berechnung mehrerer dieser grauen Teilflächen einen möglichen Zusammenhang zwischen Fläche und Lage des Punktes X.

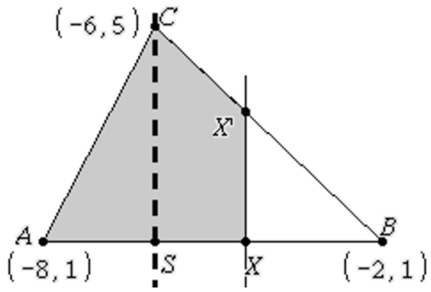
d) Überprüfen Sie den Zusammenhang aus c) mit Hilfe von TI-Nspire™.

In Anlehnung an:
Schlöglhofer, Franz (2000) Vom Foto-Graph zum Funktions-Graph, Mathematik lehren, Heft 103, Friedrich Verlag, Seelze. S. 16-17.

a) Bewegt sich der Punkt X von A in Richtung B, so nimmt zunächst die Änderungsrate der grau unterlegten Fläche zu, bis X senkrecht unter C liegt, dann nimmt die Änderungsrate wieder ab. Insgesamt erfolgt jedoch eine stetige Vergrößerung der grau unterlegten Fläche.

b) Das erste und das dritte Bild können den gegebenen Zusammenhang nicht beschreiben, da in beiden Darstellungen die Fläche nicht durchgängig zunimmt.

c) Man kann an diese Aufgabe elementargeometrisch herangehen, indem man z. B. das Fünfeck zerlegt in ein Dreieck und ein Trapez. Bis x = 2 (x ist die Strecke AS) besteht der gefärbte Anteil tatsächlich nur aus einem Dreieck (∆ASC für x = 2); ab x = 2 kommt noch eine Trapezfläche (SXX'C) hinzu. Die Trapezfläche lässt sich z. B. berechnen durch Betrachtung des Dreiecks ∆BX'X und ∆BCS, da die Differenz der Flächeninhalte dieser Dreiecke dem Flächeninhalt des Trapezes entspricht.

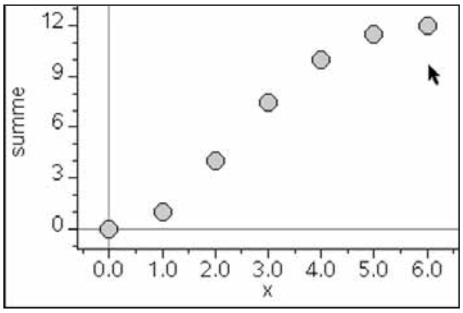


Die Flächen können Schülerinnen und Schüler für bestimmte x von Hand berechnen (z. B. für ganzzahlige). Die Ergebnisse kann man in einer Tabelle sammeln – hier wurde die Applikation **Lists & Spreadsheets** verwendet.

	A x	B dreieck	C trapez	D summe
◆				=dreieck+t
2	1	1	0	1
3	2	4	0	4
4	3	4	3.5	7.5
5	4	4	6	10
6	5	4	7.5	11.5

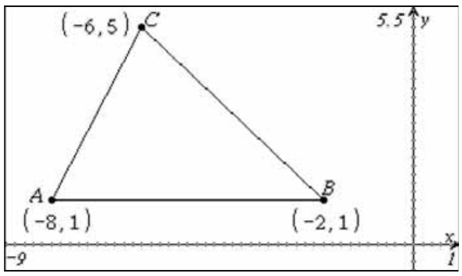
D summe:=dreieck+trapez

Zur Visualisierung des Kurvenverlaufs wurde die berechnete Fläche anschließend gegen x angetragen. Man erhält das nebenstehende Diagramm (Applikation **Data & Statistics**).

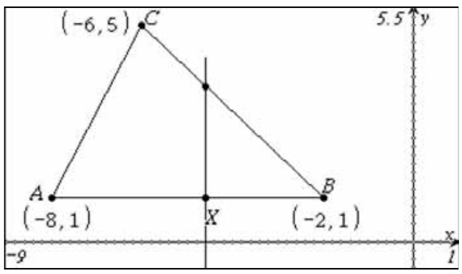


Von dieser Stelle aus kann man nun in zwei Richtungen weiterarbeiten: Entweder man geht argumentierend vor und schließt so auf Terme, die diese Kurve beschreiben – oder man verdichtet die Anzahl der Punkte. Der zweite Weg findet sich in der Lösung von Aufgabe d). Argumente, mit denen man auf die Funktionen schließen kann, finden Sie im didaktischen Kommentar.

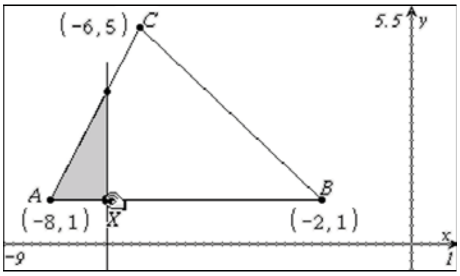
Teilaufgabe d)
Öffnen Sie die Applikation **Graphs**. Zeichnen Sie dazu ein Dreieck (Linien, besondere). Anschließend lassen Sie sich die Koordinaten der Punkte anzeigen. Die einzelnen Koordinaten können Sie so verändern, dass die Punkte genau die vorgegebenen Werte einnehmen. Passen Sie anschließend das Koordinatensystem an.



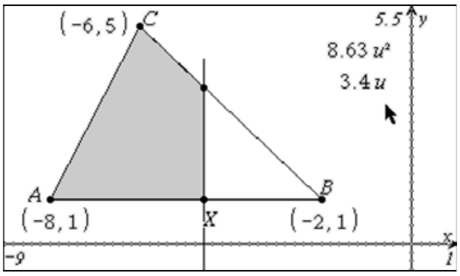
Konstruieren Sie wie dargestellt einen frei beweglichen Punkt auf der Grundseite und die Senkrechte (Linien, besondere) zur Grundseite durch diesen Punkt sowie den zugehörigen Schnittpunkt mit der gegenüberliegenden Dreiecksseite. Ziehen Sie den Punkt auf der Grundseite dann nach links über den Punkt C hinweg und bestimmen Sie nochmals den Schnittpunkt mit dem Dreieck.



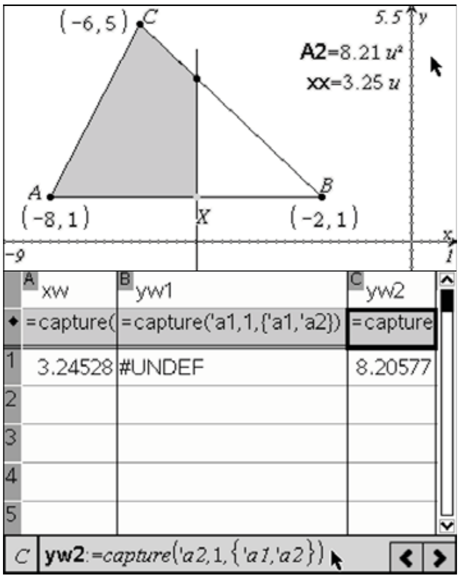
Erstellen Sie nun ein Dreieck (Linien, besondere), wie rechts im Bild gezeigt. Dieses können Sie über das Kontextmenü grau färben.



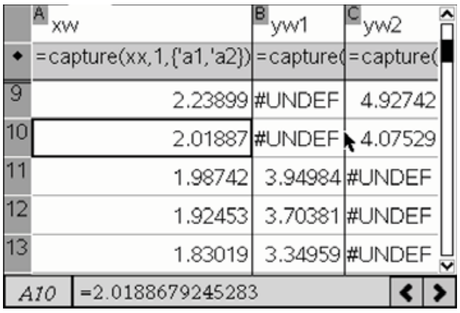
Ziehen Sie den Punkt nun nach rechts über den Punkt C hinaus. Konstruieren Sie ein Polygon (Linien, besondere).



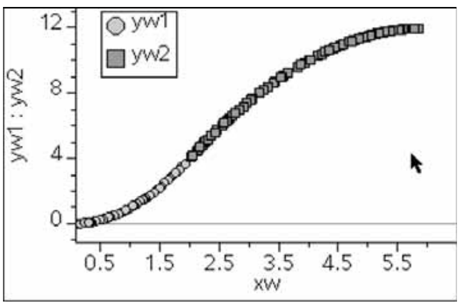
Nun müssen die Flächeninhalte der gerade konstruierten Figuren sowie die Länge x, die identisch mit der Strecke AX ist, gemessen werden. Auch hier benötigt man zwei Anläufe: Erst wird die Fläche des Dreiecks, dann die Fläche des Polygons gemessen. Speichern Sie die gemessenen Werte (Variable). Hier wurden die Variablennamen a1, a2 sowie xx gewählt.



Mit dem jetzigen Dokument können Sie bereits eine Wertetabelle erstellen lassen und die Messwerte in einem Diagramm antragen. Die nächsten Schritte demonstrieren, wie sie die Messwerte auch automatisch erfassen können. Öffnen Sie dazu eine neue Seite mit der Applikation **Lists & Spreadsheets**. Geben Sie hier in die zweite Zeile (das ist die mit dem ◆–Symbol) die rechtsstehenden capture-Befehle ein (Werte sammeln); in der ersten Spalte werden die Werte der Variable xx gesammelt. Der Zusatz {a1,a2} bewirkt, dass die Werte der Variable auch aufgezeichnet werden, wenn sie sich selbst nicht verändert. In diesem Beispiel ist entweder a1 oder a2 nicht definiert. Wenn Sie auf die Seite mit dem Dreieck zurückgehen und den Punkt X verschieben – auch über den Punkt C hinaus – werden in der Tabelle Messwerte gesammelt. Liegt der x-Wert unterhalb von 2, ist a2 nicht definiert. Liegt der Wert über 2, ist a1 nicht definiert. In jeder Zeile wird jedoch mindestens ein Wert gespeichert.



Um die Ergebnisse nun auch graphisch darstellen zu können, speichern Sie die einzelnen Spalten unter Listennamen (hier wurden xw, yw1 und yw2 gewählt, siehe auch Listen eingeben). Nun können Sie die Listen graphisch darstellen. Öffnen Sie eine neue Seite mit der Applikation **Data & Statistics** und ordnen Sie die Variablen den Achsen zu. Achten Sie darauf, dass ein „numerisches y" erzwungen wird, damit die nicht definierten Werte nicht angezeigt werden.



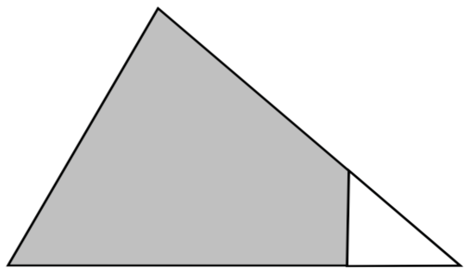
Didaktischer Kommentar

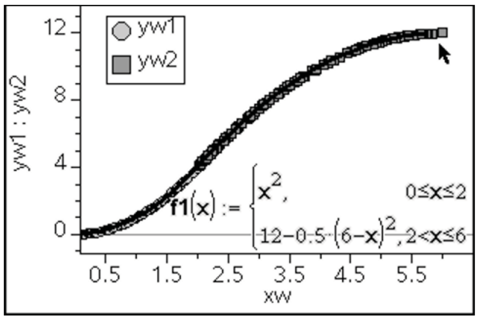
Die Problemstellung kann als ein Einstieg in das Themengebiet der Integralrechnung genutzt werden, wobei hier der Schwerpunkt auf der Idee der Kumulation liegt. Wesentlich für den Einstieg ist, dass zunächst auf jegliche algebraische Beschreibung verzichtet wird. Ziel ist es, ein inhaltliches Verständnis für das Kumulieren zu entwickeln.

Je nach Vorkenntnissen kann die TI-Nspire-Datei durch den Lehrer bereitgestellt oder von einzelnen Lernenden erstellt werden. Es bietet sich nicht an, die Datei von jedem Lernenden selbst anfertigen zu lassen.

Das Aufnehmen von Messwerten in einer Tabelle wird in der Regel recht häufig eingesetzt, so dass es auch eine Überlegung wert ist, den Schülerinnen und Schülern eine Datei mit der Konstruktion zu geben, sie die Messwerte aufnehmen und anschließend auswerten zu lassen.

Das Bestimmen einer konkreten Funktion, die den Flächeninhalt in Abhängigkeit von x beschreibt, kann eine lohnende Zusatzaufgabe sein. Dabei sollten in erster Linie inhaltliche Überlegungen zusammengetragen werden. Günstig scheint es, wenn man den Flächeninhalt zuerst durch ein Dreieck und anschließend – wenn das nicht mehr möglich ist – durch die Differenz des Flächeninhalts zweier Dreiecke betrachtet (der Flächeninhalt des großen abzüglich des Flächeninhalt des kleinen Dreiecks). Es ergibt sich für unseren Fall untenstehende Funktion und nebenstehendes Diagramm, das die Ergebnisse zusammenfasst.





$$A(x) = \begin{cases} x^2 & ,x \in [0;2] \\ 12 - 0{,}5 \cdot (6-x)^2 & ,x \in]2;6] \end{cases}$$

Vorschläge für weiterführende Aufgaben

Aufgabe 1

Ein Glaskolben, wie dargestellt, wird bis zum oberen Rand mit Wasser gefüllt. Ein Diagramm soll die eingefüllte Wassermenge V in Abhängigkeit von der Füllhöhe h darstellen.

a) Skizzieren Sie ein passendes Diagramm.
b) Beschreiben Sie den Füllvorgang mit einer Funktion V(h).

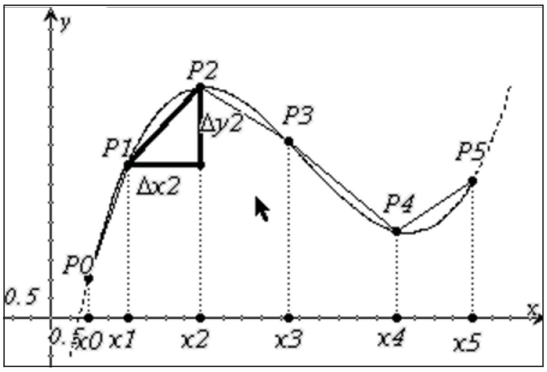
Aufgabe 2

Ein kegelförmiges Gefäß (Höhe 5 cm, Radius 4 cm) wird mit einer konstanten Zuflussrate gefüllt (2 cm³/s). Stellen Sie die Änderung der Pegelhöhe in Abhängigkeit von der Zeit t dar.

Die Bogenlänge eines Funktionsgraphen

Franz Schlöglhofer, Universität und Pädagogische Hochschule Linz

Wie berechnet man die Länge eines Funktionsgraphen?



Steckbrief der Aufgabe

Sekundarstufe II (Integralrechnung)
Dauer: 2-4 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler können
- Ableitungen bestimmen
- Integrale berechnen

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- wenden bei der Einführung des Begriffs „Bogenlänge" die Strategie „Zurückführen auf Bekanntes" an
- berechnen die Länge einer Kurve näherungsweise durch die Länge eines Polygonzugs

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler
- berechnen näherungsweise Polygonzüge (ermitteln z. B. Weglängen aus Landkarten)
- berechnen Bogenlängen mit Hilfe von Integralen

Rolle der Technologie (TI-Nspire™ mit Touchpad, TI-Nspire™ CAS mit Touchpad):
- Abstände von Punkten bzw. Länge von Polygonzüge berechnen
  (in der Tabellenkalkulation oder in der Summenschreibweise)
- Stammfunktionen und Integrale bestimmen

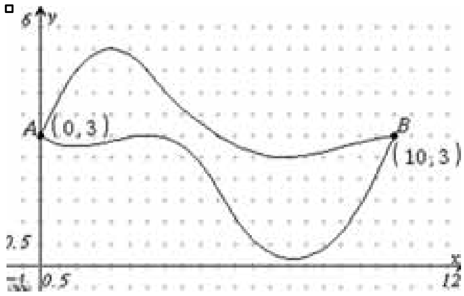
Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Umfangreiche, immer gleiche Berechnungen (Polygonzug mit Tabellenkalkulation)
- Algebraische Berechnung von Integralen und Stammfunktionen

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
- Lehrervortrag, Unterrichtsgespräch
- Bearbeitung von Aufgaben durch Schülerinnen und Schüler

Hinweis:
Das Aufgabenmaterial besteht aus Aufgaben und Hilfetipps. Den Schülerinnen und Schülern sollte mitgeteilt werden, dass sie auf diese Tipps zurückgreifen können. Zu Beginn sollte jedoch nur die Aufgabenstellung ausgeteilt werden, um den Lernenden Gelegenheit zu geben, das Problem möglichst selbständig zu lösen.

1 Die Länge eines Wanderweges berechnen

Die Skizze zeigt den Umriss eines Sees. Rund um den See verläuft ein Wanderweg (Maße in km). Weg I verläuft von A nach B am oben gezeichneten Ufer, Weg II ebenfalls von A nach B am unteren Ufer.



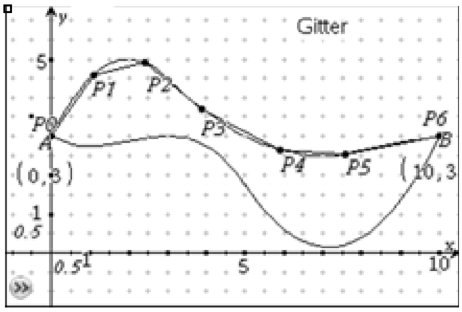
1a) Berechnen Sie näherungsweise die Länge des Weges I. (Ermitteln Sie dazu z. B. näherungsweise Koordinaten von Punkten.)

1b) Eine Schulklasse soll von A nach B laufen. Der Weg am unten gezeichneten Ufer (Weg II) führt an einer Sehenswürdigkeit vorbei. Die Schülerinnen und Schüler fragen, wie viel länger dieser Weg gegenüber dem Weg am oberen Ufer ist. Berechnen Sie dazu näherungsweise analog zu Aufgabe 1a) die Länge des Weges II.

1c) Ermitteln Sie die Länge der beiden Wege möglichst genau.

Tipp 1:

Sie können die Weglänge näherungsweise ermitteln, indem Sie einige Punkte festlegen, geradlinig verbinden und die Länge dieses Polygonzugs berechnen.



Tipp 2:

Weg I: Punkte $P_0 = A$, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, $P_6=B$

Koordinaten näherungsweise aus der Skizze:
$P_0(0|3)$, $P_1(1{,}1|4{,}6)$, $P_2(2{,}4|4{,}9)$, $P_3(3{,}9|3{,}7)$, $P_4(5{,}9|2{,}65)$, $P_5(7{,}6|2{,}54)$, $P_6(10|3)$.

Abstände mit dem Betrag eines Vektors: Z.B.: $\overline{P_0P_1} = \left|\overline{P_0P_1}\right| = \sqrt{(1{,}1-0)^2+(4{,}6-3)^2} \approx 1{,}94$

Die einzelnen Entfernungen und deren Summe können in **Lists & Spreadsheet** ermittelt werden.

Tipp 3:

$\overline{P_0P_1}$ (Formel für $\overline{P_0P_1}$ im Feld c2)
In c1 wird 0 eingetragen.

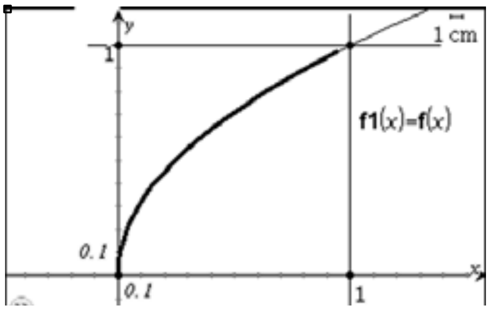
Die Summe der einzelnen Abstände wird hier z. B. durch die Formel =sum(c[]) in d1 berechnet.

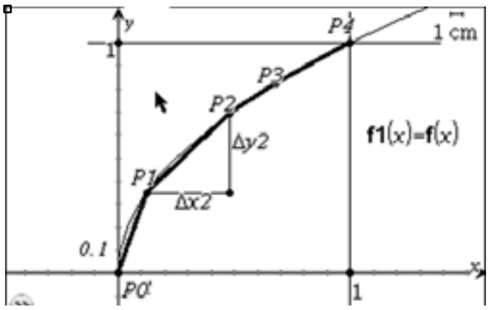
	A px	B py	C	D
◆				
1	0	3	0	11.6029
2	1.1	4.6	1.94165	
3	2.4	4.9	1.33417	
4	3.9	3.7	1.92094	
5	5.9	2.65	2.25887	

C2 $=\sqrt{(a2-a1)^2+(b2-b1)^2}$

2 Herleitung einer allgemeinen Formel
Studieren Sie die folgende Herleitung und wenden Sie das vorgestellte Verfahren anschließend in Aufgabe 3 an.

Gesucht ist die Länge des Graphen von $f(x)=\sqrt{x}$ im Intervall [0;1] (linkes Bild):





Die Länge der Strecke P_1 zwischen P_2 ist

$$\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(f(x_2)-f(x_1))^2} \text{ mit } \Delta x_2=x_2-x_1 \text{ und } \Delta y_2=f(x_2)-f(x_1).$$

Bei n Teilintervallen (Zerlegung $\{x_0, x_1, x_2, \ldots , x_n\}$) ergibt sich für die Länge des Polygonzugs im Intervall $[x_0;x_n]$:

$$L_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}\,.$$

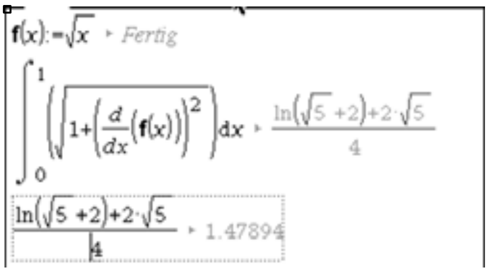
Je größer n gewählt wird, desto genauer erhält man durch die Länge des Polygonzugs die Länge des Funktionsgraphen. Mit $n\to\infty$ ergibt sich genau die Länge des Funktionsgraphen im ausgewählten Intervall. Die Formel für die Länge des Funktionsgraphen ist entsprechend:

$$L_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2} = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}}\cdot\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\cdot\Delta x_i$$

Die Länge des Polygonzugs L_n ist damit eine Summe von (verallgemeinerten) Produkten.

Im Grenzfall $n\to\infty$ bzw. $\Delta x_i\to 0$ und $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\to\frac{dy}{dx}=f'(x)$ (Ableitung der Funktion f an der Stelle x) erhalten wir die Länge des Graphen durch das Integral $L(a,b)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Die Abbildung zeigt die Berechnung für unser Beispiel.



3 Übungsaufgaben

3a) Berechnen Sie die Länge des Umfangs eines Kreises mit dem Radius r = 1 näherungsweise und mit Hilfe eines Integrals.

3b) Berechnen Sie näherungsweise und mit Hilfe eines Integrals die Länge des Funktionsgraphen für $f(x) = x^2$ (Intervall [0;3]).

3c) Berechnen Sie die Weglängen der beiden Wanderwege aus Aufgabe 1) exakt mit Hilfe eines Integrals, wenn die folgenden Funktionen gegeben sind:

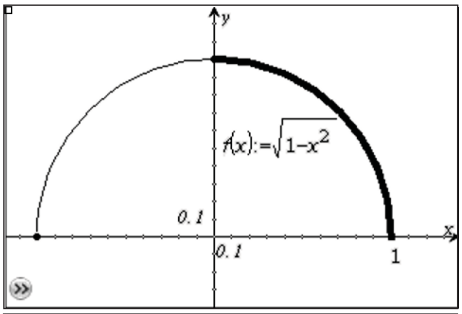
Weg I: $fa(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+5\ (0\le x\le 3)$, $fb(x)=\frac{1}{8}(x-7)^2+\frac{5}{2}\ (3\le x\le 8)$,

$fc(x)=-\frac{1}{32}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{11}{8}\ (8\le x\le 10)$

Weg II: $fd(x)=-\frac{1}{16}x\cdot(x-3)^2+3\ (0\le x\le 5)$, $fe(x)=\frac{7}{20}x^2-5x+18\ (5\le x\le 10)$

1b) und c): Länge des Weges I: l ≈ 11,74 km; Länge des Weges II: l ≈ 12,54 km. Der Weg ist 800 m länger. Die Integrale sind in den Lösungen der Aufgabe 3c enthalten.

3a) Zur Illustration der Herleitung aus Aufgabe 2 kann es nützlich sein, nochmalig eine Berechnung mit Hilfe von Polygonzügen durchzuführen. Der Einheitskreis (Radius 1) ist durch die Gleichung $x^2+y^2=1$ gegeben (Graph einer Funktion zeichnen). Daraus erhält man durch Umformen nach y den Viertelkreis im Intervall [0;1]. Wir können wieder durch einen Polygonzug annähern mit den Punkten $P_0(0|f(0))$, $P_1=(0{,}2|f(0{,}2))$, ...



Ähnlich wie in Aufgabe 1 kann die Berechnung in **Lists & Spreadsheet** erfolgen: Die Folge kx der ersten Koordinaten der Punkte ist gegeben durch: =seq(0.2*i, i, 0, 5).

In Spalte B werden durch =f(a[]) die zugehörigen Funktionswerte der vorher festgelegten Funktion berechnet. In Spalte C werden die Abstände der Punkte bestimmt und in d1 der Näherungswert für den Polygonzug.

	A kx	B ky	C	D
◆	=seq(0.2*i	=f(a[])		
1	0.	1.	0	Summe:
2	0.2	0.979796	0.201018	1.55755
3	0.4	0.916515	0.209772	π/2:
4	0.6	0.8	0.231464	1.5708
5	0.8	0.6	0.282843	

C2 $=\sqrt{(a2-a1)^2+(b2-b1)^2}$

Nach Festlegung der Anzahl der Teilintervalle n wird die Summe von 1 bis n berechnet.

Nun kann auch n geändert werden, z. B. auf 100 oder auf 1000, wodurch sich ein besserer Näherungswert ergibt.

$n:=100 \quad ▸ 100$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)^2}\right) \quad ▸ 1.57065$$

Das Integral erhält man durch die Betrachtung des Grenzwertes für n→∞.

$n:=1000 \quad ▸ 1000$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(f\left(\frac{i}{n}\right)-f\left(\frac{i-1}{n}\right)\right)^2}\right) \quad ▸ 1.57079$$

In der Abbildung wird ein Näherungswert durch Summenbildung ermittelt.

Die direkte Eingabe des Integrals führt zum Näherungswert 1,5708 für die Bogenlänge des Viertelkreises.

$f(x):=\sqrt{1-x^2}$ Fertig

$$\int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^2}\,dx \qquad 1.5708$$

3b) Die näherungsweise Berechnung der Länge erfolgt mit dem Summenterm. Die exakte Berechnung kann mit Hilfe des Integrals durchgeführt werden (integrieren algebraisch). Das Ergebnis unterscheidet sich kaum vom Näherungswert.

$f(x):=x^2 \quad ▸ \text{Fertig}$

$n:=100 \quad ▸ 100$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\left(\frac{3}{n}\right)^2+\left(f\left(\frac{i\cdot 3}{n}\right)-f\left(\frac{(i-1)\cdot 3}{n}\right)\right)^2}\right)$$

$▸ 9.74701$

 © T³ 2011

3c) Länge des Weges I:

Zur Berechnung geben Sie in der Applikation **Notes** die zugehörigen Formeln in ein Mathefenster (ctrl, M) ein.

Alternativ können die Ausdrücke auch in der Applikation **Calculator** eingegeben werden. Die anderen Berechnungen erfolgen analog.

$$\mathbf{wa}:=\int_0^3 \left(\sqrt{1.+\left(\frac{d}{dx}(\mathbf{fa}(x))\right)^2}\right)dx \blacktriangleright 4.10568$$

$$\mathbf{wb}:=\int_3^8 \left(\sqrt{1.+\left(\frac{d}{dx}(\mathbf{fb}(x))\right)^2}\right)dx \blacktriangleright 5.6015$$

$$\mathbf{wc}:=\int_8^{10} \left(\sqrt{1.+\left(\frac{d}{dx}(\mathbf{fc}(x))\right)^2}\right)dx \blacktriangleright 2.03609$$

$$\mathbf{wa+wb+wc} \blacktriangleright 11.7433$$

Weg II ist etwas länger als Weg I. Hier kann die Genauigkeit der Berechnung mit dem Polygonzug verglichen werden.

$$\mathbf{wd}:=\int_0^5 \left(\sqrt{1.+\left(\frac{d}{dx}(\mathbf{fd}(x))\right)^2}\right)dx \blacktriangleright 5.53131$$

$$\mathbf{we}:=\int_5^{10} \left(\sqrt{1.+\left(\frac{d}{dx}(\mathbf{fe}(x))\right)^2}\right)dx \blacktriangleright 7.0105$$

$$\mathbf{wd+we} \blacktriangleright 12.5418$$

Das Arbeitsmaterial gliedert sich in drei Teile:

1) Berechnung eines Polygonzugs, der durch eine Folge von Punkten gegeben ist. Begonnen wird mit einer eingekleideten Aufgabe (Länge eines Wanderweges). Die Schülerinnen und Schüler sollen entdecken, dass man durch Zerlegen in einzelne Strecken einen (krummlinigen) Weg näherungsweise berechnen kann. Die Berechnungen werden in der Tabellenkalkulation bzw. mit der Summenformel durchgeführt. Näherungsweise werden Punkte z. B. aus einer Skizze mit ihren Koordinaten übernommen und die Abstände mit der Abstandsformel berechnet.

2) Im zweiten Teil erfolgt die Einführung der Integralformel für die Bogenlänge.

3) Im dritten Teil wird die Länge von Funktionsgraphen näherungsweise in der Tabellenkalkulation und auch exakt berechnet, wobei die Funktionen durch ihre Terme gegeben sind.

Der erste Teil bleibt auf der Ebene der Abstandsberechnung von Punkten und damit einer dem Computer angepassten näherungsweisen Berechnung der Bogenlänge. Für viele Anwendungen wird diese Art der Berechnung auch ausreichend sein und die Vermittlung derartiger Darstellungen und Berechnungen sollte auch durchaus ein Anliegen von Schule sein.

Als Ergänzung findet man weitere Möglichkeiten für den Einsatz der Tabellenkalkulation zur Berechnung der Länge eines Funktionsgraphen in Aufgabe 3a.

Ohne Rechner scheiterte früher in den meisten Fällen die Berechnung der Bogenlänge mit dem Integral, da es allgemein schwierig ist, eine geeignete Stammfunktion des Wurzelausdrucks in der Formel zu berechnen. Der Vorteil des Rechners liegt in der Berechnung von "schwierigen" Stammfunktionen und näherungsweisen Berechnungen von Integralen.

Das Problem der Berechnung der Bogenlänge reduziert sich daher mit geeigneter Technologie auf das Erkennen einer geeigneten Funktion und das richtige Eingeben und Interpretieren des Integrals.

Die Herleitungen sind angelehnt an Ideen aus den folgenden Schulbüchern:

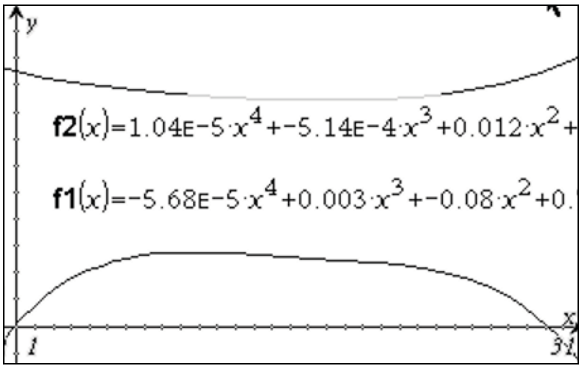
Malle G., u.a.; Mathematik verstehen 8; Verlag öbvhpt, Wien 2007
Götz, S; Reichel H., u.a.; Mathematik Lehrbuch 8, Verlag öbvhpt, Wien 2007

 © T^3 2011

Volumina scheibchenweise berechnen

Michael Schwarz, Hans-Böckler-Berufskolleg Münster

Wie viel passt in eine Chipstüte?



Steckbrief der Aufgabe

Sekundarstufe II (Integralrechnung)
Dauer: 2 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler

- können Integrale einschließlich Volumina von Rotationskörpern berechnen
- haben Grundkenntnisse in der Bedienung einer Tabellenkalkulation
- kennen die Flächenformel für Ellipsen (siehe didaktischer Kommentar)

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler

- übersetzen eine Realsituation in ein mathematisches Modell
- begründen die Wahl ihres Modells, reflektieren Messprobleme und schätzen Messfehler ab

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler

- ermitteln geeignete Funktionen aus Wertepaaren per Regression
- übertragen Kenntnisse aus der Integralrechnung zur Bestimmung des Volumens eines realen Körpers

Rolle der Technologie (TI-Nspire™ CAS mit Touchpad):

- Visualisieren von Messwerten und Graphen
- Berechnen der Regressionsfunktionen und des Volumens per Integralrechnung

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:

- Graphisch: Anpassen von Graphen an gemessene Wertepaare
- Algebraisch: Variieren der Funktionsterme zur Fehleranalyse

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:

- möglicher Abschluss der Integralrechnung
- Arbeit in Gruppenarbeit (Leistungskurs) oder Kleingruppen
- Versuch (Wasserverdrängung) möglichst als Kontrolle vorbereiten;
  ggf. im Plenum vorab mögliche Funktionsklassen für die Regression besprechen

Wie groß ist das Volumen einer Chipstüte?

Das Volumen einer Verpackung ist oft angegeben. Bei Konservendosen, Flaschen usw. steht dies meist auf dem Etikett.

Bei Chipstüten ist das jedoch nicht der Fall. Dort wird lediglich der Inhalt in Gramm angegeben.

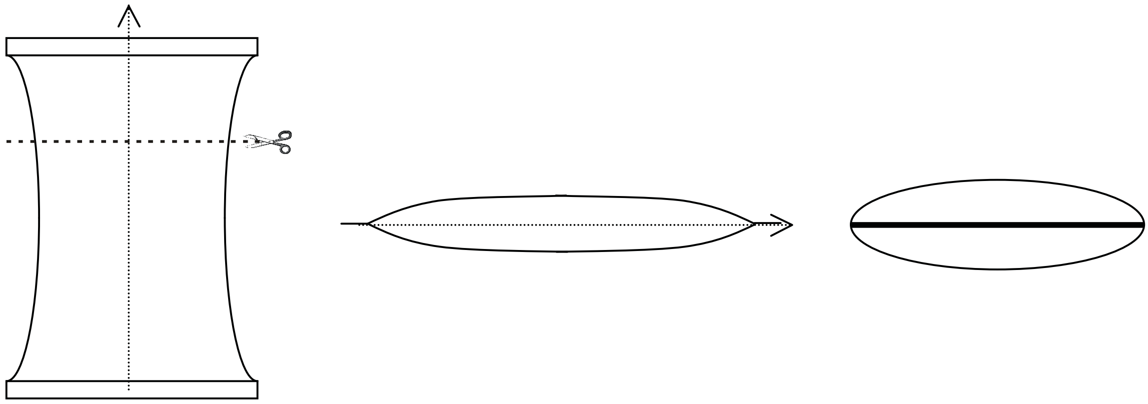
Die Chipstüte wird hier als Beispiel für sogenannte „Schlauchverpackungen“ gewählt.

Bestimmen Sie das Volumen der (geschlossenen) Tüte.

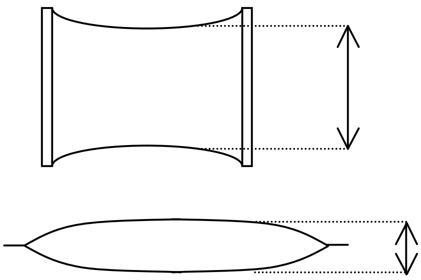
Die Idee:
Eine Chipstüte ist am oberen und unteren Rand verschweißt. Dazwischen wird die Tüte bauchig. Schneidet man eine Tüte gedanklich parallel zu den Schweißrändern durch (siehe Abbildung unten), so lässt sich diese Schnittfläche näherungsweise durch eine Ellipse beschreiben (→ Draufsicht).

Für die Beschreibung der Vorgehensweise sind folgende Bezeichnungen hilfreich:

Frontalansicht Seitenansicht Draufsicht



Weiterführende Hinweise für eine mögliche Lösung
Legen Sie die x-Achse senkrecht mittig durch die Chipstüte (von der Mitte einer Schweißnaht zur anderen; siehe Hilfspfeile in den oben gezeichneten Ansichten).
Messen Sie an mehreren Stellen die Breite und die Dicke der Chipstüte (siehe Hilfslinien).

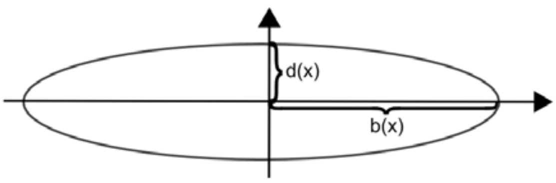


Breite

Hilfslinien (Ränder)
„Randfunktionen“
d(x) und b(x)

Dicke

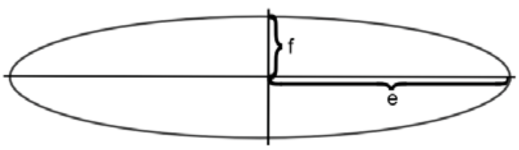
Zu einem bestimmten Abstand x gehört in der Draufsicht eine Ellipse mit den Halbachsen d(x) und b(x); d entspricht der halben Dicke der Chipstüte und b der halben Breite an der Stelle x:



Ermitteln Sie zwei „Randfunktionen“ d(x) und b(x).

Berechnen Sie das Volumen der Chipstüte mit Hilfe der Integralrechnung. Dabei benötigt man die Flächeninhaltsformel einer Ellipse:

$$A = \pi \cdot e \cdot f.$$

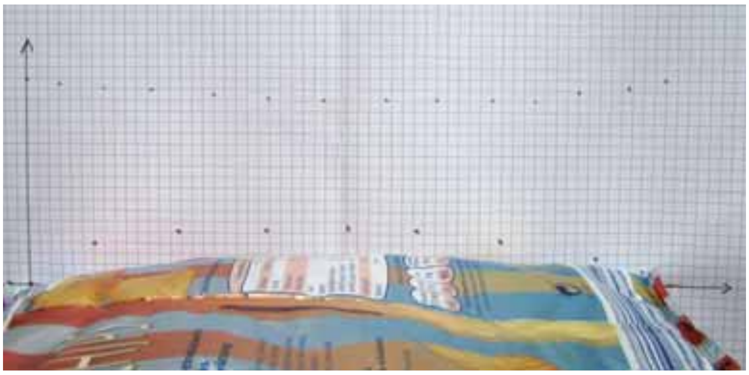


Hilfslinien (Ränder)
"Randfunktionen"
d(x) und b(x)

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis für das Volumen durch Wasserverdrängung. Vergleichen Sie die Ergebnisse der beiden Methoden.

Das Prinzip der Volumenmessung lässt sich auch mit Milchtüten durchführen. Diese sind allerdings nur noch selten im Handel zu finden. Die Chipstüte hat den Vorteil, dass sich die Form der Tüte beim Hinlegen nur wenig ändert und man durch vorsichtiges Drücken die größeren Chips zerbröseln kann. Dadurch erhält die Tüte eine gewisse Stabilität.

Zur Ermittlung der (halben) Tütenbreite und der (halben) Tütendicke (obere/untere Punktreihe in der folgenden Abbildung) bietet es sich an, die Tüte auf ein kariertes DIN-A3-Blatt zu legen – einmal auf die Außenkante (siehe Bild) und einmal auf die Vorderseite – und von oben misst bzw. erst einige Stellen markiert. Die Tüte soll dabei symmetrisch zur x-Achse liegen, da der Radius und nicht der Durchmesser ermittelt werden soll.



Hier wurde die oben gezeigte Chipstüte vermessen. Alternativ kann man auch Fotos einer Chipstüte von mehreren Seiten verwenden.

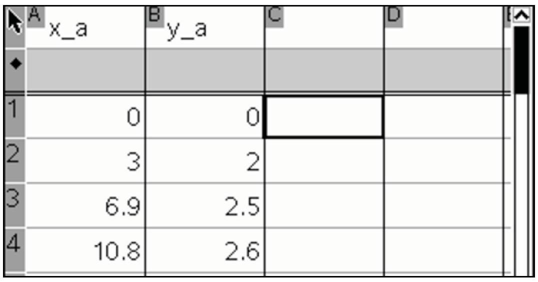
Wir erhielten die folgenden Messwerten (in cm):
1. Randfunktion d(x)/halbe Tütendicke

x	0	3,0	6,9	10,8	14,5	16,7	21,5	26,0	28,2	29,0
y	0	2,0	2,5	2,6	2,7	2,6	2,2	1,3	0,7	0

2. Randfunktion b(x)/halbe Tütenbreite

x	0	1,5	3,5	5,6	8,5	11,0	13,4	16,3	18,5	21,0	23,0	25,0	27,3	29,0
y	9,5	9,3	9,0	8,9	8,7	8,5	8,5	8,5	8,5	8,5	8,5	8,9	9,2	9,5

Tragen Sie die x- und y-Koordinaten für die erste Randfunktion in die Applikation **Lists & Spreadsheet** ein – für die zweite Randfunktion wird später eine zweite Bildschirmseite verwendet (siehe unten).

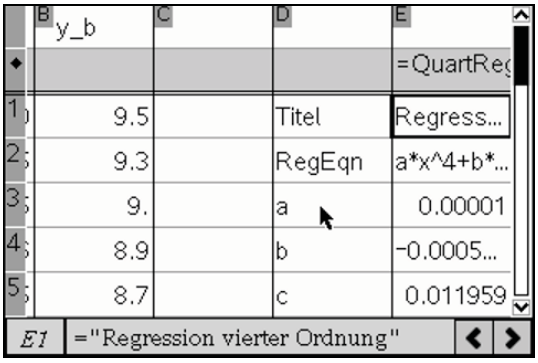


Führen Sie eine geeignete Regression durch. Hier wurde wegen der Form der Tüte ein Polynom vierten Grades genommen.

a und b bezeichnen hier die Spalten. Alternativ können auch Variablen für die Spalten eingeführt werden (siehe Screenshot) und hier ausgewählt werden.

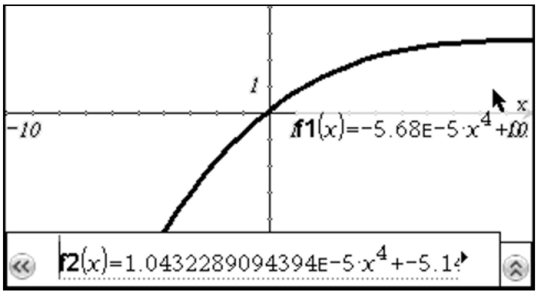
Speichern Sie – falls nicht bereits vorab eingestellt – das Ergebnis als Funktion f1(x) ab.

Verfahren Sie nun entsprechend für die zweite Funktion b(x) und speichern Sie das Ergebnis unter f2(x). Aus Gründen der Übersichtlichkeit bietet sich eine zweite Seite mit der Applikation **Lists & Spreadsheet** an.



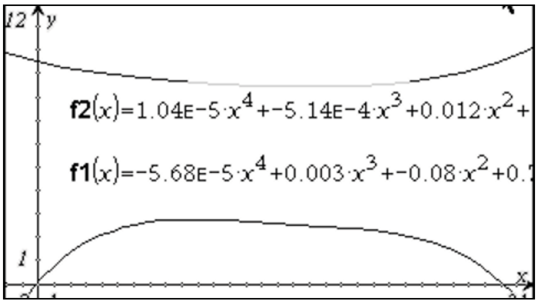
Zeichnen Sie die beiden Funktionen f1(x) und f2(x), die die Radien der Ellipsen beschreiben, in ein Koordinatensystem.

Hinweis: beide Funktionen sind bereits eingetragen und müssen nur noch einmal mit der Enter-Taste bestätigt werden.



Passen Sie das Koordinatensystem so an, dass der entscheidende Bereich der Graphen zu sehen ist.

Die graphische Überprüfung ergibt, dass die Tüte nicht ganz symmetrisch gelegen hat bzw. dass die Chips in der Tüte nicht gleichmäßig genug verteilt waren.

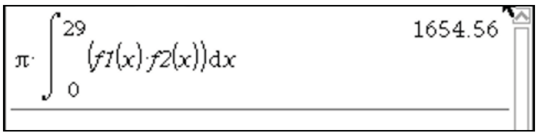


Herleitung der Integralformel

Für die Fläche einer Ellipse gilt A = π·e·f. Im vorliegenden Fall sind die beiden Hauptachsen der Ellipse veränderliche Größen, die durch d(x) und b(x) beschrieben werden. Daher lautet die Flächeninhaltsformel für die Stelle x: $A(x) = \pi \cdot d(x) \cdot b(x)$.

Nun wird entlang der x-Achse integriert. Damit lässt sich das Volumen des entstandenen Körpers durch $V = \pi \int_0^h d(x) \cdot b(x)\, dx$ berechnen.

Das Volumen wird in der Applikation **Calculator** errechnet.



Aufgrund der möglichen Messfehler sollte das Ergebnis angemessen gerundet werden, z. B. „Das Volumen liegt zwischen 1,6 und 1,7 Litern.“

Im Rahmen der Differentialrechnung werden unter dem Stichwort „Extremwertaufgaben“ oft auch Verpackungen analysiert und optimiert. Ein (meist nicht mehr obligatorisches) weiterführendes Thema innerhalb der Integralrechnung greift das Thema „Verpackungen“ wieder auf: die Rotationskörper. Diese beschränken sich jedoch auf Behältnisse mit einem kreisförmigen Querschnitt, etwa Konservendosen, Sektgläser usw. Mit Hilfe der Integralrechnung lassen sich aber auch die Volumina anderer Körper berechnen.

Das Beispiel Chipstüte ist so gewählt, dass es die Integralrechnung abschließen kann. Es stellt eine Vertiefung der Volumenberechnung von Rotationskörpern dar. Beim Aufstellen der Volumenformel wird noch einmal die Idee der Herleitung des Integrals über unendliche Summen benutzt.

Das Volumen lässt sich durch einen kleinen Wasserverdrängungsversuch experimentell recht exakt ermitteln – das Volumen der Chipstüte verkleinert sich beim Eintauchen nur minimal. Alternativ kann man das Volumen durch einen Quader abschätzen, um zumindest die Größenordnung des berechneten Volumens zu prüfen. Das zeigt, dass der eigentliche inhaltliche Schwerpunkt der Aufgabe in einem anderen Bereich liegt: Die Idee des scheibchenweisen Aufaddierens wird hier sehr deutlich und liefert eine gute Voraussetzung, um auch komplexere Integrale verstehen zu können.

Obwohl die Bestimmung der Randfunktionen leider nur mit Messfehlern bzw. Ungenauigkeiten möglich ist (schließlich rutschen die Chips beim Drehen der Tüte immer nach unten), lagen die ermittelten Ergebnisse verschiedener Schülergruppen – so zumindest meine Erfahrung – meist recht nah beieinander und stimmten mit dem experimentell ermittelten Wert gut überein. Das kann jedoch daran liegen, dass alle Schüler beim Messen vergleichbare Fehler machten. Umso wichtiger ist deswegen die Fehlerdiskussion:

Da die Tüte meist etwas eingeknickt ist, sind die Werte mit größeren Messfehlern belastet. Die Regression glättet die Ergebnisse dann ein wenig. Man sollte die per Regression ermittelten Funktionen vollständig übernehmen und die Koeffizienten des Polynoms nicht zu sehr abrunden – ggf. muss man das den Lernenden mitteilen, da die Betrachtung des Wachstums von Potenzfunktionen unterrichtlich bereits einige Zeit zurückliegt. Die Wahl des Funktionstyps ist abhängig vom vorhergehenden Unterricht, ggf. reichen auch schon Funktionen zweiten Grades.

Literatur

Volumenbestimmung einer Zahnpastatube:
http://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=748
(Stand: 01.05.2011)

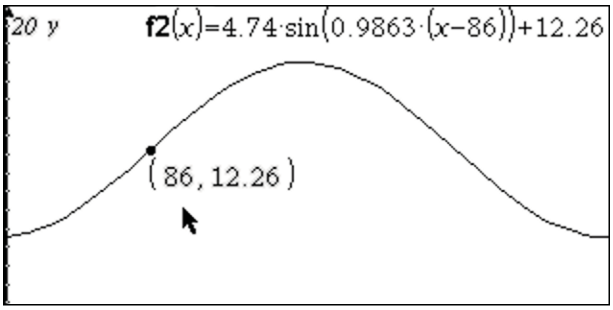
Berechnung der mittleren Sonnenscheindauer

Andreas Pallack, Soest

?

© julien tromeur (Fotolia)

Wie lange schien in diesem Jahr die Sonne bis heute im Schnitt?



Steckbrief der Aufgabe

Sekundarstufe II (Analysis)
Dauer: 2-3 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler
- können den Verlauf der Graphen von Sinusfunktionen beschreiben und Translationen durchführen
- verfügen über grundlegende Kenntnisse der Integralrechnung

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- modellieren die Sonnenscheindauer mit Hilfe von Funktionen

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler
- bestimmen Mittelwerte mit Hilfe von Integralen

Rolle der Technologie (TI-Nspire™ mit Touchpad, TI-Nspire™ CAS mit Touchpad):
- Berechnen
- Visualisieren

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Graphisch: Die Bedeutung von Parametern in Funktionstermen erkennen
- Numerisch: Werte im Kontext interpretieren

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
Dieses Beispiel verfolgt im Kern, dass die Lernenden die Möglichkeit Mittelwerte mit Integralen zu berechnen, weitgehend selbst erkennen. Diese Phase sollte deswegen besonders schüleraktiv gestaltet werden.

Titel der Einheit	Kopiervorlage	Lösungshinweise	Didaktischer Kommentar	Zusatzmaterial

Der Wettervorhersage darf man leider nicht vollends vertrauen. Auch wenn Sonne angesagt ist, kann es passieren, dass ein Schauer den Sommerspaziergang vermiest. Das Wetter an einem bestimmten Tag ist im Voraus kaum berechenbar.

Im Gegensatz dazu kann man die astronomische Sonnenscheindauer sehr genau berechnen. Als astronomische Sonnenscheindauer bezeichnet man die Zeit von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang. Ob die Sonne dabei scheint oder nicht spielt keine Rolle: Die astronomische Sonnenscheindauer gibt an, wie lange die Sonne pro Tag an einem festen Ort maximal zu sehen ist.

© Klaus-Peter Adler - Fotolia.com

In Lüneburg gilt für die astronomische Sonnenscheindauer f(x) (gemessen in Stunden) für den x-ten Tag des Jahres näherungsweise:

$$f(x) = 4{,}74 \cdot \sin(\, 0{,}9863 \cdot (x - 86)\,) + 12{,}26$$

Auf den folgenden Seiten kann man Tabellen mit der Sonnenscheindauer beliebiger Orte erstellen (Quelle: http://www.fwiegleb.de/geo-l.htm für die Längen- und Breitengrade; http://sun.exnatura.de/ für die Sonnenscheindauertabellen). Unsere Daten wurden berechnet für die Stadt Lüneburg in den Monaten November und Dezember des Jahres 2010.

Aufgabe 1:
Zeichnen Sie den Graphen von f und erläutern Sie die Formel im Sachzusammenhang (Wertebereich, die Bedeutung der Zahlenangaben in der Funktion).

Aufgabe 2:
Beurteilen Sie die Stimmigkeit der Formel anhand der beigefügten Daten.

Aufgabe 3:
Berechnen Sie die mittlere astronomische Sonnenscheindauer in der ersten Novemberwoche (01.-07. November; der 1. November ist Tag x = 305) mit Hilfe

- einer Wertetabelle der Funktion
- eines Integrals
- der Messdaten

Vergleichen Sie die berechneten und gegebenen Werte miteinander.

Aufgabe 4:
Berechnen Sie die mittlere Sonnenscheindauer in einem Kalenderjahr.

Aufgabe 5:
Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung, mit der man die mittlere Sonnenscheindauer bis zum Tag x eines Jahres näherungsweise berechnen kann.

Aufgabe 6:
Welche Bedeutung hat der 86. Tag in diesem Sachzusammenhang? Welche Bedeutung hat das Maximum der Funktion aus Aufgabe 5?

Daten zum Sonnauf- und Sonnenuntergang sowie zur astronomischen Sonnenscheindauer in Lüneburg in den Monaten November und Dezember des Jahres 2010

Sonnenauf- und Sonnenuntergang - November 2010

Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr
		1. A: 07:13 U: 16:47 S: 09:33	2. A: 07:15 U: 16:45 S: 09:29	3. A: 07:17 U: 16:43 S: 09:25	4. A: 07:19 U: 16:41 S: 09:21	5. A: 07:21 U: 16:39 S: 09:18
6. A: 07:23 U: 16:37 S: 09:14	7. A: 07:25 U: 16:35 S: 09:10	8. A: 07:27 U: 16:34 S: 09:06	9. A: 07:29 U: 16:32 S: 09:03	10. A: 07:31 U: 16:30 S: 08:59	11. A: 07:32 U: 16:29 S: 08:56	12. A: 07:34 U: 16:27 S: 08:52
13. A: 07:36 U: 16:25 S: 08:49	14. A: 07:38 U: 16:24 S: 08:45	15. A: 07:40 U: 16:22 S: 08:42	16. A: 07:42 U: 16:21 S: 08:39	17. A: 07:44 U: 16:19 S: 08:35	18. A: 07:45 U: 16:18 S: 08:32	19. A: 07:47 U: 16:17 S: 08:29
20. A: 07:49 U: 16:15 S: 08:26	21. A: 07:51 U: 16:14 S: 08:23	22. A: 07:53 U: 16:13 S: 08:20	23. A: 07:54 U: 16:12 S: 08:17	24. A: 07:56 U: 16:11 S: 08:14	25. A: 07:58 U: 16:10 S: 08:11	26. A: 07:59 U: 16:09 S: 08:09
27. A: 08:01 U: 16:08 S: 08:06	28. A: 08:03 U: 16:07 S: 08:04	29. A: 08:04 U: 16:06 S: 08:01	30. A: 08:06 U: 16:05 S: 07:59			

Erklärung: A: Sonnenaufgang, U: Sonnenuntergang, S: Sonnenlicht in Stunden
= Vollmond, = letztes Viertel, = Neumond, = erstes Viertel

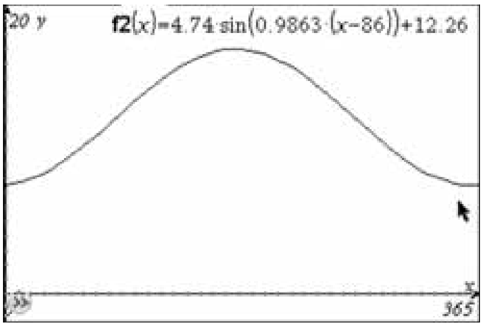
Sonnenauf- und Sonnenuntergang - Dezember 2010

Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr
				1. A: 08:07 U: 16:04 S: 07:56	2. A: 08:09 U: 16:04 S: 07:54	3. A: 08:10 U: 16:03 S: 07:52
4. A: 08:12 U: 16:02 S: 07:50	5. A: 08:13 U: 16:02 S: 07:48	6. A: 08:15 U: 16:01 S: 07:46	7. A: 08:16 U: 16:01 S: 07:44	8. A: 08:17 U: 16:00 S: 07:43	9. A: 08:18 U: 16:00 S: 07:41	10. A: 08:20 U: 16:00 S: 07:40
11. A: 08:21 U: 16:00 S: 07:38	12. A: 08:22 U: 16:00 S: 07:37	13. A: 08:23 U: 16:00 S: 07:36	14. A: 08:24 U: 16:00 S: 07:35	15. A: 08:25 U: 16:00 S: 07:34	16. A: 08:26 U: 16:00 S: 07:33	17. A: 08:27 U: 16:00 S: 07:33
18. A: 08:28 U: 16:00 S: 07:32	19. A: 08:28 U: 16:01 S: 07:32	20. A: 08:29 U: 16:01 S: 07:31	21. A: 08:30 U: 16:01 S: 07:31	22. A: 08:30 U: 16:02 S: 07:31	23. A: 08:31 U: 16:02 S: 07:31	24. A: 08:31 U: 16:03 S: 07:31
25. A: 08:32 U: 16:04 S: 07:32	26. A: 08:32 U: 16:04 S: 07:32	27. A: 08:32 U: 16:05 S: 07:32	28. A: 08:33 U: 16:06 S: 07:33	29. A: 08:33 U: 16:07 S: 07:34	30. A: 08:33 U: 16:08 S: 07:35	31. A: 08:33 U: 16:09 S: 07:36

Erklärung: A: Sonnenaufgang, U: Sonnenuntergang, S: Sonnenlicht in Stunden
= Vollmond, = letztes Viertel, = Neumond, = erstes Viertel

Aufgabe 1

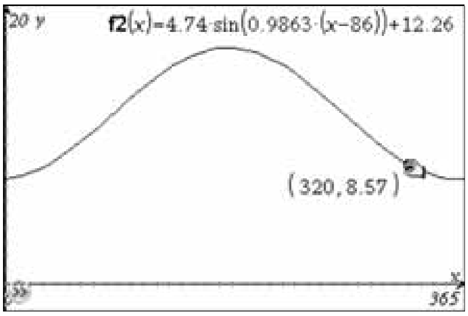
Zum Zeichnen des Graphen öffnen Sie die Applikation **Graphs** und geben den Funktionsterm ein (Graph einer Funktion zeichnen). Achten Sie darauf, dass das Winkelmaß auf Gradmaß eingestellt ist. Passen Sie die Fenstereinstellungen entsprechend an (Koordinatenachsen anpassen) – in der Abbildung rechts wurde für die x-Achse der Bereich [0;365] und für die y-Achse [-2;20] gewählt.



Der Wertebereich reicht von 7,52 bis 17. Bestimmen kann man ihn z. B. durch Abfahren des Graphen (Punkt auf Objekt) oder auch rechnerisch (12,26 – 4,74 bzw. 12,26 + 4,74). Die Zahl 4,74 gibt die Streckung der Sinusfunktion in y-Richtung an. Diese Zahl mit zwei multipliziert ergibt die Differenz der Sonnenscheindauer zwischen dem längsten und dem kürzesten Tag. Der Faktor 0,9863 ergibt sich aus dem Quotienten 360/365. Die Sinusfunktion hat eine Periodenlänge von 360(°). So wird die Periodenlänge auf 365 verlängert. Das Abziehen von 86 (ungefähr das Viertel eines Jahres) bewirkt, dass das Maximum der Sonnenscheindauer fast (da der kürzeste Tag ja nicht an Neujahr ist) in die Mitte des Jahres verschoben wird – es handelt sich also um eine Verschiebung der Kurve nach rechts. Die Sinusfunktion ohne weitere Summanden oszilliert um die x-Achse. Durch die Addition von 12,26 wird der Graph nach oben verschoben, so dass alle Werte deutlich oberhalb der x-Achse liegen.

Aufgabe 2

Erstellen Sie einen Punkt auf dem Graphen (Punkt auf Objekt). Seine Koordinaten werden automatisch ausgegeben. Durch Abfahren des Graphen werden nun Wertepaare der Funktion angezeigt. Um die Werte der Tabelle mit denen der Funktion vergleichen zu können, muss zu einem Datum die Zeit in Tagen seit dem 01. Januar berechnet werden.



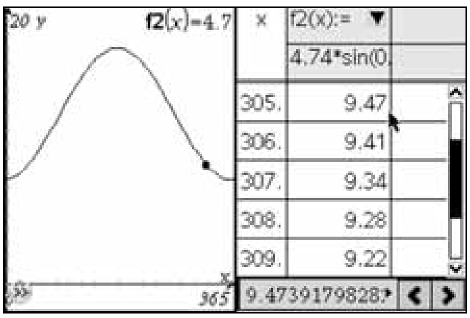
TI-Nspire™ verfügt dazu über eine Funktion; ihre Funktionsweise erläutert der Screenshot rechts.

Beim Vergleich ist darauf zu achten, dass die Angaben in der Tabelle Stunden-Minuten-Angaben sind, während es sich bei den Funktionswerten um reine Stundenangaben handelt. Am 16.11. beträgt die Sonnenscheindauer z. B. 8 Stunden und 39 Stunden, was 8,65 Stunden entspricht.

Die Daten der Tabelle stimmen bis auf geringe Abweichungen mit denen der Funktion überein, weswegen die Formel selbst die Sonnenscheindauer in Abhängigkeit von der Zeit in Tagen gut beschreibt.

Aufgabe 3:

Blenden Sie im rechten Teil des Bildschirms die Wertetabelle ein (ctrl T). Eine Möglichkeit zur Berechnung der mittleren Sonnenscheindauer ist das Aufschreiben dieser Werte, das anschließende sukzessive Addieren und Teilen durch 7.



 © T³ 2011

Alternativ können die Werte in Form einer Summe berechnet werden.

$$\frac{\sum_{t=305}^{311}(f2(t))}{7} \qquad 9.28$$

Verfügen die Lernenden bereits über Fertigkeiten im Umgang mit einer Tabellenkalkulation, ist auch eine sehr übersichtliche Berechnung in der Applikation **Lists & Spreadsheet** möglich.

Geben Sie die sieben x-Werte für die Tage ab dem 1. November in Spalte A ein. In Spalte B berechnet eine Spaltenformel die Funktionswerte (Formeln eingeben). In Zelle C1 wird dann der Mittelwert berechnet. Die mittlere astronomische Sonnenscheindauer beträgt in dieser Woche 9,28 Stunden.

	A	B	C	D
◆		=f2(a[])		
1	305.	9.47	9.28	
2	306.	9.41		
3	307.	9.34		
4	308.	9.28		

C1 $=\frac{\text{sum}(b[:])}{7}$

Den Näherungswert mit Hilfe des Integrals berechnet man, indem man als Grenzen den ersten Tag sowie den letzten „vermehrt um 1" auswählt (Funktion integrieren). Nur so werden 7 Tage ab dem Tag 305 gezählt. Im Unterricht sollte auf diesen Schritt besonderer Wert gelegt werden (→ Didaktischer Kommentar).

$$\frac{1}{7}\cdot\int_{305}^{312}(f2(t))\,dt \qquad 9.25$$

Zur Ermittlung der mittleren astronomischen Sonnenscheindauer aus den Messdaten öffnen Sie eine neue Applikation **Lists & Spreadsheet**. In Spalte A tragen Sie die Stunden, in Spalte B die Minuten ein. Mit einer Spaltenformel können diese Angaben in verarbeitbare Stundenwerte umgerechnet werden (Formeln eingeben). Alternativ zum Summenbefehl kann das arithmetische Mittel auch direkt mit der Formel =mean(.) – hier in Zelle D1 – berechnet werden.

	A std	B minu	C	D	E
◆			=std+minu/60		
1	9.	33.	9.55	9.35	
2	9.	29.	9.48		
3	9.	25.	9.42		
4	9.	21.	9.35		
5	9.	17.	9.28		

D1 =mean(c[:])

Aufgabe 4:
Aufgabe 3 zeigte, dass die Berechnung mit Hilfe eines Integrals gute Näherungswerte liefert. Die Berechnung erfolgt wie im Beispiel oben; lediglich zur Illustration wurde hier zusätzlich der Mittelwert mit Hilfe einer Summe berechnet.

$$\frac{1}{365}\cdot\int_{1}^{366}(f2(t))\,dt \qquad 12.3$$

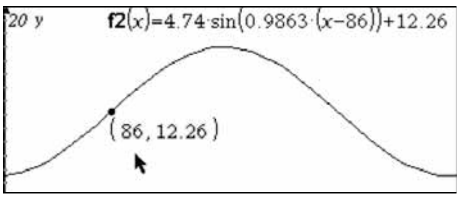
$$\frac{1}{365}\cdot\sum_{t=1}^{365}(f2(t)) \qquad 12.3$$

Aufgabe 5:
Der Funktionsterm kann in der CAS-Version von TI-Nspire™ explizit berechnet werden.

CAS

$$\frac{1}{x}\cdot\int_{1}^{x+1}(f2(t))\,dt$$
$$\frac{-275.\cdot(\cos(0.986\cdot(x-85.))-0.045\cdot(x+2.41))}{x}$$

Aufgabe 6:
Der 86. Tag ist im Graphen der betrachteten Funktion ein Wendepunkt – es handelt sich um den Frühlingsbeginn. Die durchschnittliche astronomische Sonnenscheindauer ist hier auch die Tages-Sonnenscheindauer. Das Maximum der Integralfunktion aus Aufgabe 5 liegt an der Stelle des zweiten Wendepunktes im Intervall [0;365]. Es handelt sich entsprechend um den Herbstbeginn.



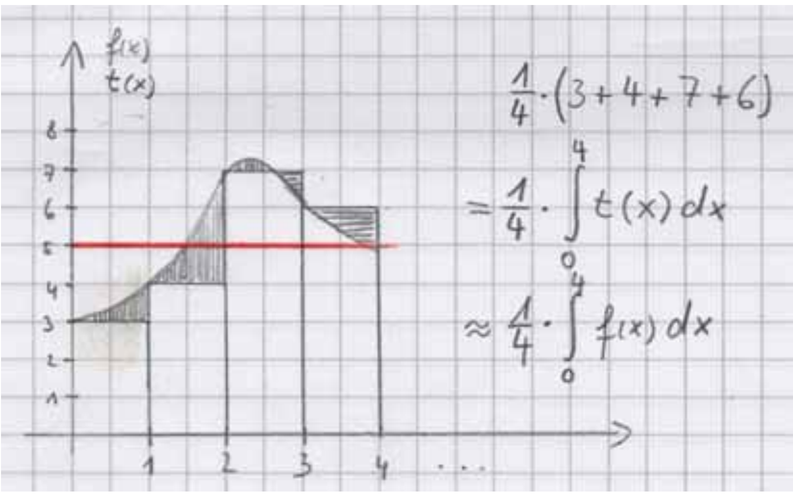
Unabhängig von der unterrichtlichen Sequenzierung wird die Berechnung von Mittelwerten mit Hilfe von Integralen eher am Ende eines Lehrgangs zur Integralrechnung angesiedelt sein.

Betrachtet man eine Funktion, deren Graph sich in einem Intervall [a;b] oberhalb der x-Achse befindet, ist die Frage nach dem Mittelwert gleichbedeutend mit der Frage nach der Höhe eines Rechtecks über dem Intervall [a;b], das den gleichen Flächeninhalt einschließt wie der Graph der Funktion mit der x-Achse. Dieses Denkmodell macht vielen Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten.

Eine Alternative wurde in diesem Beitrag präsentiert. Auch sie beinhaltet einen Stolperstein: Die Lernenden müssen eine Beziehung zwischen der Betrachtung diskreter Werte und einer kontinuierlichen Funktion herstellen. Eine Möglichkeit, das anzubahnen – mit der ich recht gute Erfahrungen gemacht habe – stellen die folgenden Schritte dar:

- Berechnung einer Summe von Werten (z. B. 3, 4, 7, 6 oder Werte aus der Tabelle in der Kopiervorlage)
- Betrachtung einer Treppenfunktion, die Stufen der Breite 1 und Höhen entsprechend der Werte hat (hier also 3, 4, 7, 6)
- Betrachtung des Integrals über diese Funktion
- Berechnung des Mittelwertes und Veranschaulichung im Bild der Treppenfunktion
- Einzeichnen einer Kurve, welche die Werte annähert (was die Lernenden in der Regel aus der Differentialrechnung kennen) und Abschätzen des Fehlers

Die folgende Skizze fasst die Überlegungen zusammen. Die horizontal schraffierten Bereiche gehen positiv, die vertikal schraffierten negativ in die Gesamtbilanz ein.



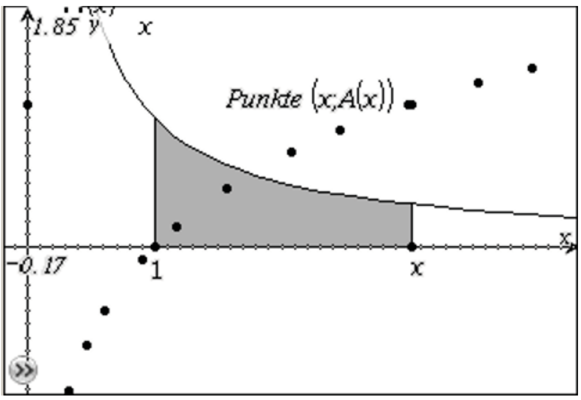
Gut thematisieren lässt sich so auch die Wahl der Grenzen. Die in diesem Beitrag gewählte Methode, einen Tag weiter zu gehen, ist nur eine Möglichkeit. Genauso legitim ist, das Intervall links und rechts zu verbreitern. Die gleichen Überlegungen findet man bei Näherungsformeln im Rahmen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Gesucht & Gefunden: Integralfunktionen

Dr. Karl-Heinz Keunecke, Kiel
Angelika Reiß, Primo-Levi-Schule, Berlin

© gnurf - Fotolia.com

Gibt es eine Integralfunktion zu f(x) = 1/x?



Steckbrief der Aufgabe
Sekundarstufe II (Integralrechnung)
Dauer: 2 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler
- kennen Exponential- und Logarithmusfunktionen
- kennen Flächeninhaltsfunktionen

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- nutzen spezielle – bereits erarbeitete – Werkzeugkompetenzen
- bestimmen Funktionen, mit denen die erzeugten Streuplots beschrieben werden können
- begründen und reflektieren die Wahl ihrer Funktionen

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler
- berechnen Flächeninhalte unter dem Graphen von 1/x
- identifizieren die entstehende Flächeninhaltsfunktion als eine Logarithmusfunktion
  können Stammfunktionen zu 1/x bestimmen

Rolle der Technologie (TI-Nspire™ mit Touchpad, TI-Nspire™ CAS mit Touchpad):
- Visualisieren
- Konstruieren
- Berechnen

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Graphisch: Experimentieren mit Funktionsgraphen

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
- Einzel- oder Partnerarbeit
- Konstruieren der Graphen von Integralfunktionen mithilfe schriftlicher Anleitungen
- Entdecken der gesuchten Stammfunktionen durch Experimentieren mit den Graphen bekannter Funktionstypen

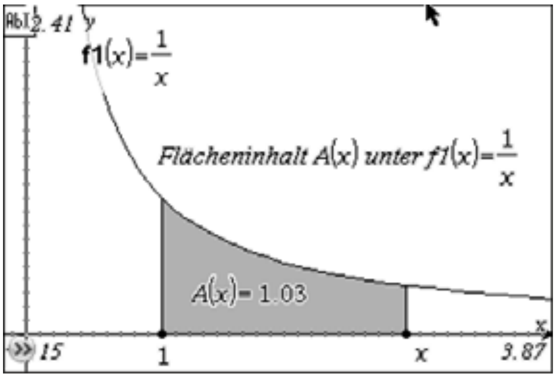
Entdecken einer Integralfunktion zu f(x) = 1/x

Sie haben sich bereits Integralfunktionen zu den Potenzfunktionen $p(x) = x^n$ $(n \neq -1)$ hergeleitet. Diese haben die Form

$$P(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1},$$

wobei a die untere Integrationsgrenze ist. Für n = -1 ist P(x) nicht definiert. Deshalb muss man einen anderen Weg zur Bestimmung von Integralfunktionen zu f(x) = 1/x suchen.

1. Bestimmen Sie den Flächeninhalt A(x) unter dem Graphen der Funktionzu f1(x) = 1/x. Wählen Sie als untere Grenze 1 und als obere Grenze eine Zahl x mit x ≥ 1. Zeichnen Sie mit den Hilfsmitteln des TI-Nspire™ den Graphen der Funktion, die den Flächeninhalt unter dem Graphen zu f(x) = 1/x in Abhängigkeit von der oberen Grenze x angibt. Beschreiben Sie diesen Graphen durch einen Funktionsterm.



2. Konstruieren Sie auch die Umkehrfunktion des Graphen und beschreiben Sie diese durch einen Funktionsterm.

Hinweise zur Bearbeitung dieser Aufgabe:

Zu Aufgabe 1: Zur Unterstützung bei der Bearbeitung dieser Aufgabe mit dem TI-Nspire™ steht Ihnen eine Beschreibung der Herleitung der Integralfunktionen von f(x) = x² zum Download zur Verfügung (www.keukiel.de/integral_xhoch2).

Zu Aufgabe 2: Um die Graphen der Integralfunktion und ihrer Umkehrfunktion mit dem TI-Nspire™ darzustellen, spiegeln Sie den Punkt P(x|A(x)) an der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten. Beachten Sie dabei, dass „Achsenspiegelung“ nur angewendet werden kann, wenn Sie die Winkelhalbierende als Gerade durch zwei Punkte (den Ursprung und einen weiteren Punkt) konstruieren.

Rufen Sie dann Geometriespur auf und klicken Sie nacheinander auf P und den Spiegelpunkt P‘. Bewegen Sie dann die obere Grenze entlang der x-Achse, um die Punkte beider Graphen darstellen zu lassen.

Zusatzaufgabe:

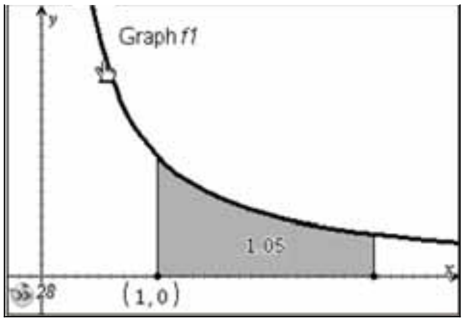
Der Einfluss der unteren Grenze auf die Integralfunktion zu f(x) = 1/x

Ändern Sie die untere Grenze, bestimmen Sie Terme für die entstehenden Funktionen und suchen Sie nach Zusammenhängen.

Entdecken einer Integralfunktion zu f(x)=1/x

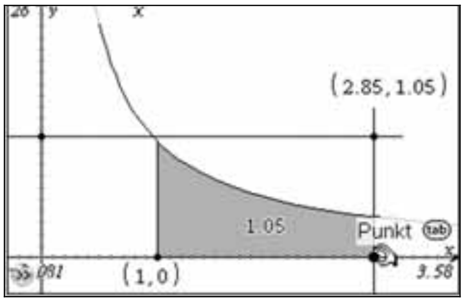
Zur Bearbeitung nutzen die Schülerinnen und Schüler ihr Vorwissen über Flächeninhalts- und Integralfunktionen.

Im Funktionseditor (der Applikation **Graphs**) wird f1(x) = 1/x eingegeben und der Graph nur im ersten Quadranten gezeigt (Koordinatenachsen ändern).



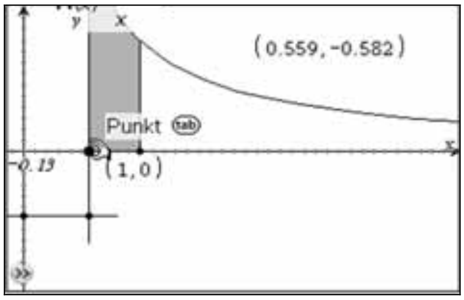
Dann wird der Flächeninhalt unter dem Graphen bestimmt (Funktionen integrieren, graphisch). Die untere Grenze genau auf 1 zu setzen, gelingt nur selten. Einfacher ist es, sich die Koordinaten des Punktes an der unteren Grenze anzeigen zu lassen und den x-Wert nachträglich zu korrigieren. Die obere Grenze ist frei wählbar – allerdings sollte man sie nicht auf einen Skalenstrich legen, da das die Variationsmöglichkeiten einschränkt.

Nun soll die Flächeninhaltsfunktion punktweise dargestellt werden. Dazu wird der gemessene Wert (hier im Bild: 1.05) mit Maßübertragung auf die y-Achse übertragen. Dann werden die Senkrechten zur y-Achse in dem gerade konstruierten Punkt und zur x-Achse durch die obere Grenze gezeichnet (Linien, besondere). Deren Schnittpunkt ist ein Punkt der Flächeninhaltsfunktion A. Seine Koordinaten werden angezeigt (Koordinaten bestimmen).



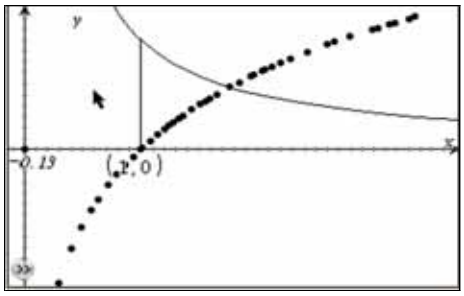
Bewegt man die obere Grenze mit der Greifhand, so erhält man durch die Bewegung des Punktes einen ersten Eindruck vom Verlauf des Graphen von A(x).

Die Flächeninhaltsfunktion ist nur für $x \geq 1$ definiert. Beim Experimentieren mit der oberen Grenze stellt man fest, dass der Graph von A sich weiter fortsetzen lässt, auch wenn die obere Grenze über die untere Grenze nach links hinweg geführt wird.



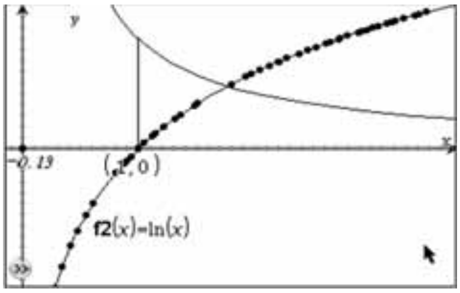
An dieser Stelle ist es möglich, von der erweiterten Funktion A zu sprechen oder aber auch den Begriff der Integralfunktion I_a zu benutzen, wobei a die untere Grenze angibt.

Der Weg des Punktes bei der Veränderung der oberen Grenze kann mit der Anweisung Geometriespur aufgezeichnet werden. Dazu bewegt man die obere Grenze von rechts bis fast zum Ursprung.



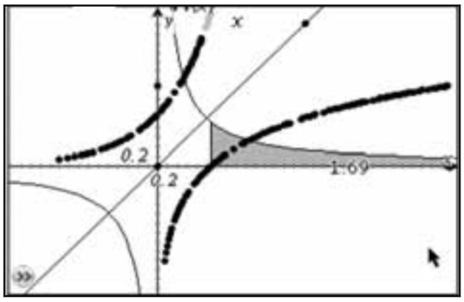
Zu der Spur sollen die Schülerinnen und Schüler jetzt eine Funktion finden, deren Graph durch die Punkte verläuft.

Schülerinnen und Schüler experimentieren hier erfahrungsgemäß mit Wurzelfunktionen sowie Potenzfunktionen und auch Logarithmusfunktionen (aber eher mit der Basis 10 als der Basis e).



Umkehrfunktion der Integralfunktion zu f(x) = 1/x

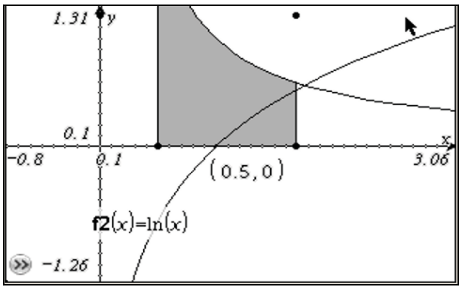
Die Winkelhalbierende muss als Gerade durch zwei Punkte gezeichnet werden, damit die Spiegelung durchgeführt werden kann. Sie darf nicht über den Funktionseditor eingegeben werden.



Mit dem Befehl Achsenspiegelung (Objekte spiegeln) wird der Bildpunkt P' zu P(x|A(x)) konstruiert, indem man auf die Spiegelachse und den Punkt P klickt.

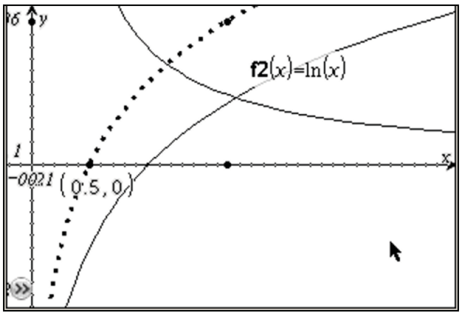
Dann wird die Geometriespur aufgerufen und nacheinander auf P und P‘ geklickt. Man zieht nun die obere Grenze entlang der x-Achse, um die Spur der Punkte beider Graphen zu zeichnen. Der Graph der Umkehrfunktion zeigt die typischen Eigenschaften einer Exponentialfunktion, deren Funktionsterm e^x man z. B. erkennen kann, wenn man zeigt, dass die Punkte (0|1) und (1|e) zu dem Graphen gehören.

Zusatzaufgabe: Der Einfluss der unteren Grenze



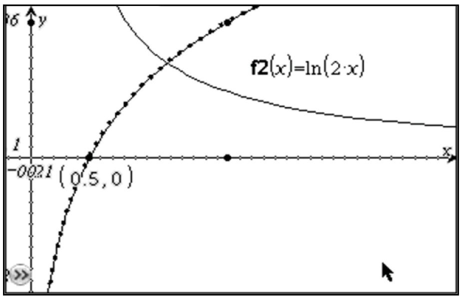
Die untere Grenze lässt sich am einfachsten einstellen, wenn man die Koordinaten (1 | 0) der bisherigen unteren Grenze zu (0.5 | 0) verändert.
Die obere Grenze sollte nun so eingestellt werden, dass der zugehörige Punkt (x | A(x)) sichtbar ist.

Man könnte auch bei dieser Aufgabe so vorgehen wie zuvor und den Graphen zu A(x) punktweise zeichnen lassen. Aufgrund der Vorerfahrungen bietet es sich jetzt aber an, den Graphen gleich durchzuzeichnen.



Dazu ruft man den Befehl Geometrischer Ort auf, klickt auf den Punkt (x | A(x)) und anschließend auf die obere Grenze: Es wird die Stammfunktion gezeichnet, die zu der unteren Grenze 0.5 gehört. Diese wurde hier „gepunktet" gezeichnet (Attribute).

Die neue Stammfunktion ist offensichtlich wieder eine Logarithmusfunktion. Die Funktionsgleichung kann man durch Verschieben des Graphen von f2(x) = ln (x) bestimmen.



Mit Hilfe der Greifhand kann der Graph von f2 genau auf den punktweise gezeichneten Graphen der neuen Stammfunktion gezogen werden. Man erkennt so, dass diese durch f2(x) = ln (2x) beschrieben wird.

Nun soll eine Tabelle für die untere Grenze und die zugehörigen Stammfunktion angelegt werden.

Untere Grenze a	Stammfunktion
1	ln(x)
0.5	ln(2x)
2	ln(0.5x)
0.25	ln(4x)
4	ln(0.25x)

Man erkennt an diesen Beispielen, dass zu der unteren Grenze a der Term der Integralfunktion ln (x/a) gehört. Somit gibt es zu der Funktion f mit f(x) = 1/x die Menge der Integralfunktionen I_a mit:

$$I_a(x) = \ln\left(\frac{x}{a}\right) = \ln(x) - \ln(a).$$

ln(a) gibt die Verschiebung des Graphen in y-Richtung an.

Die konventionelle algebraische Herleitung der Integralfunktion zu f(x) = 1/x ist sehr formal und wenig anschaulich. Mit dem hier vorgeschlagenen graphischen Verfahren können die Schülerinnen und Schüler die gesuchte Integralfunktion punktweise konstruieren und dann durch Experimentieren mit Funktionsgraphen beschreiben. Allerdings sind hierfür Werkzeugkompetenzen erforderlich, die zuvor vermittelt werden müssen (siehe "Hinweise zur Bearbeitung der Aufgabe" in der Kopiervorlage).

Nachdem die Lernenden den Graphen punktweise mit der Spurfunktion erzeugt haben, stellen sie fest, dass es eine Integralfunktion zu f(x) = 1/x gibt, obwohl die bisher hergeleiteten Beziehungen den Fall x^{-1} ausschließen. Bei der Suche nach passenden Funktionen kann mit Wurzelfunktionen, Potenzfunktionen und mit verschiedenen Logarithmusfunktionen experimentiert werden. Das zusätzliche Zeichnen der Umkehrfunktion hilft möglicherweise beim Auffinden einer Modellfunktion, da Logarithmenfunktionen im Wesentlichen als Umkehrfunktionen von Exponentialfunktionen bekannt sind.

Bei der Bearbeitung der Zusatzaufgabe erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass die Graphen, die für unterschiedliche untere Grenzen entstehen, sich nur durch eine vertikale Verschiebung voneinander unterscheiden. Die Konstanten können aus mehreren Beispielen ermittelt werden und der Term $I_a(x) = \ln(x) - \ln(a)$ für die Menge der Integralfunktionen zu f(x) = 1/x angegeben werden.

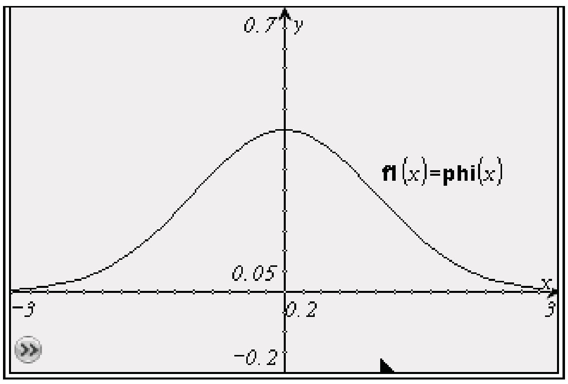
Die Konstruktion der Integralfunktionen durch die Option Geometriespur ist zu Beginn bewusst gewählt worden, weil damit durch die Schüleraktivität der Graph erst punktweise entsteht. Mit Geometrischer Ort wird der Graph sofort gezeichnet und damit geht ein Teil der Anschaulichkeit verloren. In der zweiten Aufgabe wird das Verfahren wiederholt angewendet, so dass der Einsatz von Geometrischer Ort sinnvoll erscheint.

Von der Binomial- zur Normalverteilung

Ursula Schmidt, Kamen

© Valentin Bartolomeu - Fotolia.com

Passt alles unter die Glockenkurve?



Steckbrief der Aufgabe

Sekundarstufe II
(Wahrscheinlichkeitsrechnung)
Dauer: 2-3 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler
- kennen Binomialverteilungen und können sie auf dem Rechner graphisch darstellen
- kennen Exponentialfunktionen zur Basis *e*

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- entdecken und beschreiben gemeinsame Eigenschaften von Binomialverteilungen zu unterschiedlichen Parametern
- modellieren Binomialverteilungen durch stetige Funktionen
- nutzen die Problemlösestrategie „Rückwärtsarbeiten“

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler
- lernen oder wiederholen die Methode „Standardisierung von Daten“
- erarbeiten sich die Approximation von Binomialverteilungen durch die Näherungsformel von de Moivre-Laplace
- nutzen die Normalverteilung zur näherungsweisen Berechnung von kumulierten Binomialverteilungen

Rolle der Technologie (TI-Nspire™ CAS mit Touchpad)
- Visualisieren der Verteilungen/der Glockenkurve
- Berechnen der Transformationen beim Standardisieren

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Graphisch: Vergleich der Histogramme mit der Glockenkurve
- Numerisch: Berechnungen der standardisierten Verteilung

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
- Gruppenarbeit (Gruppengröße ca. 6 Teilnehmer)
- evtl. auch Gruppenpuzzle

„Binomialverteilungen haben vieles gemeinsam“

Um vergleichen zu können, brauchen Sie unterschiedliche Verteilungen B(n;p).
Bilden Sie deshalb Gruppen mit etwa sechs Teilnehmern.
Jedes Gruppenmitglied (T1, …, T6) bearbeitet eine andere Verteilung. Jeweils zwei von Ihnen wählen das gleiche n, aber unterschiedliche p.

Sie können mit dem folgenden Vorschlag arbeiten, aber auch andere Zahlen wählen:
T1: B(60; 0.3) T2: B(60; 0.7)
T3: B(50; 0.4) T4: B(50; 0.7)
T5: B(30; 0.5) T6: B(30; 0.7).

1. Aufgabe: (Einzelarbeit oder (neue) Gruppen mit der gleichen Verteilung)
- Bestimmen Sie für Ihre Verteilung den Erwartungswert μ und die Varianz σ.
- Zeichnen Sie ein Histogramm Ihrer Verteilung (ggf. können Sie dafür eine vorbereitete Datei nutzen).
- Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallsvariable X (Treffer) Werte im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ annimmt.

2. Aufgabe: Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse jetzt in der Ausgangsgruppe (der mit den unterschiedlichen Verteilungen): Welche Gemeinsamkeiten sehen Sie?

3. Aufgabe: Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Warum heißt die Funktion wohl „gaußsche Glockenkurve“?
Welche Zusammenhänge sehen Sie zu der 1. und 2. Aufgabe?

4. Aufgabe:
Man kann versuchen, die Glockenkurve an die Binomialverteilung anzupassen oder auch umgekehrt. Da Sie alle mit verschiedenen Binomialverteilungen gestartet sind, versuchen Sie nun, Ihre Binomialverteilung „unter die Glocke“ zu bringen.
Überlegen Sie zunächst, wie Sie dabei vorgehen würden.

✂- -

4. Aufgabe (Hilfetipps)

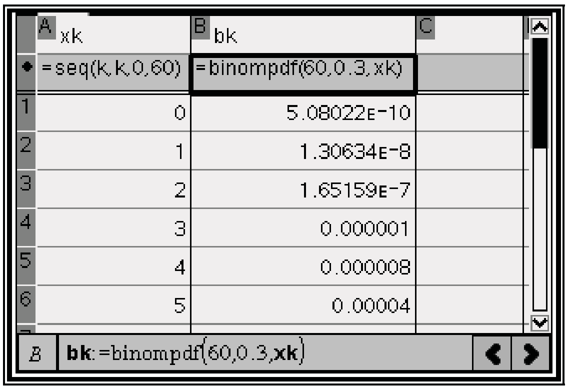
Das Verfahren nennen die Mathematiker **„Standardisierung der Binomialverteilung“**.
- Verschieben Sie Ihre Binomialverteilung um den Erwartungswert μ nach links. (Welchen Effekt hat das?)
- Transformieren Sie die Rechtsachse auf Vielfache der Standardabweichung (d. h. dividieren Sie alle Werte durch σ).
- Achtung! Im Histogramm wird die Wahrscheinlichkeit P(X = k) durch den Flächeninhalt der zugehörigen Säule dargestellt. Bei der letzten Transformation wird die Säulenbreite von 1 auf $1/\sigma$ reduziert. Was können Sie tun, um den Flächeninhalt zu erhalten?
- Vergleichen Sie das Ergebnis mit den anderen transformierten Binomialverteilungen aus Ihrer Gruppe.
- Zeichnen Sie die gaußsche Glockenkurve dazu.

5. Aufgabe: Berechnen Sie für die Binomialverteilung B(40; 0.25) die Wahrscheinlichkeit $P(6 \le X \le 12)$:
- einmal direkt mit den TI-NSpire Befehlen für Binomialverteilungen,
- einmal näherungsweise mithilfe der Gaußfunktion.

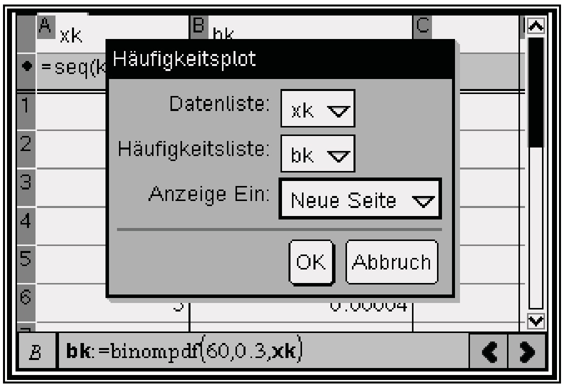
Wie erstellt man das Histogramm einer Binomialverteilung?

Wir zeigen dies am Beispiel n = 60, p = 0,3.

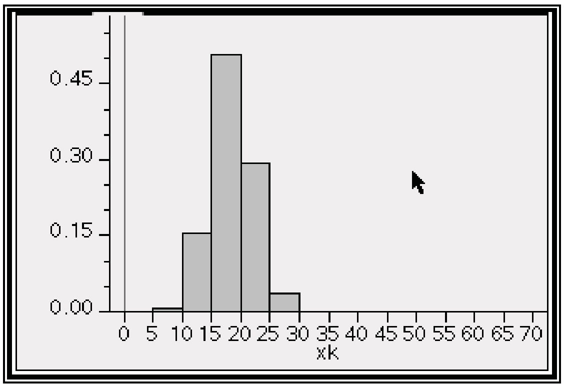
In **Lists & Spreadsheet** wird eine Tabelle der Binomialverteilung erstellt.



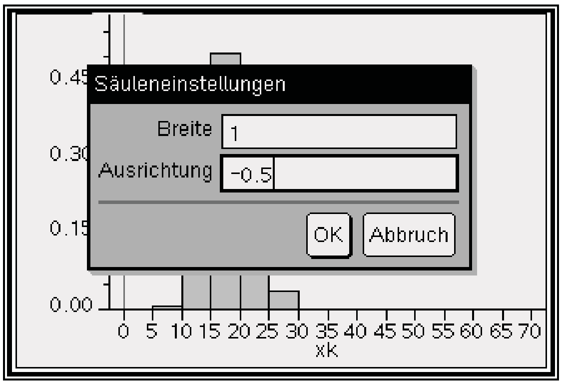
Zu der Wertetabelle wird ein *Häufigkeitsplot* (Histogramm) gezeichnet.



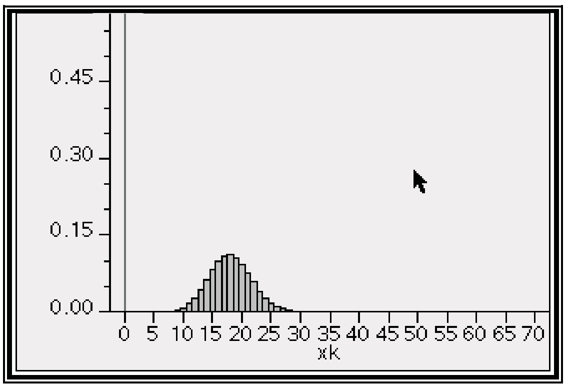
Der Rechner bildet dabei automatisch eigene Klasseneinteilungen, d. h. er fasst mehrere k-Werte zusammen:



Deshalb müssen noch in einem zweiten Schritt die *Histogramm-Eigenschaften* angepasst werden:



Breite = 1 bewirkt, dass für jedes k eine eigene Säule gezeichnet wird.
Ausrichtung = -0.5 bewirkt, dass die Säule symmetrisch um den k-Wert auf der Rechtsachse gezeichnet wird.



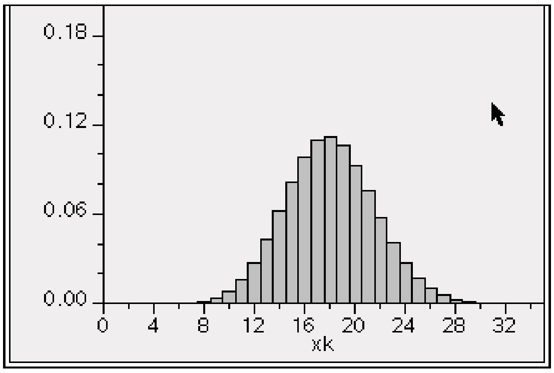
Jetzt sind nur noch die Fenstereinstellungen entsprechend der Größe des Histogramms vorzunehmen.

*Anmerkung: In einem Histogramm entspricht die Wahrscheinlichkeit für einen k-Bereich dem **Flächeninhalt** des zugehörigen Rechtecks. Nur wenn alle k-Bereiche gleich große Intervalle sind, sieht das Histogramm wie ein Säulendiagramm aus.*

Lösungen der 1. und 4. Aufgabe für zwei verschiedene n und p

n = 60, p = 0,3

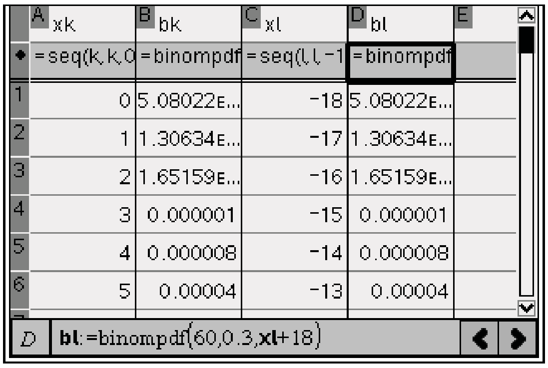
$\mu = np = 18$; $\sigma^2 = np \cdot (1 - p) = 12{,}6$; $\sigma \approx 3{,}55$



Wahrscheinlichkeit für ein 1σ-Intervall:
binomCdf(60, 0.3, 15, 21) = 0,676074

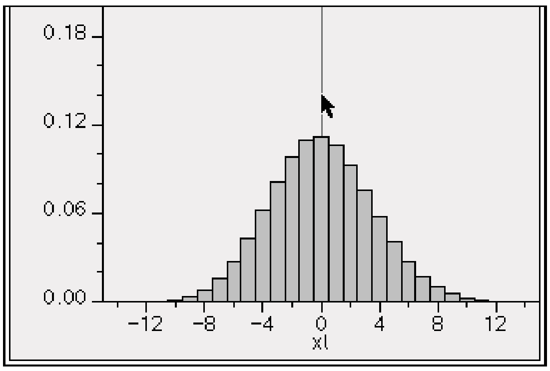
Standardisierung

1) Verschiebung um den Erwartungswert



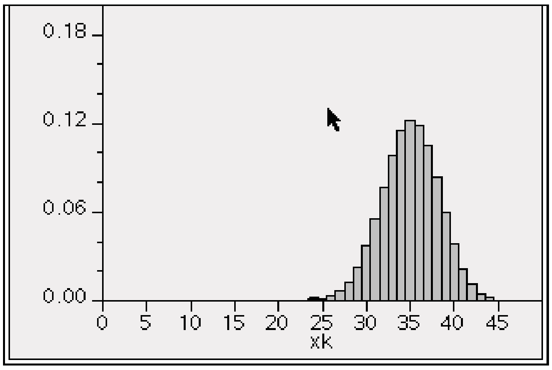
	A xk	B bk	C xl	D bl	E
♦	=seq(k,k,0	=binompdf	=seq(l,l,-1	=binompdf	
1	0	5.08022E...	-18	5.08022E...	
2	1	1.30634E...	-17	1.30634E...	
3	2	1.65159E...	-16	1.65159E...	
4	3	0.000001	-15	0.000001	
5	4	0.000008	-14	0.000008	
6	5	0.00004	-13	0.00004	

D **bl**:=binompdf(60,0.3,**xl**+18)



n = 50, p = 0,7

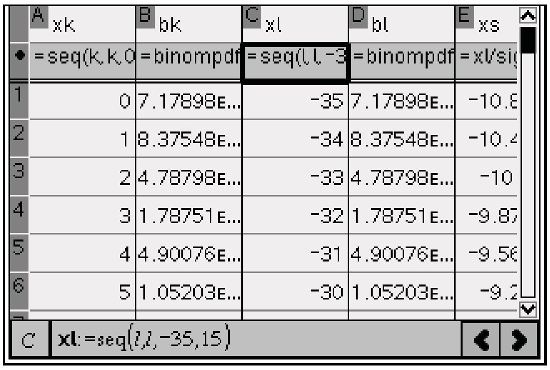
$\mu = np = 35$; $\sigma^2 = np \cdot (1 - p) = 10{,}5$; $\sigma \approx 3{,}24$



Wahrscheinlichkeit für ein 1σ-Intervall:
binomCdf(50, 0.7, 32, 38) = 0,720404

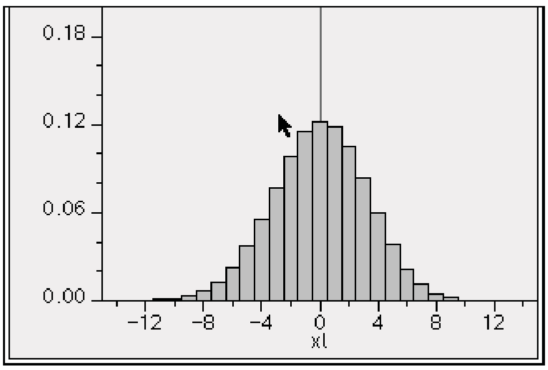
Standardisierung

1) Verschiebung um den Erwartungswert



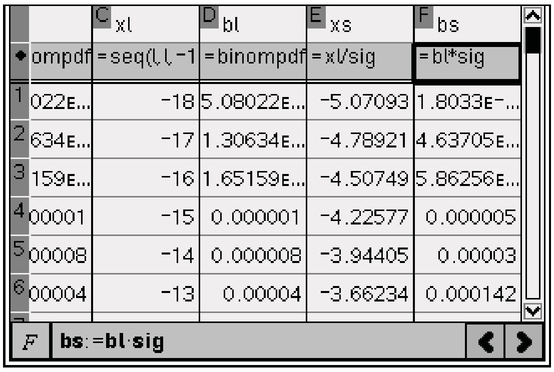
	A xk	B bk	C xl	D bl	E xs
♦	=seq(k,k,0	=binompdf	=seq(l,l,-3	=binompdf	=xl/sig
1	0	7.17898E...	-35	7.17898E...	-10.8
2	1	8.37548E...	-34	8.37548E...	-10.4
3	2	4.78798E...	-33	4.78798E...	-10
4	3	1.78751E...	-32	1.78751E...	-9.87
5	4	4.90076E...	-31	4.90076E...	-9.56
6	5	1.05203E...	-30	1.05203E...	-9.2

C **xl**:=seq(l,l,−35,15)



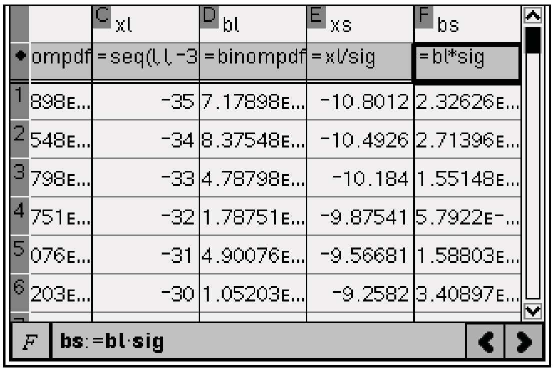
2) Transformation der Rechtsachse auf Vielfache von σ

alle xl- Werte werden durch σ (gespeichert als *sig*) dividiert, dadurch werden aber auch die Säulenbreiten auf 1/σ reduziert. Um den Flächeninhalt einer Säule zu erhalten, muss die Höhe mit σ multipliziert werden.



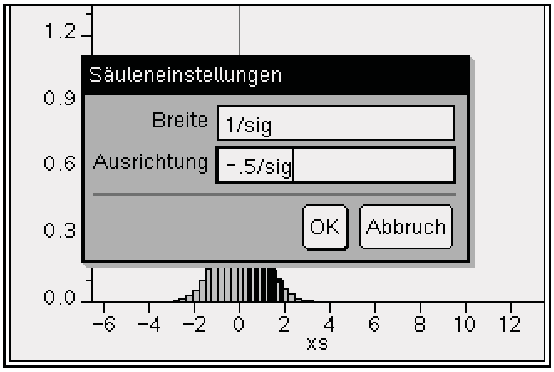
		C xl	D bl	E xs	F bs
◆	ompdf	=seq(l,l,-1	=binompdf	=xl/sig	=bl*sig
1	022E...	-18	5.08022E...	-5.07093	1.8033E-...
2	634E...	-17	1.30634E...	-4.78921	4.63705E...
3	159E...	-16	1.65159E...	-4.50749	5.86256E...
4	00001	-15	0.000001	-4.22577	0.000005
5	00008	-14	0.000008	-3.94405	0.00003
6	00004	-13	0.00004	-3.66234	0.000142

F bs:=bl·sig

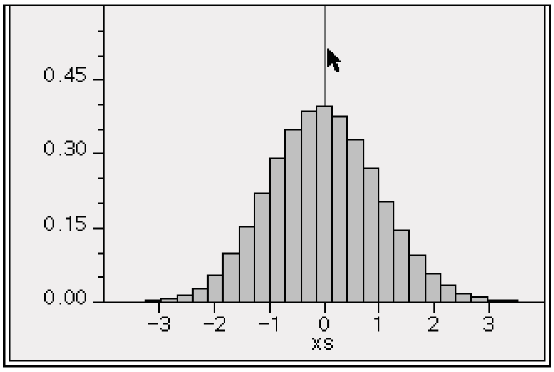


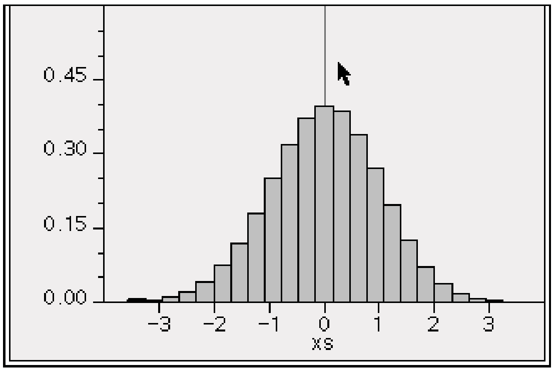
		C xl	D bl	E xs	F bs
◆	ompdf	=seq(l,l,-3	=binompdf	=xl/sig	=bl*sig
1	898E...	-35	7.17898E...	-10.8012	2.32626E...
2	548E...	-34	8.37548E...	-10.4926	2.71396E...
3	798E...	-33	4.78798E...	-10.184	1.55148E...
4	751E...	-32	1.78751E...	-9.87541	5.7922E-...
5	076E...	-31	4.90076E...	-9.56681	1.58803E...
6	203E...	-30	1.05203E...	-9.2582	3.40897E...

F bs:=bl·sig

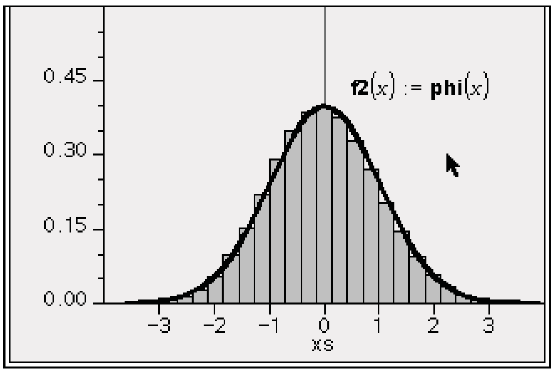


Die grafischen Darstellungen der beiden Binomialverteilungen unterscheiden sich praktisch nicht mehr.

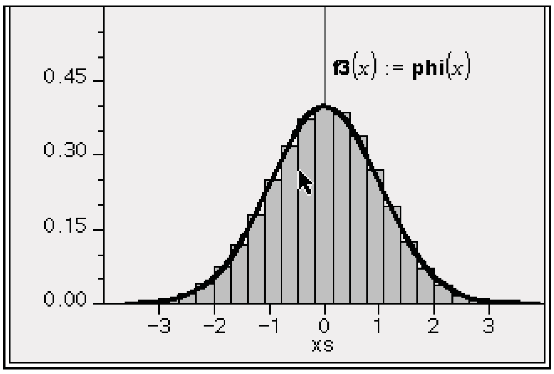




mit gaußscher Glockenkurve



mit gaußscher Glockenkurve



Ergebnis:
In beiden Fällen (und auch in den meisten anderen, die sich die Lernenden evtl. noch überlegt haben) wird das Histogramm der standardisierten Binomialverteilung gut durch die Fläche unter der Gaußkurve abgedeckt.

zu Aufgabe 5:
Berechnen Sie für die Binomialverteilung B(40; 0.25) die Wahrscheinlichkeit $P(6 \leq X \leq 12)$.

- Lösung durch direkte Eingabe im Calculator: binomCdf (40, 0.25,6,12) = 0,777592

- näherungsweise mithilfe der Gaußfunktion:

Wie oben wird die Binomialverteilung zunächst standardisiert. Der Erwartungswert ist hier $\mu = 40 \cdot 0.25 = 10$ und für die Standardabweichung gilt: $\sigma^2 = \mu\ (1 - p) = 10 \cdot 0.75 = 7.5$, also $\sigma \approx 2.73861$.

Die Werte 6 und 12 der Zufallsvariablen X werden transformiert in die Werte der standardisierten Zufallsvariablen $X^* = (X - \mu)/\sigma$:

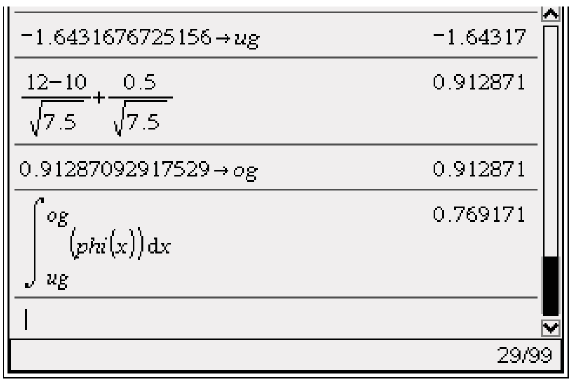
$$6^* = (6 - 10) / 2.73861 \approx -1.46059 \text{ und}$$

$$12^* = (12 - 10) / 2.73861 \approx 0.730297$$

In der ursprünglichen Verteilung entspricht die Wahrscheinlichkeit P(X = k) dem Flächeninhalt der Säule bei k. Durch die Standardisierung wird diese Säule verschoben, in x-Richtung gestaucht und in y-Richtung gestreckt (um den Flächeninhalt zu erhalten).

Die **Summation** über die Flächeninhalte der 6*-, 7*- …, 12*-Säulen kann jetzt ersetzt werden durch eine **Integration der Gaußfunktion**. Wenn man es genau nimmt, sind die Integrationsgrenzen aber nicht $6^* \approx -1.46059$ und $12^* \approx 0.730297$, sondern man muss den unteren Rand der 6*-Säule und den oberen Rand der 12*-Säule wählen.

In der Regel werden die Säulen symmetrisch um die k- bzw. k*-Werte gezeichnet.
Da die Breite der transformierten Säulen $1/\sigma$ beträgt, muss man von 6* noch $0,5/\sigma$ subtrahieren (ergibt -1.64317) und zu 12* noch $0,5/\sigma$ addieren (ergibt 0.912871). Die Gaußfunktion wird dann zwischen diesen beiden Grenzen integriert (integrieren algebraisch):



Die Aufgabe führt an einem konkreten Beispiel direkt von der Binomialverteilung zur Näherungsformel von de Moivre-Laplace. Wichtig ist dabei, dass sich der Flächeninhalt eines Rechtecks des Histogramms unter den Transformationen nicht ändern darf, da auch die zugehörige Wahrscheinlichkeit gleich bleibt.

Es wird davon ausgegangen, dass die Schülerinnen und Schüler das Erstellen von Histogrammen in der Regel schon im vorhergehenden Unterricht über Binomialverteilungen erlernt haben. Ggf. ist zu wiederholen, dass die Säuleneinstellungen nachkorrigiert werden müssen.

Die Tatsache, dass die Standardisierung (fast) alle Binomialverteilungen unter die Glockenkurve bringt, ist für die Schülerinnen und Schüler überraschend. Deshalb sollte man auch mit möglichst vielen verschiedenen Binomialverteilungen parallel arbeiten.

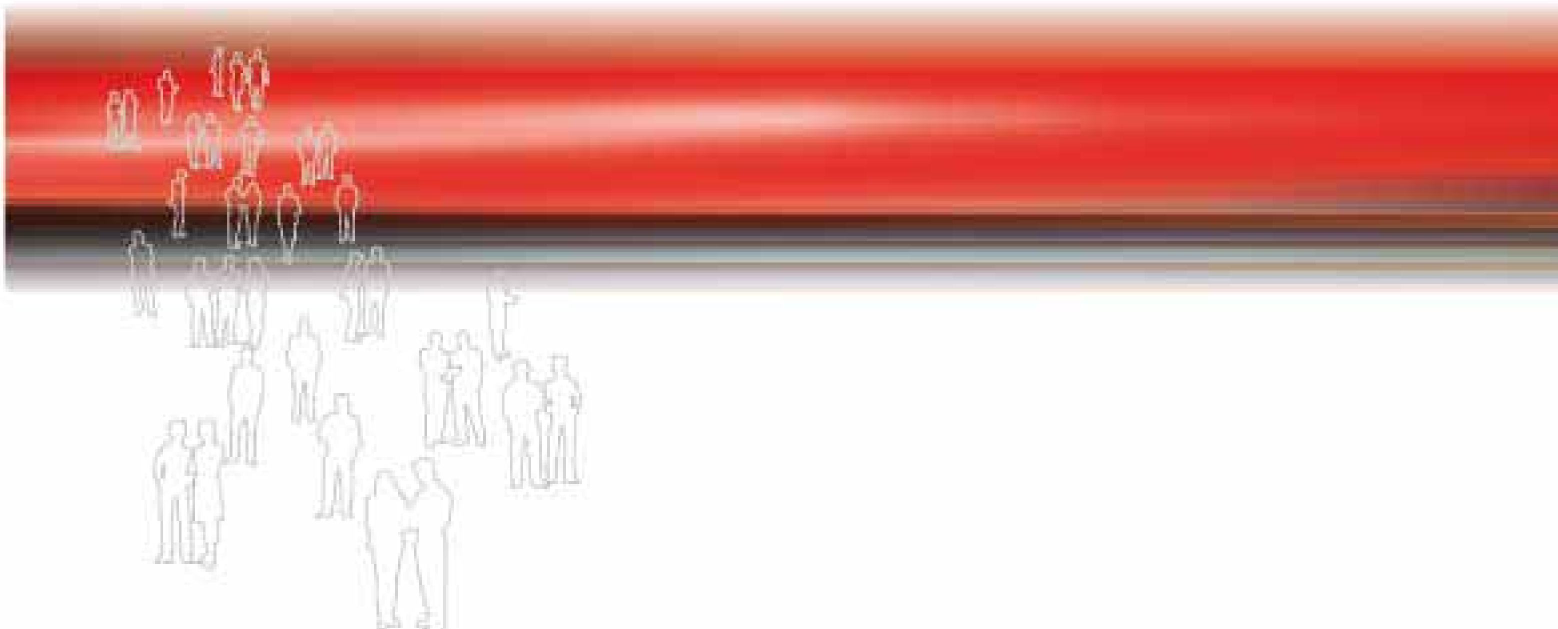
Unterrichtsmethodisch bieten sich hier kooperative Lernarrangements an, in denen jeder seinen Teil zu diesem gemeinsamen Erlebnis beitragen kann. Gut geeignet ist ein Gruppenpuzzle: Die Expertengruppen von 2-3 Lernenden arbeiten jeweils mit der gleichen Binomialverteilung und können sich so im Prozess der Standardisierung gegenseitig unterstützen. Der Vergleich der unterschiedlichen Verteilungen erfolgt dann in den größeren Stammgruppen.

Im Anschluss zur 5. Aufgabe kann das Vorgehen verallgemeinert und so die Näherungsformel von de Moivre-Laplace formuliert werden. Daran anknüpfend kann die Normalverteilung definiert werden.

Über die in der Integralrechnung erarbeitete Methode, Summen durch Integrale anzunähern, gewinnt man hier in der Stochastik mit der Normalverteilung ein neues Modell, das sich über (fast) alle Binomialverteilungen stülpen lässt.

Die Lernenden sollten noch die Parameter von Aufgabe 5 variieren, um herauszufinden, in welchen Fällen die Näherung gut und in welchen sie weniger gut ist.

Hinweis:
Hilfen, um Binomialverteilungen mit Data & Statistics darzustellen, erhalten Sie hier:
Minute-Made-Math von Hubert Langlotz und Wilfried Zappe:
http://www.ti-unterrichtsmaterialien.net/index.php?id=1&detail=944



T³-AKZENTE

Integralrechnung mit neuen Medien verstehensorientiert unterrichten

T³ Deutschland
T³ Österreich
T³ Schweiz

www.t3deutschland.de
www.t3oesterreich.at
www.t3schweiz.ch

Texas Instruments

education.ti.com/deutschland
education.ti.com/oesterreich
education.ti.com/schweiz

Weitere Materialien finden Sie unter:
www.ti-unterrichtsmaterialien.net

ISBN 978-3-86877-15-5