

TI-Nachrichten

Ausgabe 1/10

Inhaltsverzeichnis

Dr. A. Pallack:

Wie definiert man Armutsgefährdung 1

G. Heitmeyer:

Einführung in die Analysis 5

Dr. K.-H. Keunecke, A. Reiß:

Modellierung durch Funktionsanpassung –
Regression oder Schieberegler? 11

R. D. P. Paust:

Das Geburtstagsproblem 16

Prof. Dr. P. Bützer:

Unsere Empfindungen sind logarithmisch 17

A. P. Barth:

Die Leiden des jungen Käfers 22

Dr. A. Roulier:

Mathematische Experimente in der Optik 24

W. Moldenhauer, W. Zappe:

Ortskurven 27

E. Bichler, Prof. Dr. H.-G. Weigand:

Der Modellversuch
„M³ - Medienintegration im Mathematikunterricht“
an bayerischen Gymnasien 32



Wie definiert man Armutsgefährdung?

Dr. Andreas Pallack



Die Europäische Union hat zusammen mit Norwegen und Island 2010 als Jahr gegen Armut und soziale Ausgrenzung ausgerufen. Der offizielle Startschuss für Deutschland fiel im Februar 2010 in Berlin.

Das Thema Armut ist nicht nur deswegen zurzeit in den Medien sehr präsent. Dabei wird mit Zahlen jongliert, die für den Laien kaum verständlich oder auf die eigene Person bezogen werden können: „Wer weniger als 856 € monatlich zur Verfügung hat gilt als Armutsgefährdet!“ Bedeutet das auch, dass ein Ehepaar mit 3 jungen Kindern bei einem Monatseinkommen von rund 4000 € ebenfalls armutsgefährdet ist?

Zur Berechnung des zu Grunde gelegten Einkommens sowie der Armutsgrenze werden Konventionen angewendet, die sich nur mittelbar erschließen. Die Auseinandersetzung mit diesen Konventionen liefert mathemathikhaltige Fragestellungen für den Unterricht in der Sekundarstufe I, von denen einige in diesem Beitrag vorgestellt werden.

Wie berechnet man einen fairen Einkommens-Kennwert?

Die folgenden Ausführungen skizzieren ein mögliches Vorgehen im Unterricht, das die Schülerinnen und Schüler für die generelle Problematik personenbezogener Kennwerte sensibilisiert.

Wie definiert man Armutsgefährdung?

Dr. Andreas Pallack

Frau Ritschke ist alleinstehend und verdient monatlich rund 2.500 €. Frau und Herr Kilian leben zusammen mit ihrem 3-jährigen Sohn Martin in einem Haushalt. Arbeiten geht nur Frau Kilian; sie verdient monatlich rund 4.500 €. Die beiden Haushalte sollen miteinander verglichen werden. Wer kann sich einen höheren Lebensstandard erlauben – wie könnte man einen fairen, personenbezogenen Einkommens-Kennwert berechnen?

Im Schnitt steht jedem Mitglied von Familie Kilian 1.500 € zur Verfügung. Das ist weniger als Frau Ritschke einnimmt. Trotzdem kann der Lebensstandard von Familie Kilian besser sein: Während Frau Ritschke eine eigene Wohnung hat, teilt sich Familie Kilian eine Wohnung, was in der Regel pro Person günstiger ist. Den Schülerinnen und Schülern werden schnell weitere Synergien von Gemeinschaftshaushalten auffallen, die in einer Berechnung berücksichtigt werden müssten. Das Durchschnittseinkommen allein ist deswegen ein schlechter Kennwert.

Bei der Berechnung von Haushaltseinkommen – sogenannten Äquivalenzeinkommen, die zum Vergleich genutzt werden – wird tatsächlich auch anders vorgegangen: Nach der aktuellen OECD-Skala geht der Hauptbezieher des Einkommens mit dem Faktor 1,0 in die Gewichtung ein, alle anderen Mitglieder der Bedarfsgemeinschaft über 14 Jahre mit 0,5 und alle anderen mit 0,3.

Für Familie Kilian ergibt sich entsprechend ein Faktor von $1+0,5+0,3=1,8$. Das zugehörige Äquivalenzeinkommen beträgt damit $4.500 € : 1,8 = 2.500 €$. Gemäß dieses Modells wären die beiden Haushalte bezüglich ihres Einkommens gut miteinander vergleichbar.

Um zu verstehen, wie sich der Faktor zur Berechnung des Äquivalenzeinkommens auswirkt, sollten Schülerinnen und Schüler Gelegenheit erhalten mit den Werten zu spielen. Das kann man

Zeichenerklärung:



Computeralgebrasystem
TI-89, TI-89 Titanium, TI-92 Plus,
Voyage™ 200



Graphische Taschenrechner
TI-82 STATS, TI-83, TI-83 Plus, TI-83 Plus Silver
Edition, TI-84 Plus, TI-84 Plus Silver Edition



Messwerterfassungssystem
CBL™, CBL 2™, CBR 2™



PC Software – Derive™, TI InterActive!™,
Cabri Geometry II™, TI-Navigator™



TI-Nspire™ (mit Touchpad), TI-Nspire™ Software, TI-Nspire™ Lehrer-Software
TI-Nspire™ CAS (mit Touchpad), TI-Nspire™ CAS Software, TI-Nspire™ CAS Lehrer-Software

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

gegenwärtig beobachten wir einen Wettbewerb der unterschiedlichsten Technologien um ihren Platz im Klassenzimmer. Das Schülernotebook scheint aller Bemühungen zum Trotz entweder noch nicht gefunden oder nicht zu existieren. Es stellt sich die Frage, ob die Entwicklung auf das eine universelle elektronische Endgerät in der Hand der Schülerinnen und Schüler hinauslaufen wird, sei es Notebook, Netbook, SmartPhone, eBook oder ob sich auf bestimmte Fachgebiete oder Einsatzszenarien optimierte Medien wie elektronische Wörterbücher, mathematische Taschencomputer bzw. deren jeweilige Weiterentwicklungen durchsetzen werden. Wir sind der Überzeugung, dass die Zukunft den fachoptimierten Lösungen gehört.

Die Befürworter eines universell für alle Fächer einsetzbaren Endgeräts plädieren für Geräte, die der Schüler ohnehin aus seinem Alltag kennt und sie entsprechend nutzt, wie den Computer oder das Mobiltelefon. Man spricht viel über die Werkzeugkiste, zuwenig jedoch über die Werkzeuge selbst und deren Zusammenspiel. Spezialwerkzeuge werden gern als fachspezifische Insellösung abgetan. Chancen einer Spezialisierung und Differenzierung in einem Fachgebiet scheinen mitunter unerwünscht. Nicht selten wird derart engagierten Lehrern von Seiten der Kollegen die Innensicht aus dem lebensfernen Elfenbeinturm unterstellt.

Doch das ist falsch. Werkzeugkompetenz bei Schülerinnen und Schülern muss mehr sein, als mit einer Suchmaschine im Internet umgehen zu können oder spezielle Apps zu bestimmten Zwecken herunterzuladen. Werkzeugkompetenz heißt eben auch, sich für ein angemessenes Werkzeug zwischen Alternativen begründet entscheiden zu können. Und das setzt voraus, sich in einem Fachgebiet versiert zu bewegen.

Fachoptimierte Werkzeuge integrieren fachspezifische Anforderungen hinsichtlich Ausstattung, unterrichtlichen Einsatzszenarien und Prüfungsanforderungen. Sie sind eingebettet in ein Unterstützungsangebot wie Unterrichtsmaterial und Lehrerfortbildung. Damit wird Lernerfolg nachweislich erreicht, wie wir aus zahlreichen Studien wissen. Aus diesen Gründen werden diese Werkzeuge einen breiten Raum im Klassenzimmer der Zukunft einnehmen.*

Lassen Sie sich in dieser Ausgabe der TI-Nachrichten für Ihren eigenen Unterricht inspirieren.

Ihr TI-Team

*Kurzfassung Artikel: S. Griebel „Fachoptimierte Werkzeuge als Technologie im Klassenzimmer der Zukunft“. Download unter: www.ti-unterrichtsmaterialien.net.

Wie definiert man Armutsgefährdung?

Dr. Andreas Pallack

z. B. mit Interactive-Notes realisieren, das in der Version TI-Nspire™ CAS 2.0 enthalten ist.

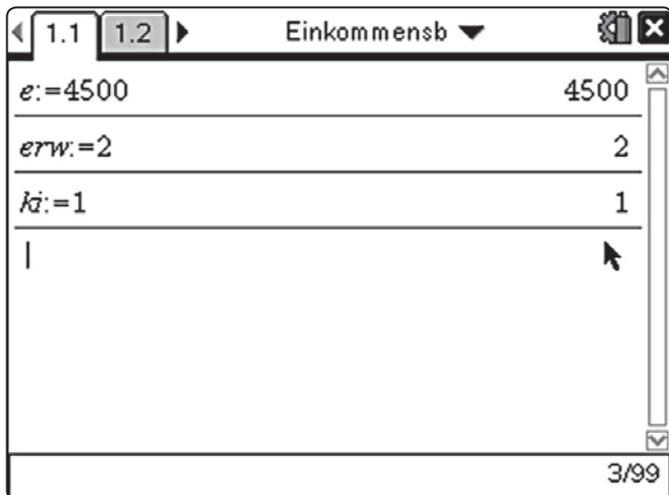


Abb. 1

Im ersten Schritt werden im Calculator die notwendigen Variablen definiert.

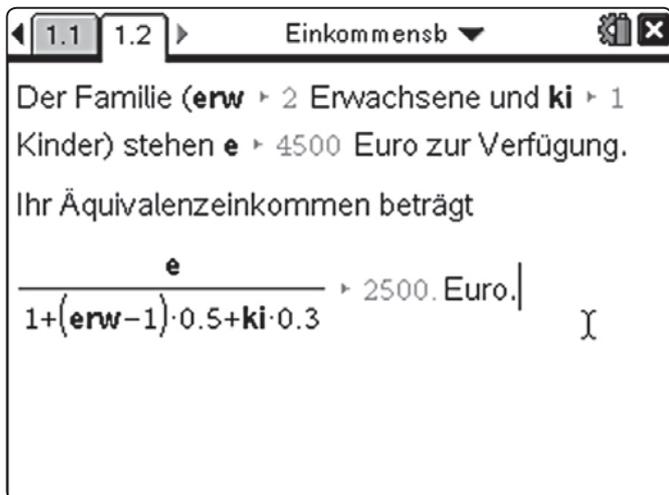


Abb. 2

In der Applikation Notes wird der Kennwert berechnet. Im Unterricht bietet es sich an, die Schülerinnen und Schüler selbst die Formel finden zu lassen. Das fällt – erfahrungsgemäß – auch Schülerinnen und Schülern der höheren Klassen nicht besonders leicht. Werden nun die Werte der Variablen verändert, wird auch die Rechnung angepasst. Diese Realisation ist „zum Spielen“ jedoch nur mäßig geeignet. Besonders gut geeignet erscheint mir die folgende Lösung:

Informieren Sie sich auf den TI-Webseiten über Unterstützungsprogramme zur Abfederung sozialer Härtefälle oder schreiben Sie eine E-Mail an das TI-Schulberater-Team: schulberater-team@ti.com.

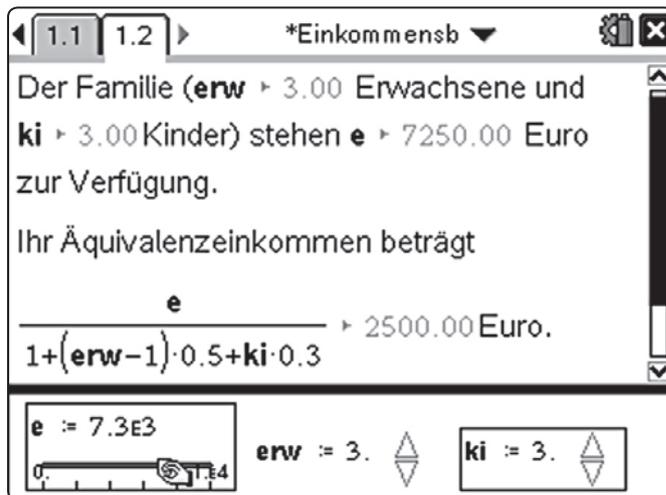


Abb. 3

Das Fenster wird geteilt und die Applikation Graphs eingefügt. Hier können Schieberegler erstellt und mit den Variablen belegt werden. So lassen sich die Werte leicht verändern. Der Screenshot in Abb.3 zeigt eine Rechnung für eine 6-köpfige Familie (z. B. Großvater, Mutter, Vater und 3 Kinder unter 14). Hier ergibt sich der Faktor:

$$1 + 0,5 + 0,5 + 0,3 + 0,3 + 0,3 = 2,9$$

Auch dieser Haushalt wäre entsprechend vergleichbar mit unseren beiden Musterhaushalten. Eine mögliche interessante Fragestellung wäre nun, wie viel man denn mehr verdienen müsste, wenn eine Familie Zuwachs bekommt, um den Standard zu halten (immer unter der Annahme, dass das gewählte OECD-Modell gültig ist).

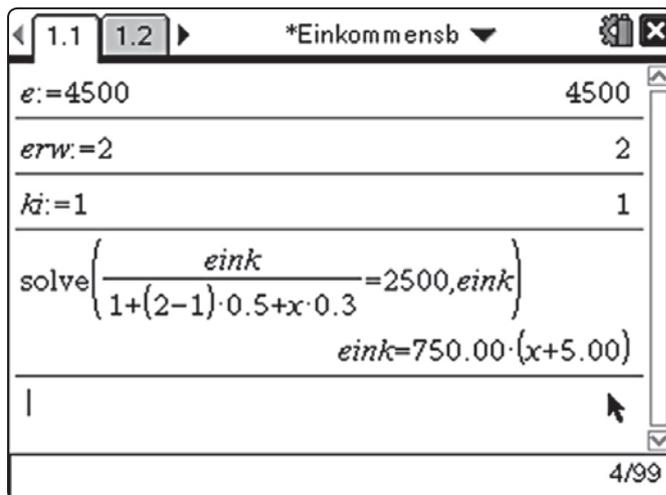


Abb. 4

In der hier dargestellten Überlegung wurde von einer Familie mit 2 Erwachsenen und x Kindern unter 14 Jahren ausgegangen, deren Äquivalenzeinkommen ebenfalls 2.500 € beträgt. Löst man die entwickelte Gleichung nach dem Einkommen auf ergibt sich eine lineare Abhängigkeit bzgl. der Anzahl der Kinder. Nach diesem Modell müsste man für den Standarderhalt

Dr. Andreas Pallack

für jedes weitere Kind sein Einkommen um 750 € steigern, wenn man zu zweit 3750 € verdient.

Wie jedes Modell lässt sich auch dieses ad absurdum führen. Eine gute Gelegenheit zur Modellkritik, die bei dem vorgestellten Verfahren auch gut im Internet recherchiert werden kann.

Armutsgefährdung definieren

Die zurzeit gültige Definition ist, dass die Personen eines Haushaltes, der über weniger als 60 % des mittleren (also des Median) Äquivalenzeinkommens verfügt, armutsgefährdet sind.

Diese Definition so einfach mitzuteilen nimmt den Schülerinnen und Schülern jedoch Lernchancen. In der Presse wird immer wieder von 60 % des Durchschnittseinkommens gesprochen, was einerseits auf eine falsche Fährte führt, andererseits aber Lernchancen beinhaltet. Im Folgenden wird – um die Darstellung übersichtlich zu halten – von der o.g. Definition ausgegangen.

Gute unterrichtliche Erfahrungen habe ich mit dem folgenden kleinen Experiment gemacht: Man druckt (oder schreibt) verschiedene Monatseinkommen auf rund 200 Zettel und lässt die Schülerinnen und Schüler dann jeweils einen Zettel ziehen. Die Idee ist, dass jeder die Person eines Haushalts mit dem entsprechenden Äquivalenzeinkommen repräsentiert und die Klasse eine abgeschlossene Gemeinschaft bildet.

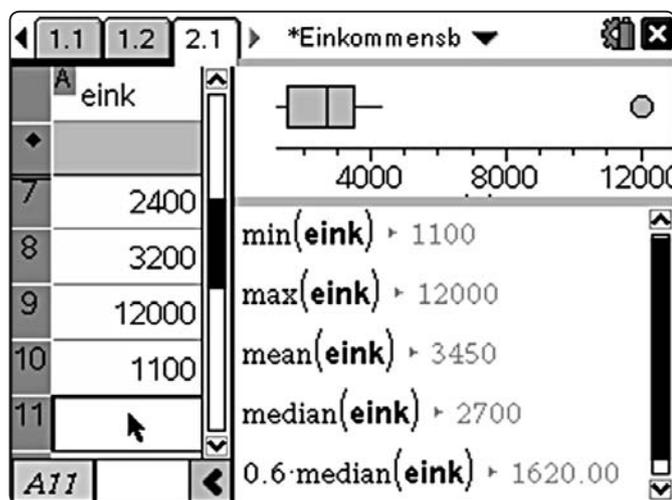


Abb. 5

Die gezogenen Werte werden in einer Tabellenkalkulation erfasst. In Abb. 5 ist eine Lösung dargestellt, bei der die wachsende Urmenge direkt bei der Eingabe mit Hilfe eines Boxplots visualisiert wird. Dieses Bild wird mit jedem Wert ruhiger. Im unteren Fenster werden in Notes Kennwerte berechnet. Wie man hier sieht gibt es unter den Daten einen Ausreißer mit einem Einkommen von 12.000 €. Median und Mittelwert weichen deswegen voneinander ab. Hat man nur wenige solcher hohen Einkommen in der Ziehung wird sich mit Blick auf eine Klasse Median und Mittelwert angleichen. Egal ob man vom

Mittelwert oder vom Median ausgeht: Ein Teil (<50 %) der Klasse wird in dieser Simulation als armutsgefährdet eingestuft.

Nun teilt man mit, dass ein Top-Verdiener zu der Gruppe stößt (Monatseinkommen 10.000.000 € - das ist ungefähr die Größenordnung von Tiger Woods aber weit entfernt von Bill Gates).

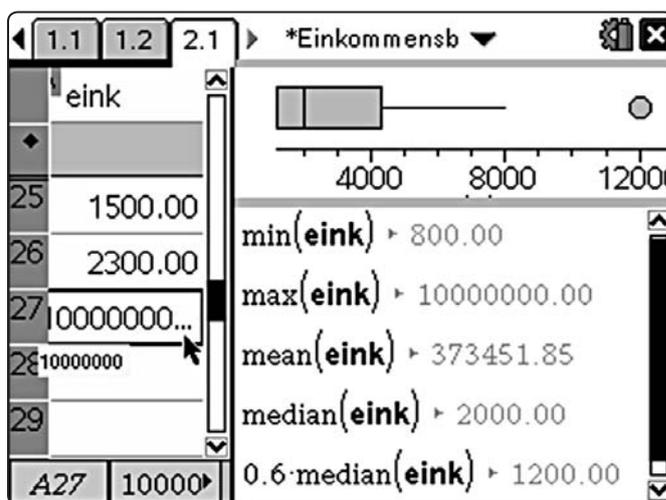


Abb. 6

Mit einem Schlag wäre die gesamte Klasse armutsgefährdet, wenn man den Mittelwert zu Grund legen würde. Der Median bleibt auch bei diesem extremen Ausreißer recht stabil.

Verstehen, über was in der Politik diskutiert wird

Das Goethe-Institut schreibt: „Aber was heißt überhaupt arm? Die amtliche Definition erfasst alle Deutschen, die mit weniger als 60 Prozent des mittleren Nettoeinkommens der Gesamtbevölkerung auskommen müssen. Gemeint ist nicht das durchschnittliche Nettoeinkommen; das mittlere beruht auf einer komplizierten Berechnung. Die Tücken der Statistik zeigt ein Beispiel: Wenn Bill Gates und 50 weitere Milliardäre nach Deutschland einwandern, steigt das durchschnittliche Nettoeinkommen und es werden statistisch mehr Deutsche arm – obwohl sie genauso viel Geld haben wie vorher und sich genauso viel davon kaufen können.“

(<http://www.goethe.de/ges/soz/soz/de3596205.htm>)

Diese und ähnliche Argumente findet man in zahlreichen Internetforen. Sich davon nicht mitreißen zu lassen, sondern die Definition zu recherchieren, zu verstehen und so zu wissen, über was in der Politik diskutiert wird ist ein erstrebenswertes Resultat des Unterrichts, um Schülerinnen und Schüler auf ihr mündiges Leben in einer komplexen Gesellschaft vorzubereiten.

Autor:

Dr. Andreas Pallack, Soest (D)
andreas@pallack.de

Einführung in die Analysis

Günter Heitmeyer



Vorbemerkung

Mit der Reduzierung der Schulzeit auf 12 Jahre bis zum Abitur kommt der Klassenstufe 10 eine zentrale Stellung zwischen Mittel- und Oberstufe zu. Das verlangt, insbesondere in der Analysis, eine Konzentration auf die Kernideen.

Ein Zugang kann Schülerinnen und Schülern über die mittlere und lokale Änderungsrate eröffnet werden, wie bspw. im niedersächsischen Kerncurriculum vorgegeben. Aus der Beschreibung und Interpretation mittlerer Änderungsraten und Sekantensteigungen in funktionalen Zusammenhängen erwächst ein Verständnis zentraler Zusammenhänge.

Bevor im Unterricht mit Änderungsraten bei Funktionen mit zusammenhängendem Definitionsbereich und gegebener Funktionsgleichung gearbeitet wird, sollte man sich vorher mit diskreten Messreihen, die zu Listen zusammengefasst werden, befassen. Zum Beispiel lässt sich dabei der Begriff der durchschnittlichen Änderungsrate (z.B. als Durchschnittsgeschwindigkeit) erarbeiten. Eine Anpassung der Messdaten an einen konkreten Funktionstyp (bspw. mittels Regression) könnte dann als Überleitung auf die nachfolgend beschriebenen Problemstellungen dienen.

Approximation von Ableitungen durch Sekantensteigungsfunktionen

(1) Die Änderungsratenfunktion zu einer gegebenen Funktionsgleichung soll in Abhängigkeit von der Schrittweite h ermittelt werden. Durch Wahl „kleiner“ Werte für h wird ein Verständnis für die Ableitungsfunktion vorbereitet.

(2) Zusammenhänge zwischen den Grafen der Änderungsratenfunktion und der gegebenen Ausgangsfunktion können schon erkannt werden, wenn h „sehr klein“ gewählt wird.

Aufgabenstellung

Die Flughöhe eines Flugkörpers werde in Abhängigkeit von der Zeit beschrieben durch die Funktionsgleichung ($f(t)$ in km, t in Minuten):

$$f(t) = \frac{1}{640}t^3 - \frac{15}{320}t^2 + \frac{3}{10}t + \frac{43}{20} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 30$$

- Stelle die Funktion grafisch dar.
- Bestimme die Änderungsratenfunktion mit einer variablen Zeitspanne h für die zu bestimmenden Änderungsraten. Vergleiche den zugehörigen Grafen für $h=0,01$ mit dem aus Teil a) und beschreibe die Zusammenhänge.
- Ermittle tabellarisch Werte für die Änderungsratenfunktion in Abhängigkeit von h . Die t -Werte in der Tabelle sollen einen Abstand von 0,5 Einheiten haben. Bestimme aus diesen Werten für $h = 0,01$ durch geeignete Regression eine Näherung und vergleiche das Ergebnis mit der gegebenen Funktionsgleichung.

Weiterer möglicher Zusatz

- Versuche am Beispiel der gegebenen Funktion Zusammenhänge darzustellen zwischen den Sekantensteigungen (durchschnittliche Änderungsraten) und den Tangentensteigungen (lokale Änderungsraten).

Verwendung des TI-Nspire™ mit und ohne CAS

Der TI-Nspire™ bietet die Möglichkeit, innerhalb eines Dokumentes Probleme als Ganzes abzuspeichern. Terme und Funktionen können auf einer „Calculator“ Seite dargestellt werden, dazu kommt eine Grafikseite und ein Tabellenblatt, eventuell noch eine Textseite für Aufgabenstellungen und Hinweise. Namen von Variablen gelten im Regelfall nur lokal innerhalb eines Problems. Lösungen gehen bei geschickter Dokumentenstruktur nicht verloren, erarbeitete Lösungen lassen sich nachträglich erweitern. Die Dokumente können auch mit der entsprechenden TI-Nspire™ Computerversion als Ganzes bearbeitet und gespeichert werden. Die hier gegebenen Lösungshinweise berücksichtigen diese Organisationsstruktur.

Das nachfolgende Beispiel ist auch mit der „NON CAS“ Version des TI-Nspire™ zu bearbeiten, es fehlt dann allerdings die algebraische Darstellung der Ableitungs- und Sekantensteigungsfunktionen, die sich aber durch die entsprechenden numerischen Befehle ersetzen lassen. Terme und Funktionen mit mehreren Parametern sind auch bei den TI-Nspire™ Grafikrechnern definierbar und können für konkrete Werte aufgerufen werden. Damit sind sie über Tabellen zu bearbeiten („variabel“ zu tabellieren).

Lösungshinweise zu Teil a) und b)

The screenshot shows a TI-Nspire™ interface with a 'Notes' page. At the top, there are navigation buttons for pages 2.2, 2.3, 2.4, and 3.1. The current page is titled 'BOG APPRX REELL'. The main text reads: 'Die Flughöhe eines Flugkörpers werde beschrieben in Abhängigkeit von der Zeit durch die folgende Funktionsgleichung:'. Below this, the function equation is displayed: $f(t) = \frac{1}{640}t^3 - \frac{15}{320}t^2 + \frac{3}{10}t + \frac{43}{20}$ for $0 \leq t \leq 30$. Underneath the equation, it says 'f in km, t in Minuten'. At the bottom of the page, the instruction 'a) Stelle die Funktion grafisch dar.' is visible.

Abb.1: „Notes“ Seite mit der Aufgabenstellung (ggf. kopiert aus der Textverarbeitung)

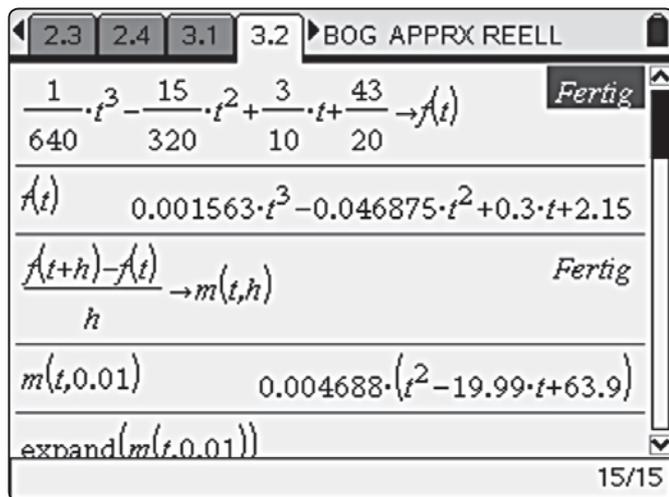


Abb. 2: „Calculator“ Seite mit ersten Ansätzen

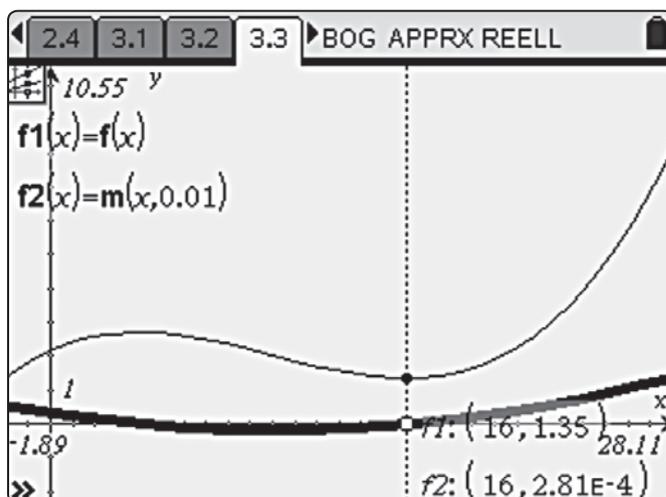


Abb. 4

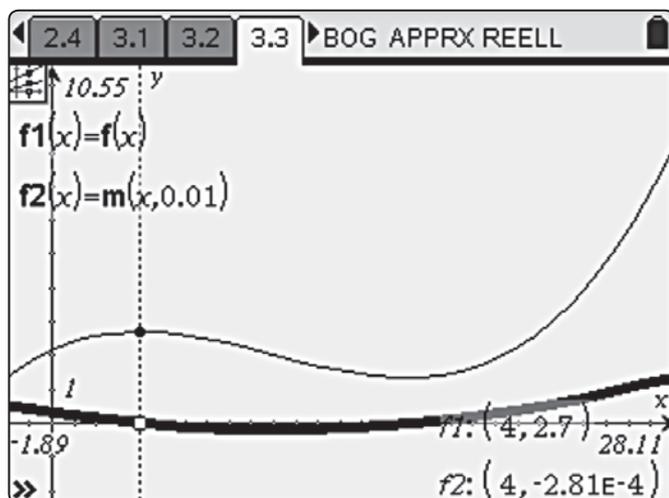


Abb. 3: Grafikseite im Spurmodus „simultan“

Die Extremstellen (hier zum Hoch- und Tiefpunkt) liegen in der Nähe der Nullstellen der Änderungsratenfunktion. Hier können erste Zusammenhänge zwischen Ableitungsgraf, angenähert durch die Änderungsratenfunktion mit kleiner Schrittweite ($h=0,01$), und der Ausgangsfunktion erkannt werden.

Lösungshinweis zu Teil c):

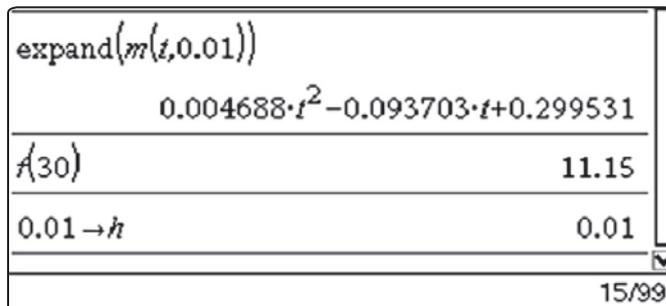


Abb. 5: $h = 0.01$ gesetzt.

(Noch) mehr Leistung für Ihren Rechner – mit dem aktuellen Betriebssystem

Aktualisieren Sie Ihren Rechner mit der neuesten Version des Betriebssystems. Nutzen Sie die kostenlose Upgrade-Möglichkeit auf den TI-Webseiten im Bereich „Downloads“.

Graphikrechnermodell	Aktuelle Betriebssystem-Version
TI-83 Plus	1.19
TI-84 Plus/TI-84 Plus Silver Edition	2.53 MP – NEU!
TI-89 Titanium	3.10
Voyage™ 200	3.10
TI-Nspire™	2.0 – NEU!
TI-Nspire™ CAS	2.0 – NEU!

Werte für drei Sekantensteigungsfunktionen werden nachfolgend auf dem Tabellenblatt berechnet.

	A xl	B yl	C yl2	D yl3	E
◆		=m(xl,'h)	=m(xl,'h)/10)	=m(xl,'h/100)	
1	0.	0.299531	0.299953	0.299995	
2	0.5	0.253852	0.254252	0.254292	
3	1.	0.210516	0.210895	0.210933	
4	1.5	0.169524	0.169882	0.169918	
5	2.	0.130875	0.131213	0.131246	
6	2.5	0.09457	0.094887	0.094918	
7	3.	0.06061	0.060905	0.060934	
8	3.5	0.028992	0.029266	0.029294	

Abb. 6

Abb. 6 zeigt die Sekantensteigungen in 3 Größenordnungen, nämlich mit $h = 0,01$ für $h, h/10$ und $h/100$. Dargestellt ist ein Ausschnitt der Tabelle (Computer-Normalansicht), die xl - Liste reicht bis $x = 30$.



Abb. 7



Abb. 8: Quadratische Regression

QuadReg xl,yl,1: CopyVar stat.RegEqn,abl: s:

"Titel"	"Quadratische Regression"
"RegEqn"	"a*x^2+b*x+c"
"a"	0.004688
"b"	-0.093703
"c"	0.299531
"R²"	1.
"Resid"	"{...}"

abl(x) $0.004688 \cdot x^2 - 0.093703 \cdot x + 0.299531$

$\frac{d}{dx}(f(x))$ $0.004688 \cdot x^2 - 0.09375 \cdot x + 0.3$

Abb. 9: Quadratische Regression

Der Term zu „abl(x)“ wurde mittels Regression aus den Listen xl und yl (vgl. Abb. 6 oben) ermittelt. „abl(x)“ und die exakte Ableitung liegen „nahe“ beieinander (vgl. Werte in der Tabelle).

Die Approximation kann man verbessern, wenn man für die Regression anstelle der Liste yl die Listen yl2 oder yl3 auswählt.

Lösungshinweis zu Teil d)

Zunächst wird der „Ausgangspunkt“ A auf dem Grafen von f einer Sekante gewählt. Die Angabe der Abszisse dieses Punktes und die Sekantensteigungen aller Sekanten durch A werden abhängig von der Schrittweite h berechnet:

3.2 3.3 3.4 3.5 BOG APPRX REELL

$m(20,h)$ 0.300469

DelVar h Fertig

$m(20,h)$ $0.001563 \cdot (h^2 + 30 \cdot h + 192.)$

$\lim_{h \rightarrow 0} (m(20,h))$ 0.3

$m(20,0)$ undef

20/99

Abb. 10

In der Abb.10 werden die Möglichkeiten des CAS gezeigt für den Punkt des Grafen mit der Abszisse 20. Für die Sekantensteigungsfunktion ist der Grenzwert der Sekantensteigungsfunktion berechenbar (Tangentensteigung), der zugehörige Funktionswert der Sekantensteigungsfunktion existiert nicht. Die Sekantensteigungsfunktion ist eine Parabel „in h“, in den für unser Problem maßgeblichen kleinen h Werten ist das nicht zu erkennen. Man müsste dazu eine andere Fenstereinstellung nehmen.

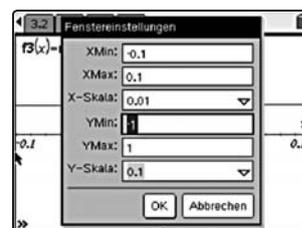


Abb. 11

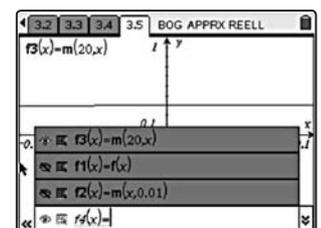


Abb. 12

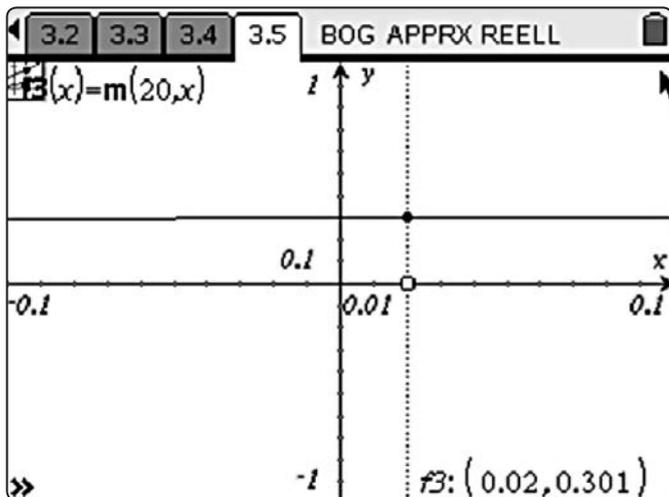


Abb. 13

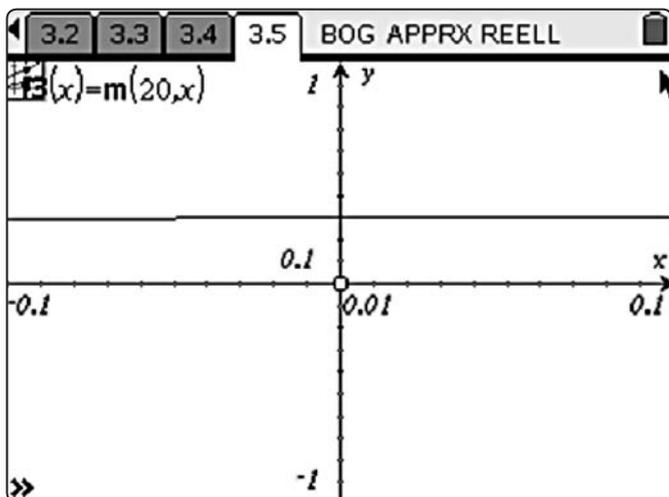


Abb. 14

Die grafischen Darstellungen belegen die „Calculator“ Ergebnisse oben. Die Tangentensteigung ist als „Lückenwert“ an der Stelle 0 im Spurmodus gut zu veranschaulichen. Bei Verwendung des TI-Nspire™ in der GTR-Version (NON CAS) sind die grafischen Möglichkeiten in d) ebenfalls umsetzbar.

Überholvorgang bei zwei Radfahrern

Hier geht es um ein „einfaches“ Beispiel, bei dem ein Rückschluss von der Ableitung (lokale Änderungsratefunktion) auf die Ausgangsfunktion erfolgt. Es handelt sich um eine offene Aufgabenstellung für den Unterricht.

Aufgabenstellung

Ein Radfahrer A fährt mit gleichbleibender Geschwindigkeit von 5 m/sec. Radfahrer B startet zum Zeitpunkt 0 sec und versucht, den vor ihm fahrenden Radfahrer zu überholen. Dabei beschleunigt er in 4 sec von 0 m/sec auf 7 m/sec. Die

Geschwindigkeits-Zeitfunktion für den ersten Abschnitt bis 4 sec werde definiert durch die Gleichung

$$v(t) = \frac{7}{4} \cdot t$$

Danach fährt er konstant 7 m/sec.

Lösungshinweise

Zunächst werden drei Seiten angelegt: „Notes“ mit dem Aufgabentext (Seite 1.1 – ähnlich wie in Abb.1), „Calculator“ und „Graphs...“.

Die gesamte Geschwindigkeitsfunktion für Radfahrer B wird nun dargestellt:

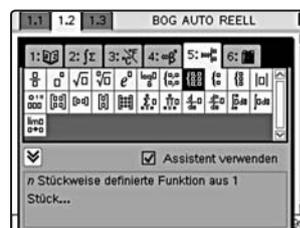


Abb. 15



Abb. 16

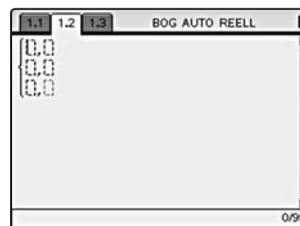


Abb. 17

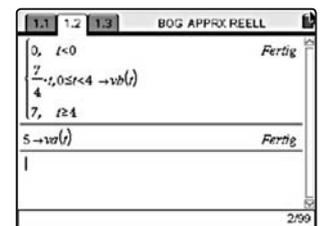


Abb. 18

Die Abbildungen 15 - 18 zeigen die Definitionen zu den beiden Geschwindigkeitsfunktionen.

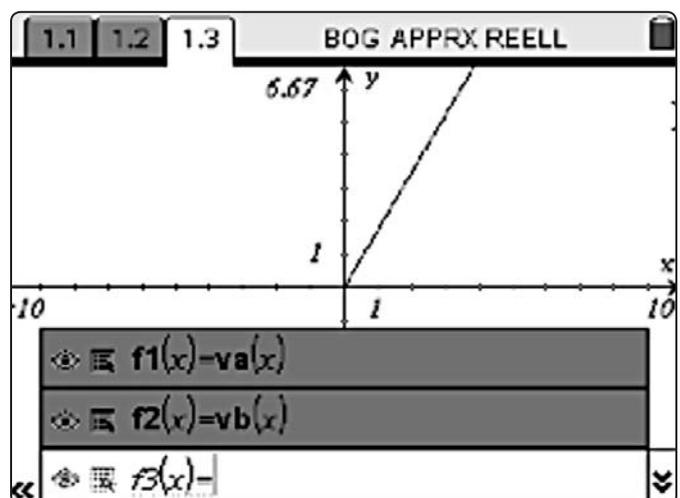


Abb. 19

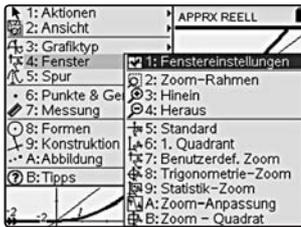


Abb. 20: Die Graphik wird erzeugt.



Abb. 21

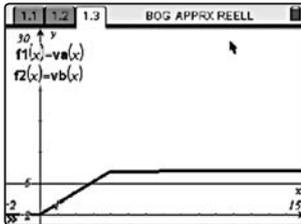


Abb. 22

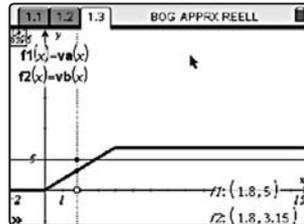


Abb. 23

Abb. 22 zeigt die beiden Geschwindigkeitsgraphen, Abb. 23 den Wertevergleich mit „gemeinsamer“ Spur. Der absolute Zuwachs an Weg, beginnend bei $x = 0$ (entspricht $t = 0$) bis zur Senkrechten mit den beiden Spurpunkten und dem zugehörigen x -Achsendurchgang, ist aus den angezeigten Werten zu berechnen:

Radfahrer A: $1,8 \cdot 5 = 9$ (Rechteckflächeninhalt)

Radfahrer B: $0,5 \cdot 1,8 \cdot 3,15 = 2,835$ (Dreiecksflächeninhalt)

Zum Zeitpunkt des Schnittpunktes haben beide Radfahrer die gleiche Geschwindigkeit, danach ist B schneller. Aus diesen Überlegungen lässt sich die zurückgelegte Wegstrecke der beiden Radfahrer bestimmen:

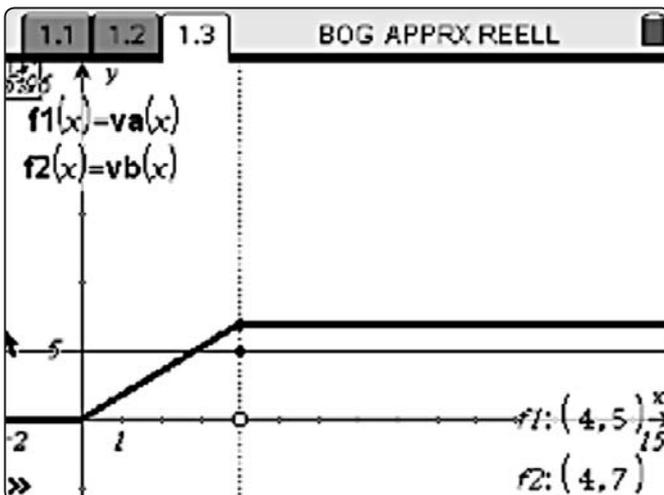


Abb. 24

Der Abbildung 24 ist zu entnehmen: Das rechtwinklige Dreieck hat den Flächeninhalt 14 (siehe angezeigte Punktkoordinaten bei f2).

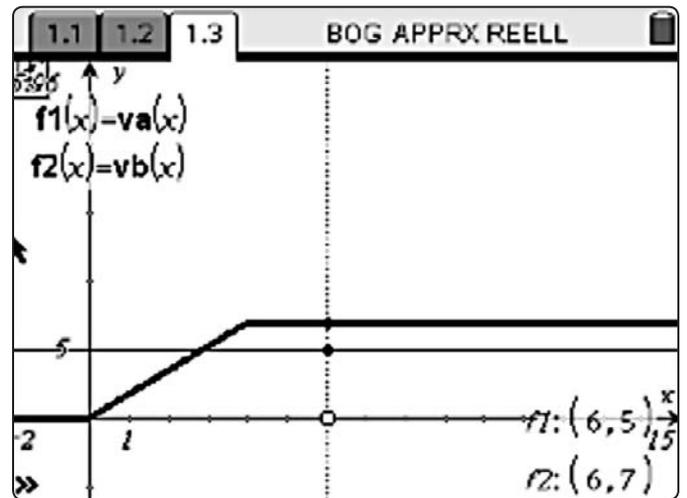


Abb. 25

Für Radfahrer B setzt sich die zurückgelegte Weglänge für $x \geq 4$ aus einem Dreieck vom Flächeninhalt 14 und einem sich verändernden Rechteckflächeninhalt mit der einen Kantenlänge: $t - 4$.

Daraus ergeben sich die folgenden Weg-Zeit-Funktionen:

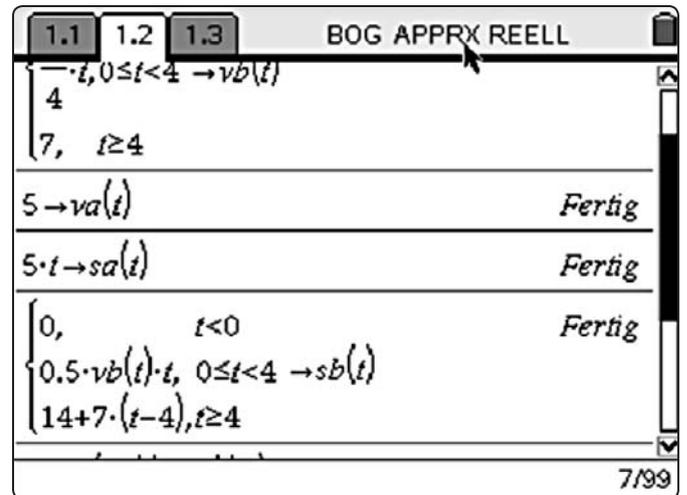


Abb. 26

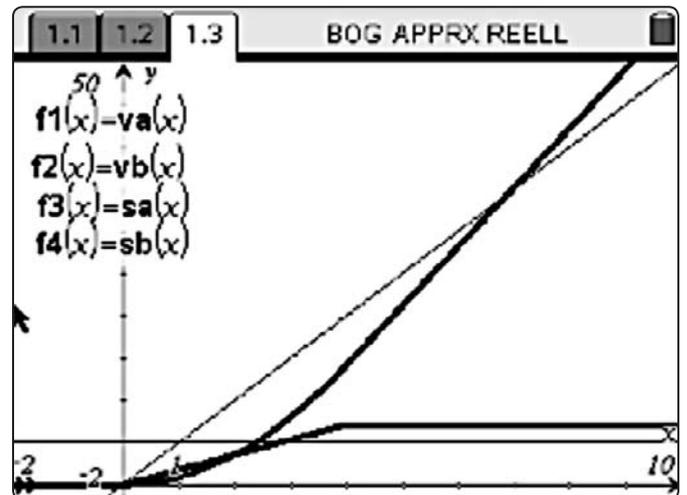


Abb. 27: Alle 4 Grafen (geänderte Fenstereinstellungen)

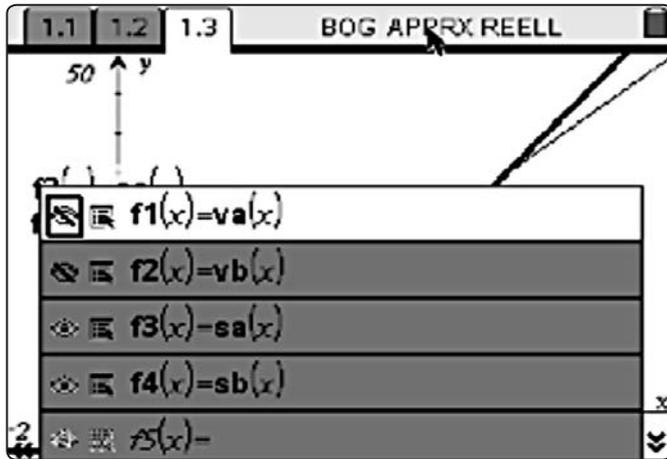


Abb. 28

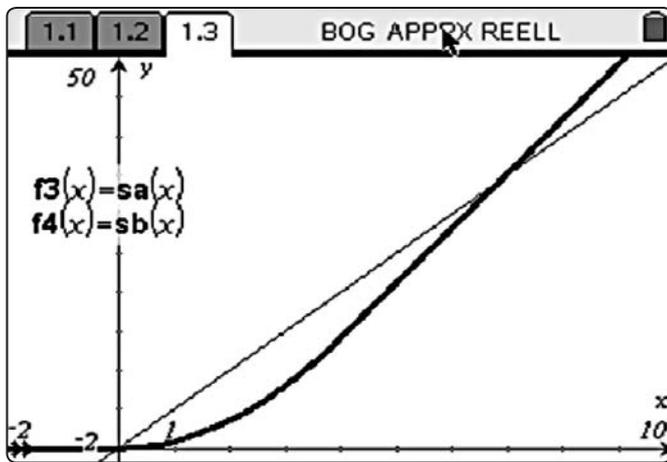


Abb. 29: Zeit-Weg-Diagramme

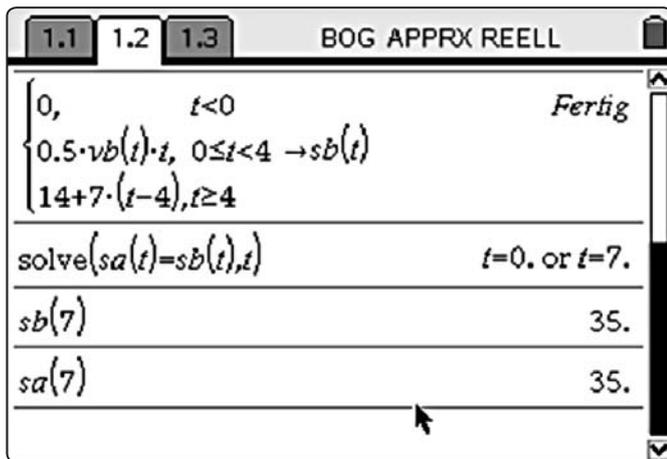


Abb. 30: TI-Nspire™ CAS

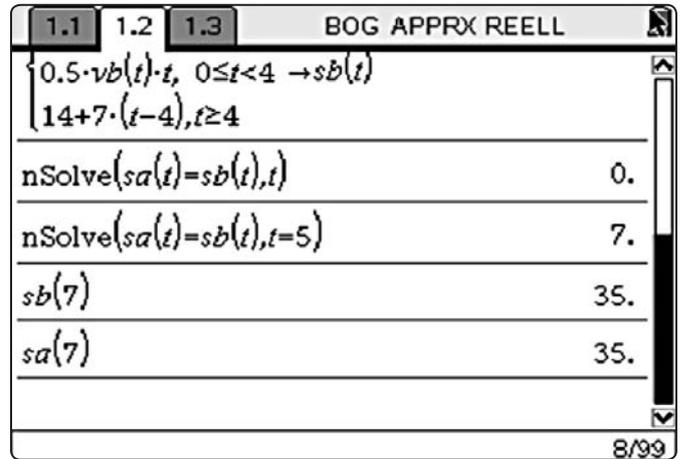


Abb. 31: TI-Nspire™ als GTR-Version (NON CAS)

Beim GTR TI-Nspire™ kann mit „nSolve“ gearbeitet werden, alternativ lässt sich der Schnittpunkt graphisch bestimmen. Nach 7 Sekunden wird Radfahrer A eingeholt!

Die Gesamtgrafiken wurden mit Hilfe abschnittsweise definierter Funktionen dargestellt. Die Zeit-Weg-Funktionen wurden aus ihren Ableitungen (lokalen Änderungsraten) ermittelt, der Grundgedanke in der später zu behandelnden Integralrechnung. Das geht hier deshalb, weil die Bewegung des Radfahrers B auf dem 1. Teilstück gleichmäßig beschleunigt erfolgt und damit die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen Anfangs- und Endwert der Geschwindigkeit eines Teilstücks durch Mittelwertbildung zu finden ist, was mathematisch dem Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks entspricht (siehe Abb. 25).

Autor:

Günter Heitmeyer, Stadthagen (D)
guenter.heimmeyer@t-online.de

Anmerkung der Redaktion

Die vorgestellten Aufgaben wurden für Lehrerfortbildungen zusammengestellt. Weitere Beispiele hat der Autor im Tagungsband zur „Sharing Inspiration 2009“, der TI-Nspire™ Tagung von T³ im Nov. 2009 in Frankfurt, veröffentlicht.

Modellierung durch Funktionsanpassung – Regression oder Schieberegler?

Dr. Karl-Heinz Keunecke, Angelika Reiß



Einführung

Das Modellieren von Prozessen durch mathematische Funktionen ist ein wichtiger Bestandteil des heutigen Mathematik- und Physikunterrichtes. Dazu stehen häufig Daten in Form einer Tabelle als Basis für solche Untersuchungen zur Verfügung. Um diese Daten durch eine Funktion zu beschreiben, gibt es mehrere Möglichkeiten. So bieten graphische Taschenrechner und Taschencomputer mit CAS Regressionsverfahren für eine große Anzahl von Funktionsklassen an. Der TI-Nspire™ verfügt über eine zusätzliche Alternative, die Schieberegler. Damit lassen sich die Parameter vorgegebener Funktionstypen so einstellen, dass sie gegebene Daten möglichst gut beschreiben. Einige Funktionen lassen sich auch manuell durch Ziehen mit der Greifhand an Daten anpassen.

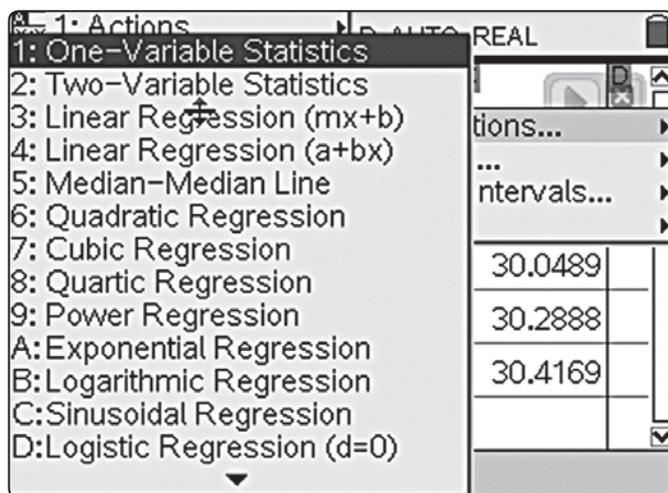


Abb.1: Funktionsklassen für Regressionen

Bei allen Verfahren ist es notwendig, dass die Schülerinnen und Schüler Kenntnisse über die Funktionsklassen (Abb.1) haben, die von den Rechnern für die Approximation angeboten werden bzw. um einen Funktionstyp auszuwählen, bei dem dann die Parameter mit dem Schieberegler variiert werden sollen.

Die Schülerinnen und Schüler sollten bereits aus dem Graphen erkennen können, welcher Klasse die zugehörige Funktion angehören könnte. Auch aus der Wertetabelle können Kenntnisse über den Funktionstyp gewonnen werden, indem die Zusammenhänge bei den jeweiligen Punktepaaren untersucht werden. Bei der Arbeit mit Schieberegler muss zusätzlich erkannt werden, welche Parameter variabel sein müssen und in welchem Zahlbereich die Parameter gewählt werden müssen, um einen Funktionsgraph möglichst gut durch die Datenpunkte verlaufen zu lassen.

Eine sinnvolle rechnerunterstützte Modellierung setzt also eine Reihe wichtiger mathematischer Kompetenzen voraus. Deren Anwendung und nicht die anschließende numerische Berechnung oder das Ziehen am Schieberegler ist der wichtige Teil von Modellierungen. Kritiker des Einsatzes von Taschencomputer im Unterricht vergessen dies häufig.

Anhand von drei Beispielen werden nachfolgend die Methoden zur Modellierungen demonstriert. Damit wird ein Vergleich der Verfahren möglich.

Modellierung mithilfe von Regression und Schieberegler

Beispiel 1 (Regression und Schieberegler)

In einem kleinen Messzylinder ist ein eingeschlossenes Gasvolumen zunächst komprimiert und anschließend expandiert worden. Dabei ist für bestimmte Volumina (*dc03.event*) der Druck (*dc03.press1*) aufgezeichnet worden.

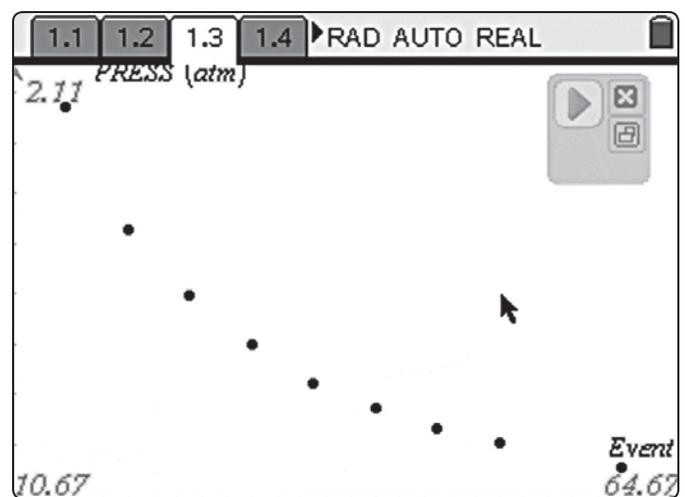


Abb.2: Graphische Darstellung der Messdaten

In Abb. 2 sind die Daten graphisch dargestellt und in Abb.3 in einer Tabelle zu sehen.

Autoren willkommen! Kritik erwünscht!

Ihr Beitrag zu den TI-Nachrichten ist herzlich willkommen, besonders natürlich Beispiele aus dem Unterricht. Ihre Kritik hilft uns, Ihren Wünschen besser gerecht zu werden. Ihr Lob spornt uns an.

Senden Sie Ihre Beiträge bitte per E-Mail an unsere TI-Nachrichten Redaktion:
ti-nachrichten@ti.com

oder per Post an
Texas Instruments, Education Technology, TI-Nachrichten,
Haggertystraße1, 85356 Freising, Deutschland

Bitte beachten Sie die Hinweise für Autoren auf unserer Website.

Dr. Karl-Heinz Keunecke, Angelika Reiß

Ziel der Modellierung soll sein, dass die Beziehung

$$p(V) \approx \frac{1}{V} \quad (1)$$

erkennbar wird.

	1.6	1.7	1.8	1.9	RAD AUTO REAL
A					
	=dc03.event	=dc03.press1	=a[*]b[*]		
1		30.	0.997697	29.9309	2
2		25.	1.197	29.925	
3		20.	1.45548	29.1096	
4		15.	1.94563	29.1845	
5		35.	0.847494	29.6623	
6		40.	0.74926	29.9704	
7		45.	0.667754	30.0489	
8		50.	0.605776	30.2888	
9		60.	0.506948	30.4169	
10					
B2	=1.1969993114471				

Abb.3: Messdaten

Für eine Modellierung muss zunächst der Funktionstyp festgelegt werden. In der Tabelle in Abb.3 ist in Spalte C das Produkt der Werte von Volumen und Druck berechnet worden, das für alle Messpunkte etwa konstant ist. Dies deutet auf eine antiproportionale Zuordnung. Eine solche wird in dem Menü in Abb.1 nicht angeboten. Stattdessen muss man aus dem Menü für die möglichen Regressionsfunktionen in Abb.1 „Power Regression“ (Potenzfunktion) wählen. (menu, 1:Actions, 4:Statistics, 1:Stat Calculations... 9:Power Regression)

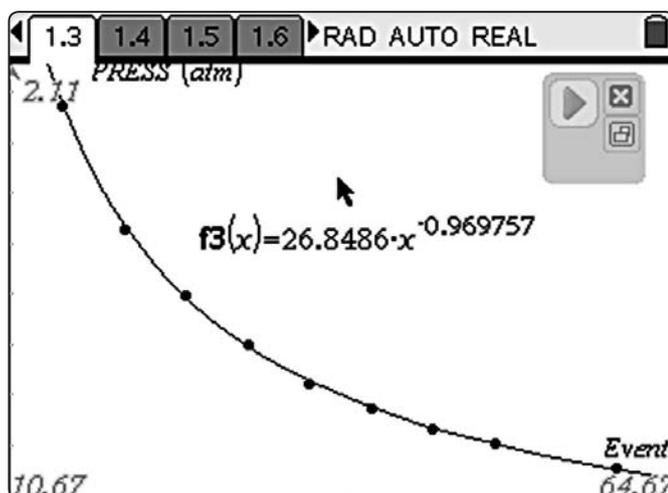


Abb.4: Modellierung durch die Regressionsfunktion

Die Regressionsfunktion ist als f3(x) gespeichert und in Abb.4 zusammen mit den Daten graphisch dargestellt worden. Sie beschreibt recht gut den Verlauf der Messdaten. Die Aufgabe zur Modellierung der Daten ist somit erfüllt. Man erhält:

$$p(V) = 26,8 \cdot V^{-0,97} \quad (2)$$

Nun wird die Modellierung mit Schieberegglern gezeigt. Dazu benötigt man im Allgemeinen genauere Kenntnisse über den Datentyp und auch den Wertebereich der Parameter. In Spalte „C“ der Tabelle (Abb.3) ist das Produkt $p \cdot V$ berechnet worden, das für alle Werte nahezu konstant ist. Daher kann geschlossen werden, dass die Daten durch eine Funktion des Typs

$$f(x) = \frac{k}{x}$$

beschrieben werden können.

In der Applikation Graphs & Geometrie wird nun ein Schieberegler installiert mit (menu, 1:Actions, A:Slider). Die Parameter für den Schieberegler kann man mit (ctrl)(menu, 1:Settings...) eingeben.

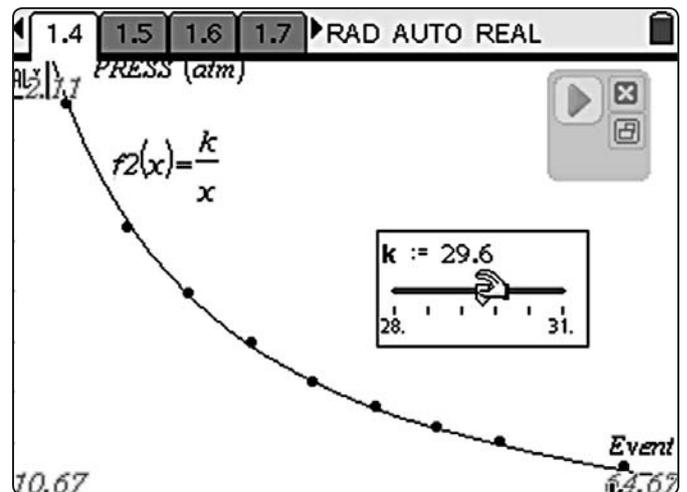


Abb.5: Funktionsanpassung mit Schieberegler

Durch die Berechnung in der Tabelle in Abb.3 ist bekannt, dass für k gilt: $29 < k < 31$. Entsprechend können die Grenzen von k eingegeben werden. Mit der Greifhand (Abb.5) kann dann k eingestellt werden. Für $k = 29,6$ ist eine gute Approximation der Daten erreicht. Die Modellfunktion ist demnach:

$$p(V) = \frac{29,6}{V} \quad (3)$$

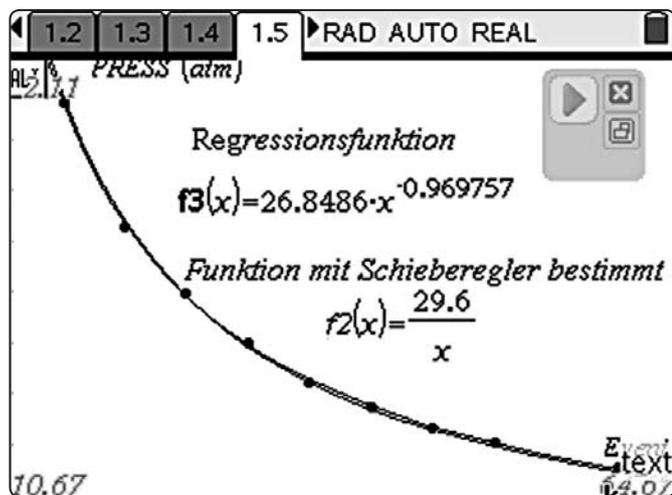


Abb.6: Vergleich der Modellfunktionen

Ein Vergleich der Modellierungen in Abb.6 zeigt, dass beide Funktionen gemäß (2) und (3) sehr gute Approximationen der Daten ergeben. Eine Entscheidung zwischen ihnen muss nach fachlichen und bzw. oder didaktischen Gesichtspunkten erfolgen. Hier ist dem Ergebnis (3) mit dem Schieberegler der Vorzug zu geben, denn das Ergebnis (2) der Regression mit dem Exponenten $-0,97$ lässt das zugrunde liegende Naturgesetz, die antiproportional Beziehung zwischen p und V , nicht klar erkennen.

Beispiel 2 (Schieberegler):

Ein Gymnastikball fällt aus einer Höhe von ca. 2 m zu Boden und springt mehrfach auf. Seine Bewegung wird mit einem Ultraschallabstandssensor aufgezeichnet und ist in Abb. 7 dargestellt. Der Graph besteht aus einer großen Anzahl von Bögen, die vermutlich durch quadratische Gleichungen beschrieben werden können. Der Nachweis ist nicht mit einer Regressionsrechnung zu führen, weil bei einer Regression eine Ausgleichsfunktion zu dem gesamten Datensatz berechnet wird und nicht zu den einzelnen Bögen. Erst wenn man sich einen Ausschnitt, z.B. einen einzelnen Parabelbogen wählt, wird eine Regression sinnvoll.

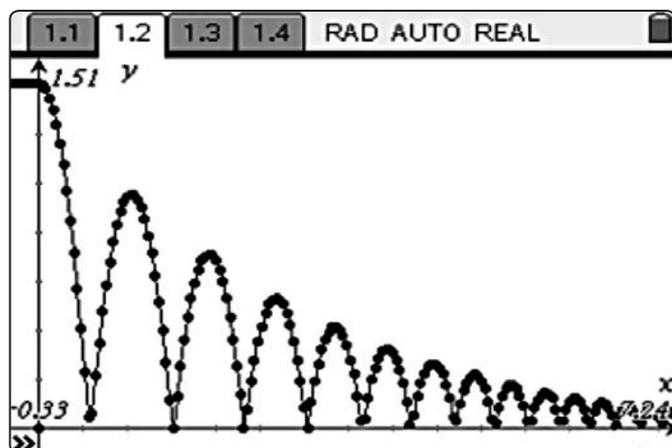


Abb.7: Zeit-Weg-Diagramm des springenden Balles

Ein Schieberegler kann flexibler eingesetzt werden. Z.B. ist es möglich, die einzelnen Bögen durch Parabeln vom Typ

$$k \cdot (x - x_0)^2 + y_0$$

zu approximieren. Dazu wären allerdings drei Schieberegler für x_0 , y_0 und k erforderlich.

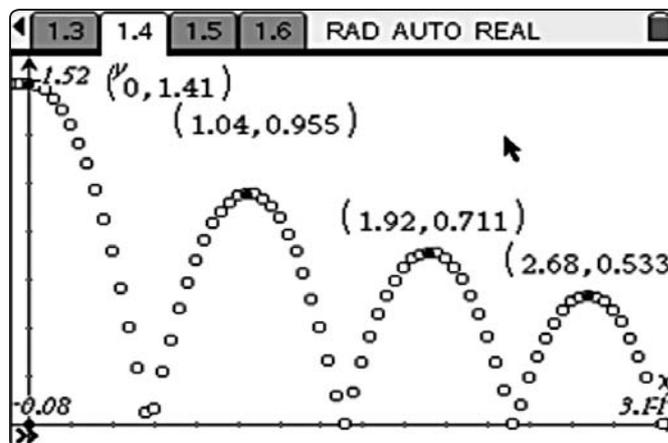


Abb.8

In dem Display des Handhelds könnten sie nur mit Mühe untergebracht werden. Außerdem ist es sehr schwierig, eine Funktion mithilfe von drei Reglern durch die Punkte hindurchzulegen. Eine Reduktion der Parameter ist daher dringend empfohlen. Das ist hier möglich, denn man kann den Scheitelpunkt $S(x_0 | y_0)$ der Parabeln leicht aus dem Graphen ablesen. Danach ist nur noch ein Regler für k erforderlich, um den Graphen anzupassen.

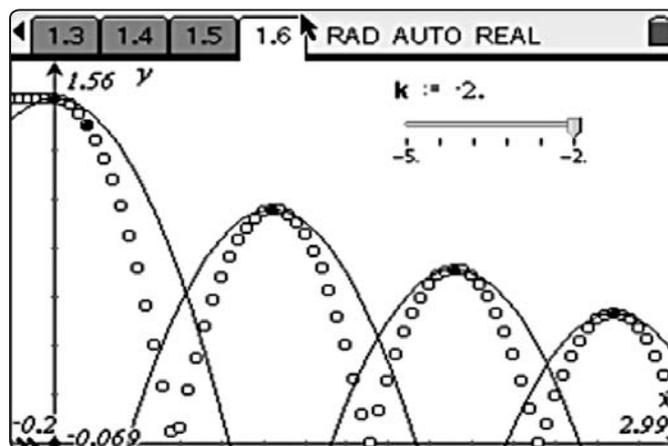


Abb. 9

Mit der Spurfunktion (menu, 5:Trace) können die Koordinaten der einzelnen Datenpunkte angezeigt und mit der Entertaste fixiert werden. Auf diese Weise werden die Scheitelpunkte bestimmt. Danach wird ein Schieberegler (menu, 1:Actions, A:Slider) installiert und das Intervall für k festgelegt (ctrl+menu, 1:Setting..).

Abschließend werden in der Eingabezeile nacheinander die Funktionen f1 bis f4 zur Modellierung der ersten 4 Bögen eingegeben.

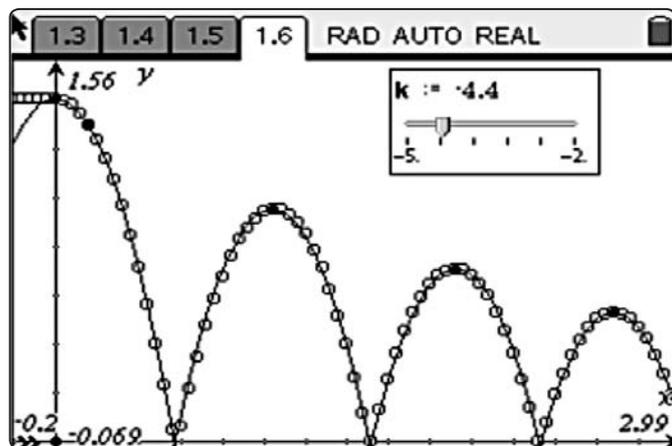


Abb. 10

Nun wird mit der Greifhand der Schieber so eingestellt, dass die Parabeln möglichst gut durch die Messpunkte verlaufen. Offensichtlich gelingt mit $k = -4,4$ eine Anpassung für alle vier Bögen des Graphen. Mit dem so ermittelten Wert für k lassen sich die Parabelbögen durch die Funktionen f_1 bis f_4 beschreiben.

Für die physikalische Interpretation bedeuten die Scheitelpunktskoordinaten y_0 die Anfangshöhe h_0 der Fallbewegung und x_0 die Startzeit t_0 . Da die Variable x der Zeit t entspricht, können die einzelnen Parabelbögen beschrieben werden durch:

$$s(t) = h_0 - 4.4 \frac{m}{s^2} \cdot (t - t_0)^2$$

Beispiel 3 (manuelles Anpassen)

Das Anpassen von Funktionen kann mit dem TI-Nspire™ in einigen Fällen noch einfacher und intuitiver durchgeführt werden. Graphen von linearen, quadratischen, trigonometrischen Funktionen und einigen Exponentialfunktionen können mit der Greifhand so verändert werden, dass sie vorgegebene Bedingungen erfüllen.

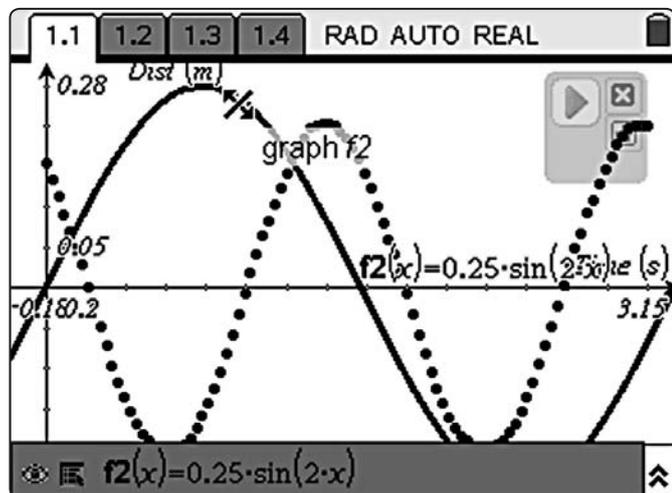


Abb. 11: Einfügen der Modellfunktion f_2

In Abb. 11 ist das Zeit-Weg-Diagramm einer Pendelschwingung dargestellt, die durch eine trigonometrische Funktion modelliert werden soll. Dazu ist in der Editorzeile eine Sinusfunktion eingegeben worden, bei der die Schwingungsweite und die Schwingungsdauer mit den Parametern 0,25 und 2 bereits der gezeigten Schwingung angepasst ist. So ist das Manipulieren des Graphen deutlich einfacher. Für das Bearbeiten stehen zwei Werkzeuge zu Verfügung. Klickt man auf den oberen oder unteren Teil des Graphen, so verändert sich der Zeiger wie in Abb. 11. Die Schwingungsweite kann durch vertikales Ziehen und die Schwingungsdauer durch horizontales Ziehen am Graphen eingestellt werden.

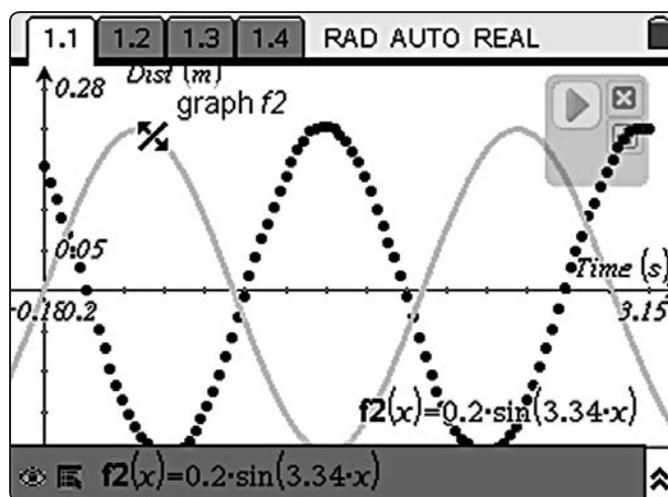


Abb.12: Anpassen der Schwingungsdauer und -weite

In Abb.12 ist eine solche Veränderung erfolgt. Dabei hat sich gleichzeitig der Funktionsterm entsprechend den Verschiebungen verändert.

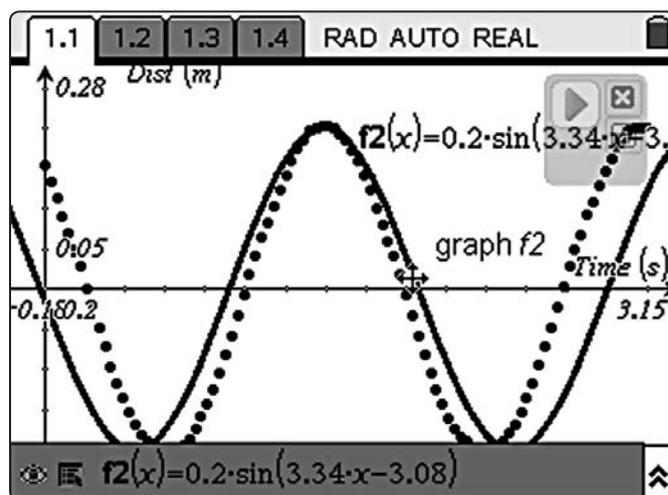


Abb.13: Verschiebung in x- und y-Richtung

Zur Einstellung der Anfangsbedingung klickt man auf den Graphen der Funktion in der Nähe der x-Achse. Wiederum verändert sich der Zeiger (Pfeilkreuz in Abb. 13), nun kann der Graph

vertikal und horizontal verschoben werden kann. Die erfolgte Verschiebung ist wieder in der Änderung des Terms zu erkennen. Die beschriebenen Werkzeuge müssen nun mehrfach eingesetzt werden, damit eine zufriedenstellende Modellierung entsteht. Dazu gehören einerseits etwas manuelles Geschick und andererseits Kenntnisse über den Funktionstyp, denn man muss sich immer wieder darüber klar werden, welchen Parameter man ändern will.

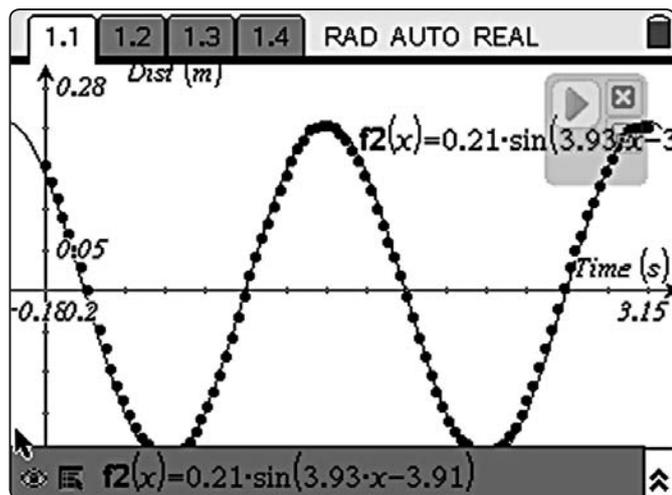


Abb. 14: Modellfunktion

Abb. 14 zeigt das Ergebnis der manuellen Modellierung mit dem Term der Modellierungsfunktion in der Eingabezeile.

Approximiert man die Daten mithilfe einer Regressionsrechnung, so erhält man den folgenden Term:

$$0,203 \cdot \sin(3,98 \cdot x + 2,23) - 0,0007.$$

Die Abweichung beider Terme ist sehr gering. Lediglich die unterschiedlichen absoluten Zahlen im Argument der Sinusfunktion (Verschiebungen in x Richtung, bzw. Phasenverschiebungen) bedürfen einer Erläuterung. Für die Differenz der Werte gilt:

$$2,23 - (-3,91) = 6,14 \approx 2\pi$$

Wegen der Mehrdeutigkeit der Sinusfunktion sind Graphen, die sich um 2π unterscheiden, identisch.

Zusammenfassung

Im Folgenden ist zusammengestellt worden, was die Verfahren zur Modellierung im Einzelnen charakterisiert:

Die Arbeit mit Regressionsfunktionen

- ist schnell und problemlos ausführbar,
- führt zu einem eindeutigen Ergebnis, weil es mithilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate berechnet wird,
- ist auf vorgegebene Funktionen (s. Abb.1) beschränkt (lässt u.a. Modellfunktionen x^{-1} , x^{-2} , 2^x , 10^x , e^x nicht zu),
- führt bei der Modellierung von Prozessen, die sich exponentiell einem anderen Wert als Null annähern, zu keinem korrekten Ergebnis,
- kann nicht auf einen Teil der gegebenen Daten angewendet werden,
- lässt Schülerinnen und Schüler nicht erkennen, wie die Modellfunktion zustande kommt.

Bei der Arbeit mit Schieberegler

- kann jeder Funktionstyp gewählt werden,
- ist die Kenntnis über Funktionstypen erforderlich,
- ist die Kenntnis über Verschiebung und Streckung von Funktionen bei der Anpassung an Daten erforderlich,
- sind Ausschnitte der Daten bearbeitbar,
- kann die Zahl der Parameter zu groß werden,
- muss die Größenordnung der Parameter der Modellfunktion möglichst vorher ermittelt werden,
- weisen die Ergebnisse individuelle Unterschiede auf,
- ist experimentelles Geschick erforderlich,
- ist das Regeln spannend.

Für eine Modellierung durch Regression spricht die einfache und schnelle Durchführung und die Eindeutigkeit der Lösung. Das Einrichten von Schieberegler dauert länger und die Anpassung durch die Einstellung der Regler ist manchmal mühsam. Aber diese Methode ist auch dann anwendbar, wenn die Regression nicht zum Erfolg führt. Außerdem sind deutlich größere Kenntnisse über Funktionen und Funktionsklassen erforderlich. Dies sind auch außerhalb dieser Problemkreise Kompetenzen, die vor allem für das Arbeiten mit CAS dringend erforderlich sind. Deshalb sollten Modellierungen nach Möglichkeit mit Schieberegler durchgeführt werden, um diesen Kompetenzerwerb zu fördern.

Autoren:

Dr. Karl-Heinz Keunecke, Altenholz (D)
kh.Keunecke@keukiel.de

Angelika Reiß, Berlin (D)
reiss-berlin@t-online.de

Das Geburtstagsproblem

Rüdiger Dieter Peter Paust

Vorbemerkung

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter n Personen mindestens 2 am gleichen Tag Geburtstag haben? Für die Herleitung dieser Wahrscheinlichkeit empfiehlt es sich zuerst ein etwas einfacheres Beispiel anzusehen¹, z.B.: „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 4 Schülern mindestens 2 im gleichen Monat Geburtstag haben?“ Erst dann sollten wir das Geburtstagsproblem lösen.

Herleitung

Wir definieren die beiden Ereignisse A : „unter n Personen haben mindestens 2 am gleichen Tag Geburtstag“ und das Gegenereignis \bar{A} : „unter n Personen haben alle an verschiedenen Tagen Geburtstag“. Dann erhalten wir die zu A gehörige Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \dots \cdot \frac{(365-n+1)}{365}$$

Oder durch Erweitern:

$$P(A) = 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \dots \cdot \frac{(365-n+1)}{365} \cdot \frac{(365-n)!}{(365-n)!}$$

$$= 1 - \frac{365!}{365^n \cdot (365-n)!}$$

Graphische Darstellung

Die grafische Darstellung dieser Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von n funktioniert nicht so ohne weiteres mit dem Voyage™ 200. Mögliche Ursache: Fakultäten sind nur für 0 und positive ganze Zahlen definiert. Auch Tabellenkalkulationsprogramme streiken bei der Darstellung des zugehörigen Graphen. Nachfolgend nun eine Anleitung, wie die grafische Darstellung dennoch gelingen kann:

Wir speichern gemäß Abb. 1 die obige Formel unter $p(n)$ ab, berechnen die Folge $\text{seq}(n, n, 0, 100)$ und speichern das Ergebnis als Liste unter anz (steht für die Anzahl der Personen n) ab. Eine zweite Folge $\text{seq}(p(n), n, 0, 100)$ speichern wir unter geb (steht für die Geburtstagswahrscheinlichkeit $P(A)$) ab. Hierzu müssen wir dem Voyage™ 200 etwas Zeit lassen. Wer diese nicht hat, lässt die beiden Folgen einfach bei 50 enden.

Abb. 1

Nun definieren wir im Data/Matrix Editor eine neues Datenblatt namens birth (steht für Birthday). Für $c1$ geben wir anz ein und für $c2$ entsprechend geb .

Abb. 2

Jetzt definieren wir noch einen Plot, legen die Window-Einstellungen geeignet fest ($x_{\min}=0$, $x_{\max}=100$, $y_{\min}=0$, $y_{\max}=1$) und betrachten das Ergebnis im Graph-Fenster:

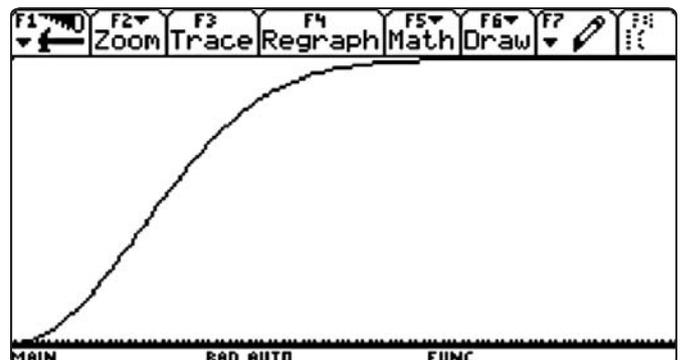


Abb. 3

Funktionsanpassung

Als nächstes führen wir eine logistische Regression durch und speichern den Funktionsterm unter $y1(x)$ ab.

Abb. 4

Wir erhalten als sehr gute Näherung die Gleichung:

$$P(A) \approx y_1(x) = \frac{1,105409}{1 + 12,644009 \cdot e^{-0,118733 \cdot x}} - 0,103175$$

Abschließende Überlegungen

Nun lässt sich entweder durch Ausprobieren ermitteln, ab wie vielen Personen es lohnt zu wetten, dass 2 am gleichen Tag Geburtstag haben oder direkt über die Näherung:

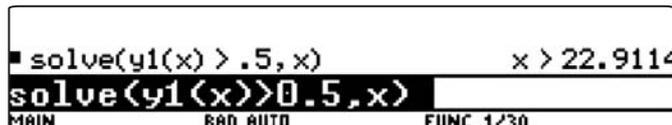


Abb. 5

Das Ergebnis ist für Schülerinnen und Schüler durchaus verblüffend: Schon ab 23 Personen lohnt es, in eine Wette einzusteigen, d.h. dass hier die Wahrscheinlichkeit schon über 50% liegt.

Und wir gehen noch einen Schritt weiter: Ab 60 Personen beträgt die Wahrscheinlichkeit schon 99% und ab 74 Personen liegen wir auf der absolut sicheren Seite, was das Wetten angeht! Folgende Abbildung soll das veranschaulichen:

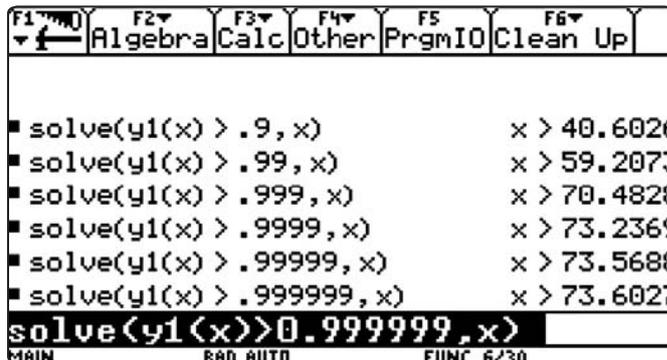


Abb. 6

Viel Spaß beim Ausprobieren!

Literaturverweis:

¹ vgl. auch Lambacher/Schweizer: Mathematik für berufliche Gymnasien – Jahrgangsstufenband; Ernst Klett Verlag, Stuttgart 2008 – 1. Auflage, Seite 343, Aufgabe 12

Autor

Rüdiger Dieter Peter Paust, Sinsheim (D)
Friedrich-Hecker-Schule Sinsheim (Gewerbliche Schule)
paust.fhs@gmx.de

Unsere Empfindungen sind logarithmisch

Prof. Dr. Peter Bützer

CBL 1. Einführung

Der durchschnittliche Mensch gibt sich fünfzig Mal häufiger mit linearen und zwölf Mal öfter mit exponentiellen, als mit logarithmischen Zusammenhängen ab¹.



Abb. 1

Diese Feststellung ist paradox, denn alle unsere Sinne, unsere Sensoren: Sehsinn, Gehör, Tastsinn, Temperaturempfindung, Geruch und Geschmack folgen dem **Weber-Fechner'schen Gesetz**, das besagt, dass die Empfindungen, als Reaktion auf einen Reiz, logarithmisch sind.

Der Leipziger Anatom und Physiologe Ernst Heinrich Weber (1795–1878) war einer der ersten Forscher, der schon 1834 das menschliche Verhalten auf verschiedene äußere Anregungen (Stimulus) quantitativ untersuchte. In derselben Stadt führte um 1860 der Arzt und Psychophysiker Gustav Theodor Fechner (1801–1887) die Arbeiten von Weber mit einer ausführlichen theoretischen Interpretation weiter, die er selbst einfach Webers Gesetz nannte – seine Bewunderer ergänzten den Namen jedoch mit dem heute üblichen Bindestrich². Schon ein Jahr später wurde das Gesetz unabhängig für den Sehsinn nachgewiesen³: „Darnach kann also das Licht bedeutend stärker und schwächer sein, als das diffuse Tageslicht, ohne dass eine Veränderung in dem Empfindungsunterschiede eintritt, wodurch also das Weber-Fechner'sche Gesetz bestätigt wird.“ Für den Schall, das Gehör, fand eine Anwendung 1865 durch den Physiker Ernst Mach (1838 - 1916) statt⁴.

2. Weber-Fechner'sches Gesetz

Das Gesetz besagt: Der proportionale Zuwachs eines Stimulus (ΔS), der eine eben merkbare Verschiedenheit der Intensität des Reizes (I) bewirkt, beträgt stets den gleichen Bruchteil (b) der Größe des Anfangs-Stimulus (S) (Herleitung der logarithmischen Gleichung siehe: Plappert⁵):

$$I(S) = k \cdot \log(S) + c;$$

[I: empfundene Intensität (Reiz), Effekt; S: Stimulus, Anregung; k: reizspezifische Konstante; c: Konstante]

Wie muss man sich das logarithmische Empfinden vorstellen? Im Zusammenhang mit dem Weber-Fechner'schen-Gesetz beschreibt Kirchmann im Jahr 1864⁶: „Man kann bei einem Glase Wasser durch Hineinwerfen von zwei Stück Zucker und dann eines dritten für die Wahrnehmung der Süßigkeit wohl einen gerade merkbaren Unterschied hervorbringen, der dann zur Messung anderer Verhältnisse der Süßigkeit dienen kann;...“ Die Zuckerkonzentration ist der Stimulus (S), der empfundene süße Reiz die Intensität (I). Die Empfindung I ist dann proportional dem Stimulus S.

Ganz analog reagiert unser Tastsinn: Nimmt man eine Tasche, dann kann man leicht durch anheben feststellen, ob diese zwei oder drei Äpfel enthält. Der Unterschied von einem Apfel ist jedoch bei einer Gesamtmenge von 10 Äpfeln von bloßer Hand kaum mehr, bei 20 kg sicher nicht mehr zu erkennen.

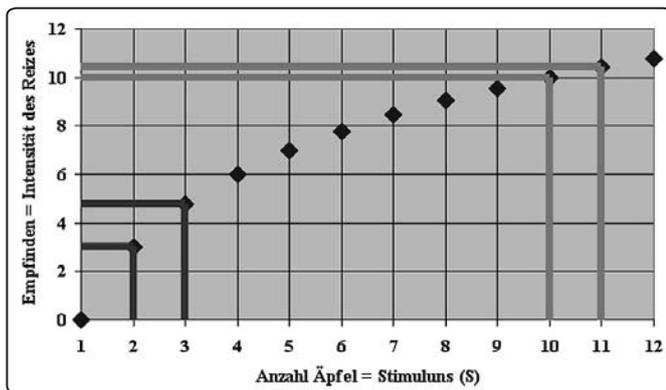


Abbildung 2: So empfinden wir die Zunahme im Gewicht von einem Apfel bei anfänglich zwei (links: $\Delta E = 1,76$) oder zehn Äpfeln (rechts: $\Delta E = 0,41$)

Ein einfaches Experiment: Man nimmt den Dual-Range Force Sensor von Vernier (Kraftsensor) und schraubt den „Bumper“ ein (eine Schraube mit rundem Ende). Den Schalter stellt man auf ± 50 Newton.

Die Testperson nimmt den Sensor so in die Hand, dass der „Bumper“ mit einem Finger gedrückt werden kann. Sie darf den Bildschirm nicht sehen und soll zudem die Augen schließen, um sich ganz auf den Druck im Finger zu konzentrieren. Nun wird die Anweisung gegeben, mit dem Finger einen sehr leichten Druck zu erzeugen. Nun verlangt man, den Druck (Stimulus) möglichst genau zu verdoppeln und diesen Druck beizubehalten. Dann soll dieser neue höhere Druck erneut verdoppelt werden, und der Druck wieder beibehalten. Das wird fortgeführt, bis man eine gute Messreihe hat. Mit möglichst genau gleichen Zeitabständen für die Auswertung gelingt das am besten.

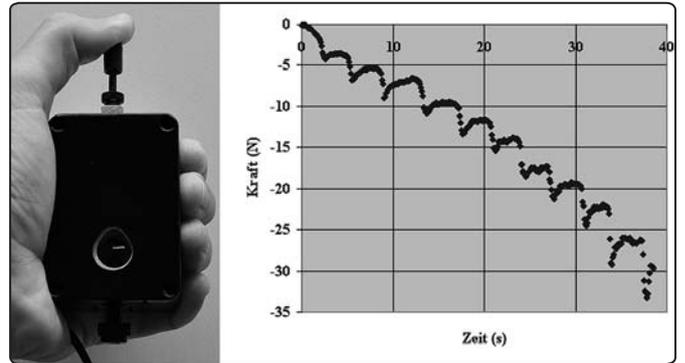


Abbildung 3: Die gemessene Kraft (Stimulus), wenn der Druck mit dem Daumen (Intensität des Reizes) gefühlsmäßig von Schritt zu Schritt verdoppelt wird.

x(S)	3,7	7,4	14,8	29,6	59,2	118,4	236,8	473,6	947,2	1894,4
y(I)	3,7	5,3	6,8	9,7	11,7	13,9	17,3	19,4	22,3	26,2

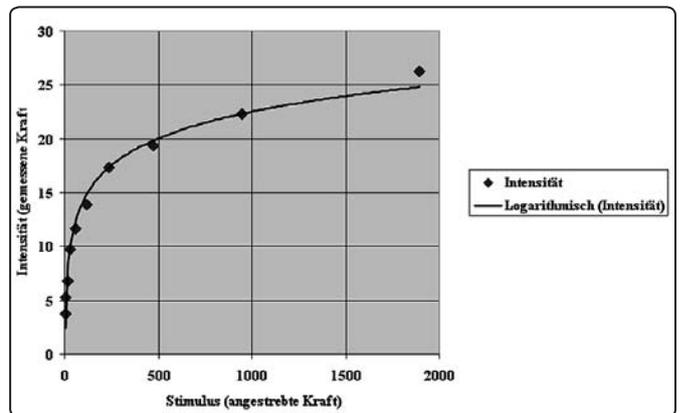


Abbildung 4: Bei jedem Zeitschritt wird der empfundene Druck (I) verdoppelt. Der Stimulus (S) ist dabei der Referenzwert (erster Wert = 3,7 N) mit einer Verdoppelung bei jedem Zeitschritt. Die Trendlinie gibt einen Hinweis auf das logarithmische Verhalten.

Bei einem großen Druck (Stimulus) meinen wir diesen zu verdoppeln, obwohl wir die empfundene aufgebrauchte Kraft (Intensität) keineswegs verdoppeln. Eine Verdoppelung der Kraft F ergibt eine Exponentialfunktion – in Abbildung 3 erkennt man eine Gerade, was bei der Annahme einer Verdoppelung auf einen logarithmischen Zusammenhang hinweist.

Unsere logarithmisch empfundenen Reize:

- Sehen: Maßeinheit lux¹
- Hören: Maßeinheit Bel² (ein Zehntel davon = Dezibel)
- Geschmack: Maßeinheit sauer pH, Maßeinheit süß, salzig, bitter (und umami?)
- Geruch: Maßeinheit würzig, blumig, fruchtig, harzig, brenzlich und faulig (Odor Index?)⁷ (meist Konzentration in ppm)
- Tasten: Druck, berühren, vibrieren (Geschwindigkeit)^{8,9}: Maßeinheit Pa (Druck)
- Temperatur: Maßeinheit (K); Schärfe von Chili¹⁰: Maßeinheit Scoville

¹ Eine Skala für Helligkeit kann mit der Energie des einfallenden Lichtes beschrieben werden. Damit fällt die Subjektivität bei der Wahrnehmung von Helligkeiten (Sterne) weg. Wenn m die Magnitude und L die gemessenen Lichtströme zweier Lichtquellen sind, ist ihr Helligkeitsunterschied: $\Delta m = m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log(L_1/L_2)$.

² Das Bel, benannt nach Alexander Graham Bell, dient zur Kennzeichnung des dekadischen Logarithmus des Verhältnisses zweier gleichartiger Leistungs- bzw. Energiegrößen P_1 und P_2 :

$$L = \left(\ln \frac{P_2}{P_1} \right) \cdot B = 10 \cdot \left(\ln \frac{P_2}{P_1} \right) \cdot \text{dB}$$

Heute würde man das Weber-Fechner'sche-Gesetz eher als Faustregel bezeichnen, da es nur für mittlere Bereiche gilt und einige Ausnahmen³ bekannt sind – für den Alltag ist es jedoch sehr brauchbar. Es handelt sich bei diesem „Gesetz“ um eine mathematische Beschreibung von Phänomenen, ohne auf die Ursachen einzugehen. Für das Verständnis, warum dieses „Gesetz“ Geltung haben soll, sind Modelle notwendig. Eine wichtige Randbedingung ist die Tatsache, dass alle unsere Empfindungen mit chemischen Stoffwechselfvorgängen verbunden sind, mit einer zentralen Beteiligung molekularer Prozesse in Zellen mit Enzymen und/oder Rezeptoren. So beschreibt der pH-Wert der Chemie, erst 1909 vom Biochemiker Sørensen Søren Peter Lauritz (1868-1939) definiert, die inverse Säureempfindung unserer Zunge. Der pH-Wert hat sich für wässrige Lösungen von Säuren und Basen als sinnvolle Größe durchgesetzt.

3. Eine erste chemische Erklärung

(Thermodynamisch mit den Gleichungen von Nernst¹¹, ionotrope Rezeptoren)

Gehen wir von der Tatsache aus, dass alle unsere Empfindungen auf Nervenreizen basieren, dann müssen wir von den elektrischen Impulsen der Signale ausgehen. Diese werden in den Zellen ausschließlich durch Konzentrationsunterschiede von Elektrolyten (Ionen wie H⁺, Na⁺, K⁺ oder Ca²⁺) produziert. Der Nerv beginnt zu feuern und zwar ist die Reizintensität dem Logarithmus der Anzahl Impulse der Synapse proportional¹².

Das Ruhepotential der Nerven lässt sich als Konzentrationselement experimentell messen und mit der Nernstschen Gleichung berechnen:

$$E = E^{\circ} + \frac{2,3 \cdot R \cdot T}{z \cdot F} \cdot \log(K)$$

E: Elektrodenpotential [V], E[°]: Standardelektrodenpotential, für gleiche Elemente E[°]=0 [V]; R: Allgemeine Gaskonstante R = 8,31441 [J·mol⁻¹·K⁻¹]; T: Körpertemperatur, T = 273 + 37 = 310 [K]; z: Ladungszahl der Ionen; F: Faradaysche Konstante: F = 9.684·10⁴ [C/mol]; K: chemische Gleichgewichtskonstante

Für das Natrium-Kalium-Gleichgewicht einer Zelle ist K ≈ 4,35 und damit E = 39,2 mV. Ändert sich nun als Annahme das Gleichgewicht¹³ um einen Faktor 10, also 1000%, auf K = 3,35, so sinkt das Nervenpotential nur auf 32,2 mV, also um 18%.

Der Logarithmus erscheint in dieser Gleichung, weil bei der Herleitung die Arrhenius-Gleichung mit der Aktivierungsenergie als Exponenten verwendet wird. Und die Begründung dafür? Auch die Temperaturabhängigkeit der Reaktionsgeschwindigkeiten verhält sich in der Chemie logarithmisch (RGT-Regel).

Logarithmisch funktioniert nicht nur unsere Zunge, sondern auch jede pH-Elektrode. Beide wandeln die Konzentrationen logarithmisch in Empfindung oder einen pH-Wert um. Damit wird der Zusammenhang zwischen Säure-Basen-Reaktion (Übertragung vom Wasserstoffkern: Proton) und Redoxreaktionen (Übertragung der Wasserstoffhülle: Elektron) deutlich, beide liefern logarithmische Effekte – pH und elektrisches Potential E.

Folgerung:

Das Nervenpotential reagiert als Reaktion auf einen linearen Stimulus mit Ionen mit einer logarithmischen Antwort. Damit ist zu erwarten, dass alle darauf aufgebauten Sinne logarithmisch reagieren.

Beispiel:

Kochsalz auf der Zunge¹⁴.

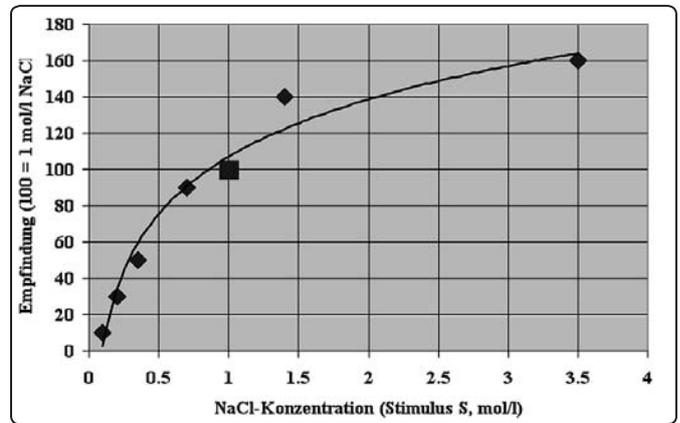


Abbildung 5: Empfindung von salzig auf der Zunge (mit logarithmischer Trendlinie)

Experiment: Mit einer pH-Sonde den pH-Wert einer Lösung von 0,1, 0,01 und 0,001 mol/l Citronensäure messen. Man nehme je einen Tropfen auf die Zunge und schätze die Säurestärke.

4. Eine zweite, molekulare Erklärung

(Kinetisch mit dem Gleichgewicht und den Reaktionsgeschwindigkeiten, metabotrope Rezeptoren⁵)

Die Rezeptor-Theorie wurde 1905 von John Newport Langley (1852–1925) begründet¹⁵. Wirkstoffe können dabei Hormone, Neurotransmitter, Medikamente, Dopingmittel, Drogen oder Gifte sein. Die für einen Wirkstoff spezifischen Rezeptoren werden durch die Wirkstoffmoleküle in einer Gleichgewichtsreaktion besetzt (Okkupationstheorie). Das ist notwendig, denn wenn die Bindung zu stark wäre, könnte an einem Rezeptor nur einmal eine Reaktion ausgelöst werden. Die an den Rezeptor gebundenen Moleküle lösen einen Effekt aus. Rezeptoren sind so das erste Glied unserer Sinne, der Name ist 1900 vom Chemiker Paul Ehrlich (1854-1915) geprägt worden. Der ganze Prozess wird mit der Rezeptor-Theorie beschrieben¹⁶.

³ Es gibt dazu nur ganz wenige Ausnahmen, wie beispielsweise gewisse Schmerzempfindungen.

⁴ Ionotrop bedeutet „auf den Ionen- und Elektrolythaushalt wirkend“.

⁵ Metabotrop bedeutet „auf einen metabolischen Vorgang wirkend“.

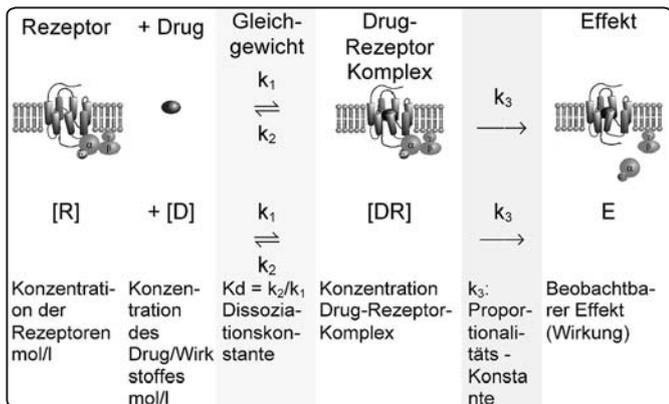


Abbildung 6: Aufbau des einfachen Okkupationsmodells (Einfach-Besetzung von Rezeptoren durch Wirkstoffe, Beispiel G-Protein) (k_1, k_2, k_3 sind Reaktionsgeschwindigkeitskonstanten)

4.1 Annahmen für das Modell:

Das Okkupationsmodell wurde vom britischen Pharmakologen Alfred Joseph Clark (1885-1941), Begründer der Rezeptortheorie¹⁷, hergeleitet^{18,19} (Definitionen siehe Abb. 6).

Chemisches Gleichgewicht:
$$K_d = \frac{[R] \cdot [D]}{[RD]} \quad (1)$$

(Massenwirkungsgesetz) []: Konzentration in mol/l. K_d ist reziprok zur chemischen Gleichgewichtskonstanten K .

Proportionalität:
$$E = [RD] \cdot k_3 \quad (2)$$

Der Effekt ist proportional der mit Wirkstoffen belegten Rezeptoren.

Maximaler Effekt:
$$E_m = [Rt] \cdot k_3 \quad (3)$$

Wenn alle Rezeptoren besetzt sind, ist der Effekt maximal.

Massenbilanz:
$$[Rt] = [RD] + [R] \quad (4)$$

Die Konzentration [Rt] aller Rezeptoren bleibt konstant.

Die Dissoziationskonstante $K_d = k_2/k_1$ ist der Reziprokwert der chemischen Gleichgewichtskonstanten $K = k_1/k_2$ – diese wird auch als Assoziationskonstante bezeichnet²⁰. Gesucht ist ein Modell, welches nur die messbaren Größen [D], K_d und E/E_m enthält. E/E_m ist dabei der relative Effekt, also ein Maß, welcher Bruchteil des maximal möglichen Effekts erreicht wird. Dazu sind folgende Umformungen notwendig:

$$\begin{aligned}
 [R] &= [Rt] - [RD] && \text{aus (4)} \\
 [R] &= E_m/k_3 - E/k_3 && \text{aus (2), (3), in (1):} \\
 K_d &= \{(E_m/k_3 - E/k_3) [D]\} / (E/k_3) \\
 K_d &= (E_m [D] - E [D]) / E && \text{Kürzen, Umformen} \\
 K_d &= E_m/E [D] - [D]
 \end{aligned}$$

Mathematische Formulierung der Dosis-Effekt-Kurve (Relativer Effekt):

$$\frac{E}{E_m} = \frac{[D]}{[D] + K_d}$$

[D]: Dosis (mg/kg)

K_d : Dissoziationskonstante (mg/kg) entspricht der Dosis für den halbmaximalen Effekt, sie ist ein Maß für die Wirksamkeit (engl. affinity²¹, potency²² of a drug).

Diese Funktion zeigt eine perfekte Analogie zur Dissoziation von Säuren und zur Michaelis-Menten-Gleichung der Enzyme, was nicht überrascht, äußern sich doch die Effekte sehr oft als Beeinflussung der zellulären Enzymsysteme⁶.

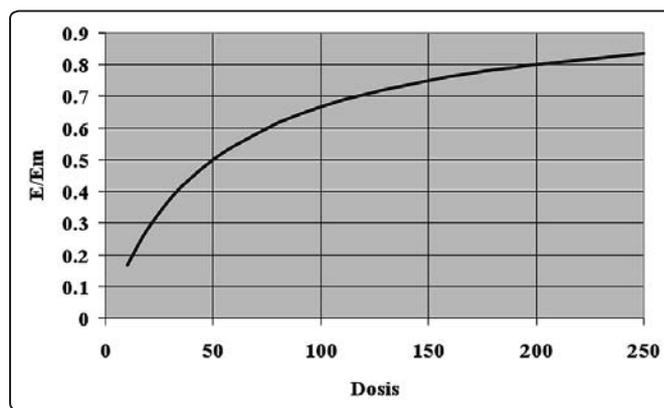


Abbildung 7a: Zunahme des relativen Effekts (E/Em) bei zunehmender Dosis

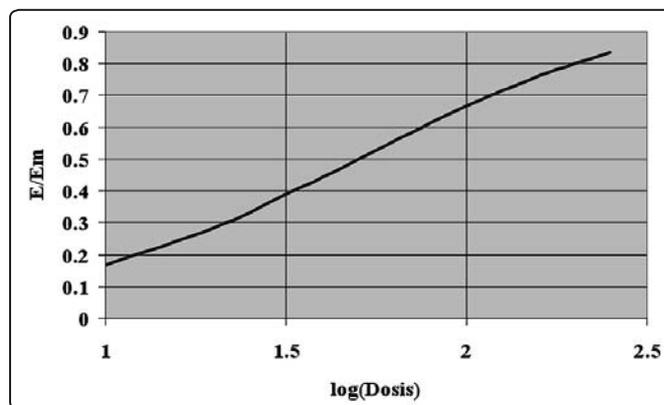


Abbildung 7b: Relativer Effekt (E/Em) in Funktion des Logarithmus der Dosis siehe auch: Weber-Fechnersches-Gesetz

Die Abbildung 7 zeigt den Vergleich einer linearen a) mit einer logarithmischen Darstellung b) von Dosis und Effekt (Wirkung).

Erweiterungen der Okkupationstheorie sind bekannt^{23,24,25}, sollten jedoch nur verwendet werden, wenn man deren Anwendung auch gut begründen kann.

4.2 Der Vergleich mit dem Weber-Fechnerschen Gesetz

Die logarithmische Darstellung ergibt, auch von bloßem Auge erkennbar, keine perfekte Gerade. Das hat praktisch keine Folgen, denn die experimentellen physiologischen Daten weisen noch erheblich größere Abweichungen auf.

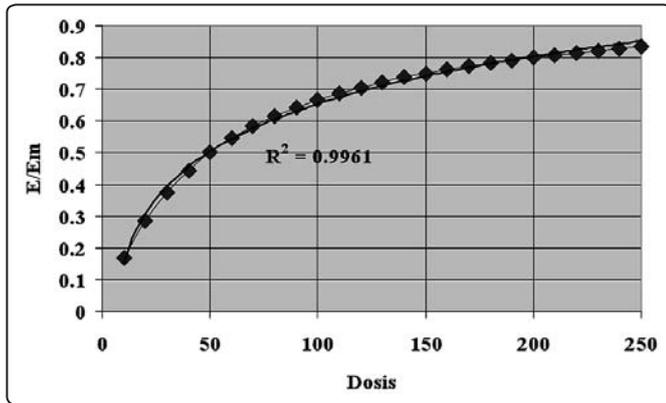


Abbildung 8a: Vergleich von Okkupationstheorie und Weber-Fechnerschem Logarithmus; Anpassung der Dosis-Effekt-Kurve (gebrochene Funktion) durch eine logarithmische Funktion

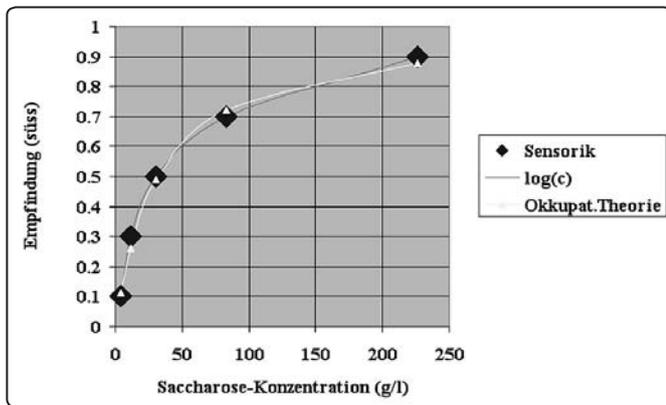


Abbildung 8b: Vergleich der Messwerte für Süßigkeit von Zucker (Saccharose)²⁶ mit der logarithmischen Funktion und der Okkupationstheorie. (Daten: x,y: 4,1,0,1;11,3,0,3;30,6,0,5;83,1,0,7;226,0,9)

Das Weber-Fechner'sche Gesetz ist in mittleren Bereichen in guter Übereinstimmung mit dem Okkupationsmodell, den Dosis-Häufigkeits-, den Konzentrations-Effekt- und den Konzentrations-Bindungs-Beziehungen der Wirkungen in der Pharmakologie und der Toxikologie²⁷. Dieses besagt, dass die Anzahl durch Geruchsstoffe belegte Rezeptoren ein Maß für die erzielten Effekte ist. Für eine Abschätzung der Intensität von Gerüchen kann folgedessen ein Ausbreitungsmodell, gekoppelt mit einem Okkupationsmodell verwendet werden^{28,29}. Nicht unerwartet ist der Logarithmus auch in der Ökologie von Bedeutung, wenn es um die Fettlöslichkeit, die Lipophile, geht, der $\log(P_{ow})$ -Wert. Diese ist mit ganz entscheidend, wie stark die Anreicherung in der Nahrungskette ist.

Folgerung:

Die Dosis-Wirkungs-Kurve für Wirkstoffe und Substrate, berechnet mit der Okkupationstheorie, kann mit einer logarithmischen Funktion sehr gut angepasst werden⁷. Die Übereinstimmung ist nicht schlechter als die vom Weber-Fechnerschen-Gesetz mit den verfügbaren experimentellen Daten.

5. Interpretation

Die Nernstsche Gleichung liefert den physikalisch-chemischen Hintergrund, wie Veränderungen von Ionenkonzentrationen zu logarithmischen Nervenreizen führen. Das Okkupationsmodell kann chemisch-biochemisch die logarithmischen Effekte auf eine lineare Zunahme der Dosis der Wirkstoffe (Pharmakologie, Toxikologie, Ökologie) und er Substrate (Enzymologie) sehr gut nachbilden. Damit stehen zwei Modelle bereit, um die Ursache für das weit verbreitete logarithmische Verhalten des Weber-Fechnerschen-Gesetzes chemisch zu erklären.

Der Logarithmus ist in der Chemie nicht nur beim pH-Wert wichtig, er begleitet uns im Alltag überall hin, wo wir unsere Sinne gebrauchen.

6. Aufgabe

Von Kochsalz wurden folgende Daten durch Testen mit der Zunge ermittelt³⁰; entspricht diese Messung dem Weber-Fechnerschen Gesetz?

Stimulus Konzentration von NaCl (Gewichts % in Wasser)	Intensität des Reizes (salzig)
2.5	2
4	12
6.6	25
11	33
18	41
26	50

Tabelle: Bestimmung des salzigen Geschmacks, abhängig von der Konzentration in Wasser

Experimente:

Geschmack: Verdünnungsreihen in Wasser von Zucker, Salz, Essigsäure (Sensorik). Vorgehen: Man verdünnt konzentriertere Lösungen so lange, bis sie im Geschmack einer schwachen Normlösung entsprechen.

Geruch: Verdünnungsreihen in Wasser von Essig, Alkohol durch Stoffe die mindestens teilweise wasserlöslich sind (die Konzentration der Gase über der Flüssigkeit ist proportional der Konzentration in der Flüssigkeit, Henry-Gesetz).

Mit jedem guten, grafikfähigen Rechner lassen sich dann die Ergebnisse mit den Modellen überprüfen.

Literatur

Die umfangreiche Literaturliste finden Sie in der Online-Version dieses Artikels in der Materialdatenbank.

Autor

Prof. Dr. Peter Bützer,
Pädagogische Hochschule St.Gallen (CH)
peter.buetzer@gmail.com

⁶ Sehr ähnlich sind in der Physiologie die Sauerstoffbindung an Hämoglobin, in Mikrobiologie die Monod-Gleichung und bei Oberflächen die Langmuir-Gleichung.

⁷ Eine Erweiterung des Modells mit Mehrfachbesetzung a der Rezeptoren ist möglich, dann ist die Übereinstimmung des Okkupationsmodells mit der logarithmischen Funktion von $0.8 < a < 1.2$ sehr gut.

Die Leiden des jungen Käfers

Armin P. Barth

 Das Schicksal, das der Protagonist dieser Geschichte erleidet, ist wahrlich grausam. Es handelt sich um einen Käfer namens Karl. Das Grausame liegt aber nicht so sehr an seinem Namen als an der Tatsache, dass er eine überaus langwierige Wanderung voller Frustration hinter sich bringen muss, die am linken Ende eines Gummibandes beginnt und erst endet, wenn das rechte Ende erreicht ist. Im Gegensatz zur Abbildung 1 müssen wir uns Karl punktförmig vorstellen, er wandert mit einer konstanten Geschwindigkeit von 1 Zentimeter pro Sekunde, und das Gummiband ist (anfänglich) 1 Meter lang. Das Grausame besteht nun darin, dass nach jeder Sekunde das Band *instantan* (also ohne Zeitverlust) und wie durch Zauberhand um einen weiteren Meter nach rechts hin gestreckt wird. Die Frage ist, ob – und gegebenenfalls wann – Karl das rechte Ende des ständig sich dehrenden Bandes erreichen kann.

Diese Aufgabe ist nicht neu. Sie geht auf Martin Gardner zurück und kann in [1] nachgelesen werden. Wir bereiten sie hier so auf, dass ihre Behandlung am Gymnasium sowohl einen mathematischen Gewinn als auch einen Gewinn im Zusammenhang mit der Beherrschung des Taschenrechners ermöglicht.

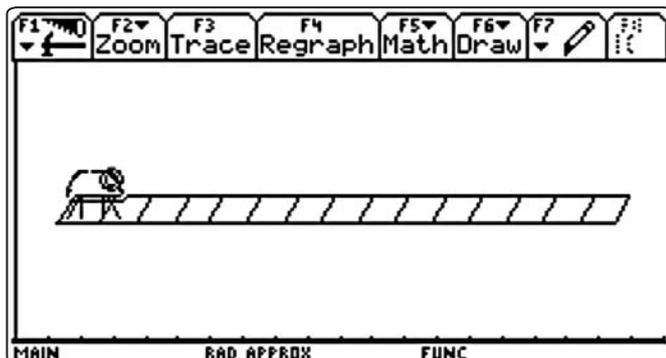


Abb. 1

Beim ersten oberflächlichen Hinsehen ist der Gedanke nah, dass Karls Wanderung niemals enden wird, weil das rechte Bandende uneinholbar und rasend schnell in die Ferne rückt. Und tatsächlich sind die ersten Berechnungen mehr als unerfreulich: Wir notieren hier einmal die Entfernung des Käfers zum linken Bandende wie auch zum rechten und zwar jeweils vor der Streckung und im Sekundentakt:

Nach der 1. Sekunde hat Karl 1 cm zurückgelegt, und es warten noch 99 cm auf ihn.

Nach der 2. Sek. ist Karl $2 \cdot 1 + 1 = 2 \cdot (1 + 0,5) = 3$ cm vom linken Ende – Die Verdoppelung erfolgt durch die Bandstreckung! – und $2 \cdot 100 - 3 = 197$ cm vom rechten Ende entfernt.

Nach der 3. Sek. ist Karl

$$\frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) + 1 = 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 5,5 \text{ cm}$$

vom linken Ende – Diesmal wird das Band um den Faktor 1,5 gestreckt! – und $3 \cdot 100 - 5,5 = 294,5$ cm vom rechten Ende entfernt.

Nach der 4. Sekunde ist Karl

$$\frac{4}{3} \cdot 3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + 1 = 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = 8,3 \text{ cm}$$

vom linken Ende – Diesmal wird das Band um den Faktor $\frac{4}{3}$ gesteckt! – und $4 \cdot 100 - 8,3 = 391,6$ cm vom rechten Ende entfernt.

Allgemein gilt also: Nach t Sekunden (und unmittelbar vor der jeweiligen Streckung) befindet sich Karl

$$dl(t) := t \cdot \sum_{i=1}^t \frac{1}{i} \text{ cm} \quad (1)$$

vom linken Ende und

$$dr(t) := t \cdot 100 - dl(t) \text{ cm} \quad (2)$$

vom rechten Ende entfernt. (Dabei steht dl für „Distanz links“ und dr für „Distanz rechts“.)

Hat man die Formel einmal erarbeitet, kann man leicht ein kleines Taschenrechner-Programm schreiben, das uns in schneller Folge konkrete (und entmutigende) Zahlen liefert. Abbildung 2 zeigt den zentralen Teil des Programms, das nacheinander die Werte dl und dr anzeigt. Abbildung 3 zeigt den Output des Programms nach 30maligem Drücken der Enter-Taste.

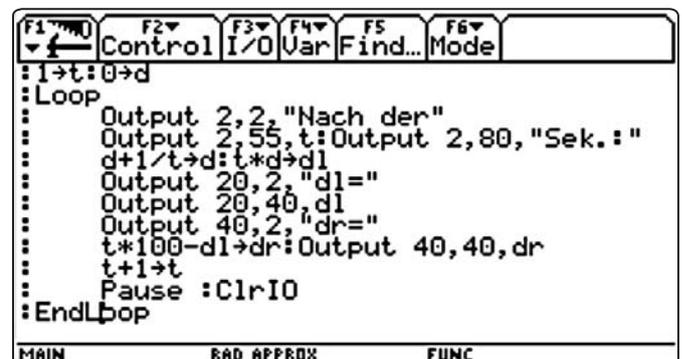


Abb. 2

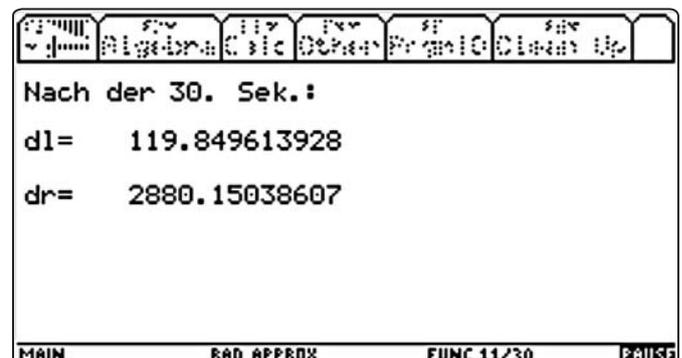


Abb. 3

Karls grausames Schicksal scheint besiegelt; das rechte Bandende scheint nicht nur unerreichbar zu sein, es vergrößert seinen Abstand vom Käfer auch in Schwindel erregendem Tempo. Oder doch nicht? Wir rücken dem Problem mit etwas mehr Mathematik zu Leibe! Zunächst einmal ist der Umgang mit der harmonischen Reihe beschwerlich. Kann man das nicht vereinfachen? Abbildung 4 macht deutlich, dass Folgendes gilt: Die harmonische Reihe kann als Summe der Flächeninhalte der abgebildeten Rechtecke aufgefasst werden, die ja alle Breite 1 haben und die man sich nach rechts hin beliebig weit fortgesetzt denkt.

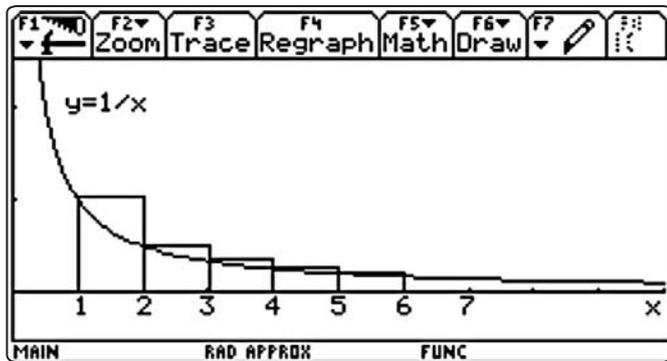


Abb. 4

Es folgt also:

$$\sum_{i=1}^t \frac{1}{i} > \int_1^{t+1} \frac{1}{x} dx > \int_1^t \frac{1}{x} dx = \ln(x) \Big|_1^t = \ln(t)$$

Der Fehler, den wir machen, wenn wir anstatt mit der von Hyperbel und x-Achse eingeschlossenen Fläche mit den Rechtecken rechnen, ist nicht sehr groß. Bekanntlich gilt ja

$$\gamma := \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^t \frac{1}{i} - \ln(t) \right) = 0.5772... \quad (3)$$

Diese sog. *Euler-Konstante* (vgl. auch [2]) können wir benutzen, um dr zwar approximativ, dafür aber viel einfacher zu berechnen. Aus (3) folgt ja, dass für große t gilt:

$$\sum_{i=1}^t \frac{1}{i} \approx \ln(t) + \gamma$$

Mit (1) und (2) schliessen wir, dass

$$dr(t) = t \cdot \left(100 - \sum_{i=1}^t \frac{1}{i} \right) \approx t \cdot (100 - \ln(t) - \gamma) \quad (4)$$

Die für Karl so entscheidende Frage ist nun, ob diese Funktion für $t > 0$ jemals den Wert 0 liefert und gegebenenfalls wann? Verblüffend daran ist, dass der erste (unkritische) Versuch, sich den Graphen von $dr(t)$ anzuschauen, den Betrachter mit großer Wahrscheinlichkeit in die Irre führt. Der Graph scheint nämlich einer geraden Linie ähnlich zu sein und für alle Ewigkeit anzuwachsen, wie Abbildung 5 zeigt.

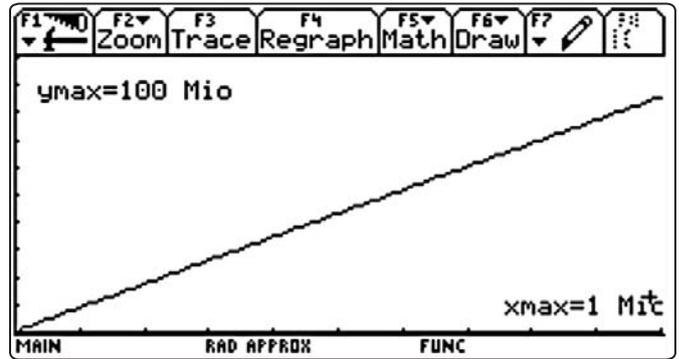


Abb. 5

Erst wenn man wirklich große obere Grenzen setzt, offenbart der Graph sein wahres Gesicht (Abb. 6).

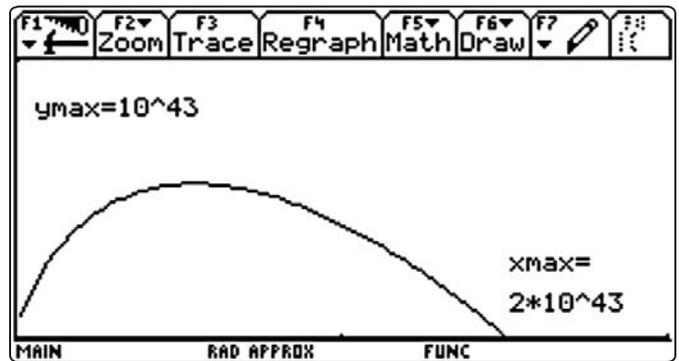


Abb. 6

Spätestens jetzt scheint es angebracht, im Unterricht die Funktion $dr(t)$ (in beiden Erscheinungen (2) und (4)) mit mathematischen Argumenten zu analysieren, um ganz klar zu machen, dass für $t > 0$ eine Nullstelle existieren muss.

Karl erreicht das rechte Ende also doch. Trotz der frohen Botschaft ist sein Schicksal grausam, und das wird sofort klar, wenn man berechnet, wie viel Zeit bis zu seiner Ankunft verstrichen sein wird. Aus (4) folgt, dass die Nullstelle der Funktion $dr(t)$ erreicht ist, sobald $100 - \ln(t) - \gamma = 0$, also sobald $t = e^{100-\gamma} \approx 1.5 \cdot 10^{43}$ Sek.

Karl müsste ein wahrhaft „metusalemischer“ Käfer sein, wenn er diese Wanderung zu Lebzeiten beenden möchte, er wäre nämlich über $4 \cdot 10^{35}$ Jahre unterwegs!

Literatur:

- [1] Martin Gardner: The Rubber Rope: Time Travel and Other Mathematical Bewilderments; MAA, Washington (DC), 2005
- [2] Th. P. Dence, J. B. Dence: A Survey of Euler's Constant; in: Mathematics Magazine, Vol. 82, NO. 4, October 2009

Autor:

Dipl. Math. Armin P. Barth
 Kantonsschule Baden (CH)
armin.barth@bluewin.ch, www.armin-p-barth.ch

Mathematische Experimente in der Optik

Dr. Alfred Roulier



Mit seiner reichen Funktionspalette ermöglicht der TI-Nspire™ CAS einen mathematisch-experimentellen Zugang zur geometrischen Optik. Wir besprechen nachfolgend das Zusammenführen (Fokussieren) von Strahlen und entwickeln ein Werkzeug, mit welchem der Strahlengang durch optische Grenzflächen berechnet werden kann. Damit kann man beispielsweise Linsen(systeme) und ihre Abbildungseigenschaften untersuchen.

Als Vorkenntnisse sind die Vektorrechnung und das Brechungsgesetz nötig. Die TI-Nspire™ CAS Unterlagen zu den genannten Themen sind in den Problemen 1 und 2 des Dokuments *optexp 1 Teil.tns* enthalten:

Problem 1: Fokussieren

Eine zwingende Eigenschaft optischer Systeme ist die Fähigkeit, Strahlen zu bündeln. Dabei stellt sich die Frage, welche Form dazu die optischen Grenzflächen haben müssen. Zur Beantwortung betrachten wir zunächst folgende Ausgangslage:

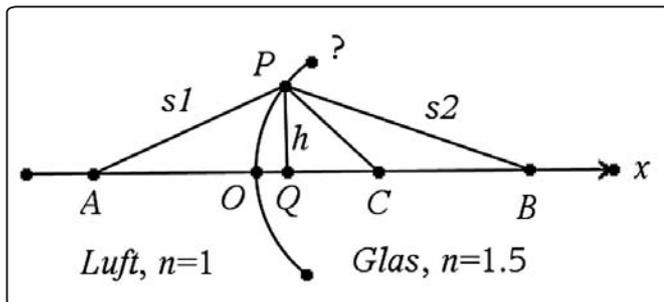


Abb. 1

Ein Lichtstrahl gehe von A aus und treffe eine Glasfläche bei P. Er werde dort gebrochen und erreiche B. P sei variabel und habe die Koordinaten $(x|y)$ mit Ursprung in O, d.h. wir beschränken uns auf 2 Dimensionen.

Die entscheidende und auch fundamentale physikalische Überlegung ist diese: Es werden dann alle von A ausgehenden Strahlen in B gesammelt, wenn jeder Strahl die gleiche Laufzeit von A über P nach B hat. Die Lichtgeschwindigkeit in Luft ist c , in Glas aber c/n . Die genannte Bedingung lautet somit:

$$s_1/c + n \cdot s_2/c = \text{konstant} \quad (1)$$

Wir multiplizieren mit c , setzen $AO = -a$ und $OB = b$ und erhalten so die Gleichung

$$\sqrt{y^2 + (x-a)^2} + n\sqrt{y^2 + (b-x)^2} = k \quad (2)$$

Die Konstante k folgt aus dem Fall $x = y = 0$ und beträgt $k = n \cdot b - a$. Somit lautet die Funktionsgleichung der Grenzkontur

$$f(x,y) = \sqrt{y^2 + (x-a)^2} + n\sqrt{y^2 + (b-x)^2} - nb + a \quad (3)$$

Dies ist eine ziemlich komplizierte implizite Form 4. Ordnung. Um Werte y in Funktion von Werten x zu erhalten, müssen wir die Gleichung $f(x,y) = 0$ lösen. Das erledigen wir im Programm *fläche(a,b,n)* numerisch über den Befehl *zeros(...)* und erzeugen eine Liste von 20 Punkten $\{x[i],y[i]\}$. Als Beispiel wählen wir $a = -10$, $b = 20$ und $n = 1.5$ und bilden die Liste als Streu-Plot in Abb. 3 ab.

```

Define fläche(p,b,n)=
Prgm
Local i,x,y
© exakte Form berechnen
For i,1,20
y:=0.25*(i-1)
y1[i]:=y
lsg:=zeros(sqrt(y^2+(x-a)^2)+n*sqrt(y^2+(b-x)^2)-n*b+a,x)
x1[i]:=lsg[1]
EndFor
© Näherungskreis berechnen
r:=(a*b*(n-1))/(n*a-b)
Disp "Radius Näherungskreis ",r
kreis(x):=sqrt(r^2-(x-r)^2)
EndPrgm
    
```

Abb. 2

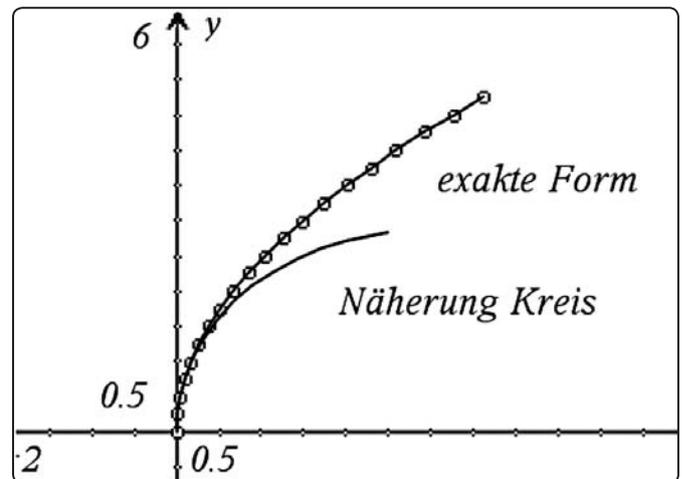


Abb. 3: fläche(-10,20,1.5)

Optische Linsen mit der exakten Form sind schwierig herzustellen. Deshalb behilft man sich mit Kugelflächen (sphärische Linsen) als Näherung für Strahlen nahe der optischen Achse.

Kugelflächen mit welchem Radius?

Die Krümmung im Punkt $\{0,0\}$ kann man zwar differential-geometrisch aus (3) bestimmen. Aber dieses Werkzeug steht wahrscheinlich noch nicht zur Verfügung. Daher wird folgender Weg vorgeschlagen:

Der optische Weg von m A nach B soll, wie oben gesagt, über P gleich lang sein wie längs der optischen Achse über OQC.

$$s_1 + n s_2 = AO + n OQ + n QB \quad (4)$$

Weil wir für die Näherung nur Punkte P nahe der optischen Achse betrachten, so dass $h \ll s_1$ und s_2 ist, nutzen wir die Beziehung $(1 + \epsilon)^n \approx 1 + n \epsilon$ für kleine ϵ . Damit und mit $PC = R$ lauten die rechten Summanden :

$$OQ = R - \sqrt{R^2 - h^2} = R - R \sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}} \approx R - R \left(1 - \frac{h^2}{2R^2}\right) = \frac{h^2}{2R} \quad (5)$$

$$QB = \sqrt{s_2^2 - h^2} = s_2 \sqrt{1 - \frac{h^2}{s_2^2}} \approx s_2 \left(1 - \frac{h^2}{2s_2^2}\right) = s_2 - \frac{h^2}{2s_2} \quad (6)$$

$$AO = AQ - OQ = \sqrt{s_1^2 - h^2} - \frac{h^2}{2R} \approx s_1 - \frac{h^2}{2s_1} - \frac{h^2}{2R} \quad (7)$$

(5) - (7) in (4) eingesetzt und umgruppiert ergibt:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{n}{s_2} = \frac{n-1}{R} \quad (8)$$

Weil diese Beziehung für alle Punkte P nahe an der optischen Achse gilt, also auch für diese selbst, kann man s_1 durch $-a$ und s_2 durch b ersetzen und erhält für den Radius des Näherungskreises

$$R = \frac{ab(n-1)}{na-b}$$

mit den in Abb. 3 verwendeten Zahlen $R = 2.86$.

Der hier untersuchte Sachverhalt ist in der Fotopraxis wohl bekannt: man arbeitet mit kleinen Blenden, wenn Schärfentiefe verlangt ist, was nichts anderes bedeutet, als dass man sich auf den Bereich beschränkt, wo die Kugelfläche nur unwesentlich von der wahren Kontur abweicht.

Problem 2: Brechung

Wir studieren als nächstes die Lichtbrechung an sphärischen Grenzflächen in 3 Dimensionen.

Ein Lichtstrahl gehe von P aus mit den Richtungskomponenten rp . Er treffe in Q auf die Grenzfläche, werde zur dortigen Normalen rn hin dem Brechungsgesetz entsprechend abgelenkt und laufe weiter mit den Richtungskomponenten rq . Unser Ziel ist, den Punkt Q und den Vektor rq zu berechnen.

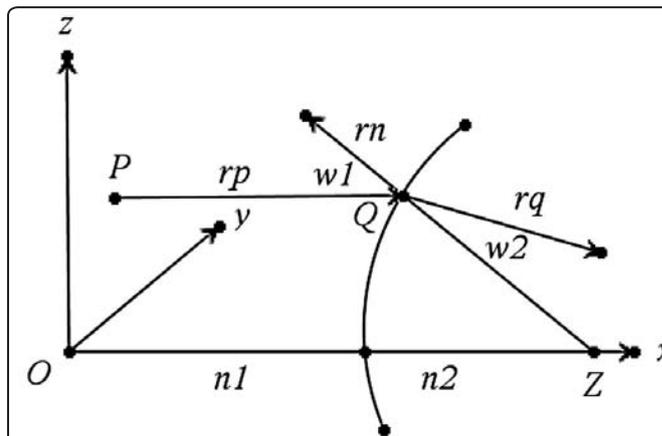


Abb. 4

Diesen Vorgang betrachten wir als Modul, das längs eines optischen Systems mehrmals hintereinander angewendet werden kann. Daher ist im Ordner **MyLib** das Dokument **geomoptik.tns** abgespeichert. Es enthält das Programm **grundmodul** (*kp,rp,ksp,rad,n1,n2,ind*), welches in Programmen zur Systemberechnung als Unterprogramm mit dem Befehl `geomoptik\grundmodul(...)` aufgerufen werden kann. Dieses Programm erklären wir nun Schritt für Schritt (siehe Tabelle am Ende des Artikels).

Wir können nun mit dem Grundmodul die im Zahlenbeispiel des Problems 1 untersuchte Annäherung der idealen Grenzflächenform durch eine Kugelfläche quantifizieren, d.h. mit anderen Worten das Ausmass der sphärischen Aberration erfassen.

In der in Abb. 1 dargestellten Situation sollen 3 Strahlen vom Punkt $A(-10|0|0)$ auf der optischen Achse ausgehen, und wir prüfen, ob sie sich im Punkt $B(20|0|0)$ vereinigen. Die 3 Strahlen sollen die Abgangswinkel $0.57, 1.43$ und 6.95 Grad haben, so dass sie die Kugelfläche ungefähr bei $0.1, 0.25$ und 1.25 über der optischen Achse treffen. Der Kugelradius sei, wie in Problem 1 berechnet 2.86 , der Brechungsindex 1.5 . Mit den im Grundmodul verwendeten Bezeichnungen liegt dann der Schnittpunkt des gebrochenen Strahls mit der optischen Achse bei $x = kq[3]*rq[1]/rq[3]$.

Die 3 Berechnungen sind in Abbildung 5 am Ende des Artikels dargestellt.

Wie erwartet werden Strahlen mit grossem Abgangswinkel stärker gebrochen, weil, wie Abb. 3 zeigt, sich dann die stärkere Krümmung der Kugelfläche gegenüber der idealen Kontur deutlich auswirkt. In unserem Beispiel würden Blenden mit einem Radius $< 10 - 15\%$ des Kugelradius noch gute Resultate zulassen.

Wir sind nun in der Lage, den Strahlengang durch beliebige Systeme mit sphärischen Flächen zu berechnen, indem wir das Grundmodul so oft hintereinander anwenden wie Grenzflächen vorgegeben sind. In einem 2. Teil werden wir derart den Strahlengang durch eine Linse berechnen und damit den Abbildungsvorgang untersuchen.

Programmschritte	Kommentar
Define LibPub grundmodul(kp, rp, ksp, rad, n1, n2, ind)= Prgm	kp ist die 3-spaltige Liste der Koordinaten von P, rp jene der Richtungskoeffizienten. ksp ist der Scheitelpunkt der Kugelfläche auf der x-Achse, rad deren Radius. n1 ist der Brechungsindex vor, n2 jener nach der Grenzfläche. ind ist der Krümmungsindex, -1 im konvexen, +1 im konkaven Fall.
kkz:={ksp-ind*rad,0,0} lsg:=zeros(dotP({(kp+lamb*rp-kz),(kp+lamb*rp-kz)}-rad^(2),lamb)	Die Koordinaten kq des Schnittpunkts Q werden berechnet. kz sind die Koordinaten des Kugelzentrums Z. Das Skalarprodukt der Vektorsumme OP+PQ-OZ mit sich selbst muss rad ² ergeben. Die Länge des Vektors PQ ist zunächst unbekannt, und die Variable lamb wird daher im Befehl zeros (...) berechnet.
If ind=-1 Then Else EndIf kq:=kp+rp*min(lsg[1],lsg[2]) kq:=kp+rp*max(lsg[1],lsg[2])	Weil es 2 Durchstosspunkte durch eine Kugel gibt, ist lsg eine Liste mit 2 Elementen. Im Fall „konvex“ muss man den kleineren Wert nehmen, andernfalls den grösseren.
$rn := \frac{(kq - kz)}{\text{dotP}(\{kq - kz\}, \{kq - kz\})}$	Nun werden die Richtungskomponenten rn der Kugelnormalen in Q ermittelt.
w1:=ArcCos(dotP(rp,ind*rn))	Aus dem Skalarprodukt der Richtungskomponenten rp und rn kann man den Winkel w1 ableiten. Mit ind wird dabei das richtige Vorzeichen von rn sichergestellt.
w2:=ArcSin(n1*sin(w1)/n2)	Der Winkel w2 nach der Brechung.
a1:=xx-ind*rn[1]-k*rp[1] a2:=yy-ind*rn[2]-k*rp[2] a3:=zz-ind*rn[3]-k*rp[3] a4:=(xx*ind*rn[1]+yy*ind*rn[2]+zz*ind*rn[3])^(2)-(xx^(2)+yy^(2)+zz^(2))*(cos(w2))^2 lsg:=zeros({a1,a2,a3,a4},{xx,yy,zz,k})	Schließlich folgen die normierten Richtungskomponenten xx, yy,zz des Vektors rq nach der Brechung. Aus den Bedingungen (1) die Vektoren rp, rn und rq liegen in einer Ebene, d.h. $k*rp = rn + rq$ und (2) die Vektoren rn und rq schliessen den Winkel w2 ein ergeben sich 4 Gleichungen für die Richtungskomponenten von rq und den (unwesentlichen) Parameter k.
If ind=-1 Then Else EndIf EndPrgm hh:=sqrt(lsg[1,1]^2+lsg[1,2]^2+lsg[1,3]^2) rq:={lsg[1,1]/hh, lsg[1,2]/hh, lsg[1,3]/hh} hh:=sqrt(lsg[2,1]^2+lsg[2,2]^2+lsg[2,3]^2) rq:={-lsg[2,1]/hh, -lsg[2,2]/hh, -lsg[2,3]/hh}	Wiederum muss man die Fälle „konvex“ und „konkav“ unterscheiden. hh ist eine Hilfsgrösse.

kp={-10,0,0} rp={cos(0.57),0,sin(0.57)} rad=2.86 ind=-1	-1
geomoptikgrundmodul(kp, rp, 0, rad, 1, 1.5, ind)	Fertig
Disp kq, " ,rq	{0.0017,0,0.0995} {1,0,-0.005}
	Fertig
kq[3]-rq[1] rq[3]	20.01
kp={-10,0,0} rp={cos(1.43),0,sin(1.43)} rad=2.86 ind=-1	-1
geomoptikgrundmodul(kp, rp, 0, rad, 1, 1.5, ind)	Fertig
Disp kq, " ,rq	{0.0109,0,0.2499} {0.9999,0,-0.0126}
	Fertig
kq[3]-rq[1] rq[3]	19.81
kp={-10,0,0} rp={cos(6.95),0,sin(6.95)} rad=2.86 ind=-1	-1
geomoptikgrundmodul(kp, rp, 0, rad, 1, 1.5, ind)	Fertig
Disp kq, " ,rq	{0.2897,0,1.254} {0.9966,0,-0.0827}
	Fertig
kq[3]-rq[1] rq[3]	15.11

Beilagen:

Zusammen mit der Online-Version dieses Artikels können Sie die TI-Nspire™ CAS Dokumente optexp 1.Teil.tns und geomoptik.tns von der Materialdatenbank herunterladen.

Autor

Dr. Alfred Roulier, Neuenegg (CH)

a.roulier@bluewin.ch

Abb. 5

Ortskurven

Wolfgang Moldenhauer, Wilfried Zappe



In Ergänzung zu unseren Überlegungen in den TI Nachrichten 1/07 (S. 26-28) und 2/08 (S. 27-31) betrachten wir die Ortskurven, die durch den Schnitt folgender Dreieckstransversalen (m: Mittelsenkrechte; s: Seitenhalbierende; w: Winkelhalbierende) entstehen:

1. $m_c \cap m_a$
2. $h_c \cap m_a$
3. $s_a \cap m_c$ und $m_b \cap s_a$
4. $w_\beta \cap m_c$ und $m_b \cap w_\beta$

Wir legen ein Dreieck ABC so in ein Koordinatensystem, dass $A(0|0)$, $B(1|0)$ und $C(t|1)$ mit $t \in \mathbb{R}$ gilt. Für die Koordinaten des jeweiligen Schnittpunktes S der Transversalen ermitteln wir eine Gleichung bezüglich dieser Vorgaben und vergleichen Sie mit der geometrisch erzeugten Ortskurve.

1. Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechter

O.B.d.A. wählen wir $m_c \cap m_a$. Eine Gleichung für m_c ist $x = 0,5$. Der Mittelpunkt M_a der Seite a hat die Koordinaten $M_a(0,5 \cdot (t+1) | 0,5)$. Der Anstieg von m_a ist:

$$m_a = \frac{-1}{BC} = \frac{-1}{\frac{-1}{1-t}} = 1-t$$

Damit ergibt sich als Gleichung für m_a :

$$y = f(x) = (1-t) \cdot \left(x - \frac{t+1}{2}\right) + \frac{1}{2} \quad (1)$$

Wegen $x = 0,5$ ergibt sich für den Schnittpunkt S:

$$\begin{aligned} y = f\left(\frac{1}{2}\right) &= (1-t) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{t+1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot (t^2 - t + 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{8} \geq \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Als Resultat ergibt sich der Schnittpunkt zu:

$$S\left(\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2} \cdot (t^2 - t + 1)\right)$$

Wegen $t \in \mathbb{R}$ ist der geometrische Ort in diesem Falle der zur y-Achse senkrechte Strahl $x = 0,5$ und $y \geq 3/8$. Der Wert $y = 3/8$ wird angenommen, wenn das Dreieck ABC gleichschenkelig ist. Veranschaulichung durch Konstruktion der Ortskurve (fett gezeichnet):

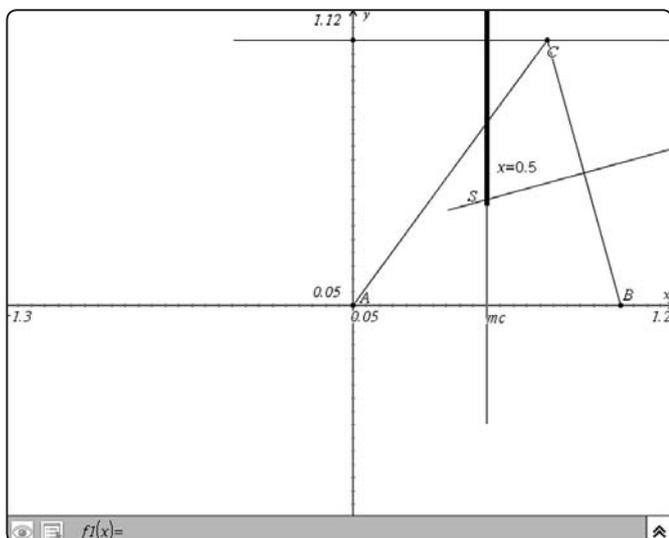


Abb. 1

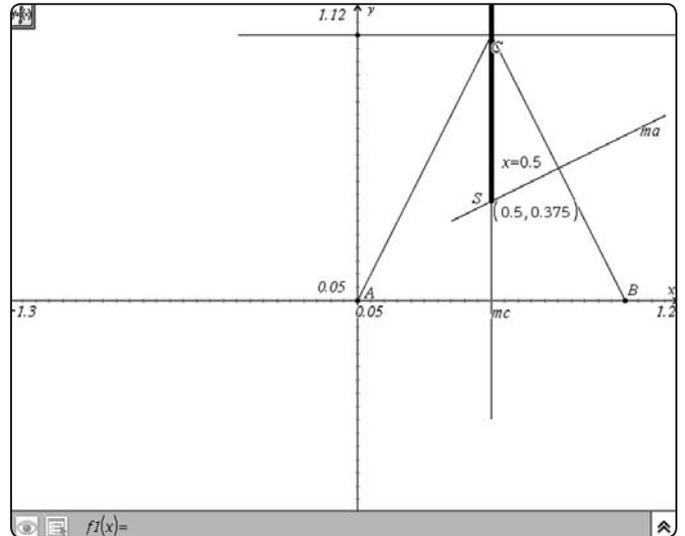


Abb. 2

2. Schnittpunkt von Mittelsenkrechter und Höhe

Da $m_c \cap h_c$ wenig Sinn macht (die Geraden sind identisch oder parallel), untersuchen wir o.B.d.A. $h_c \cap m_a$. Für h_c gilt die Gleichung $x = t$. Setzen wir dies in die Gleichung (1) für m_a ein, so erhalten wir:

$$y = f(t) = (1-t) \cdot \left(t - \frac{t+1}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cdot (t-1)^2 + \frac{1}{2} = (2-t) \cdot \frac{1}{2}$$

Die Ortskurve ist also eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel $P(1|0,5)$ und den Nullstellen $t_1=0$ sowie $t_2=2$. Veranschaulichung durch Konstruktion der Ortskurve (fett gezeichnet) und der Parabel $y = f(x) = 0,5 \cdot x \cdot (2-x)$ (im Abb. 4 punktiert gezeichnet):

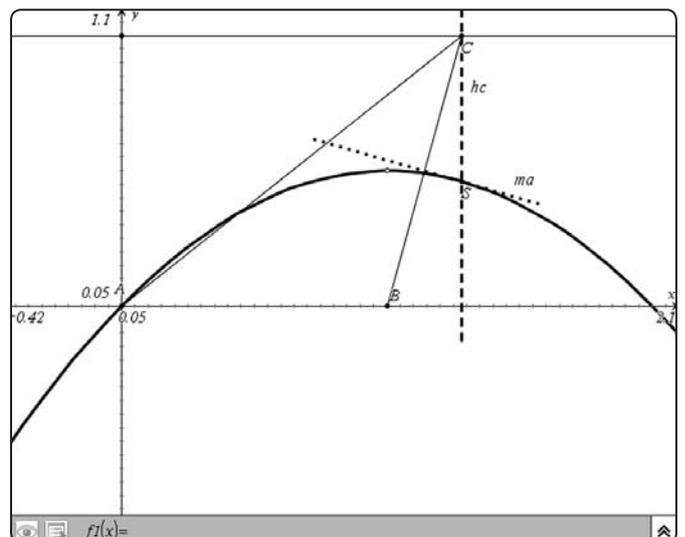


Abb. 3

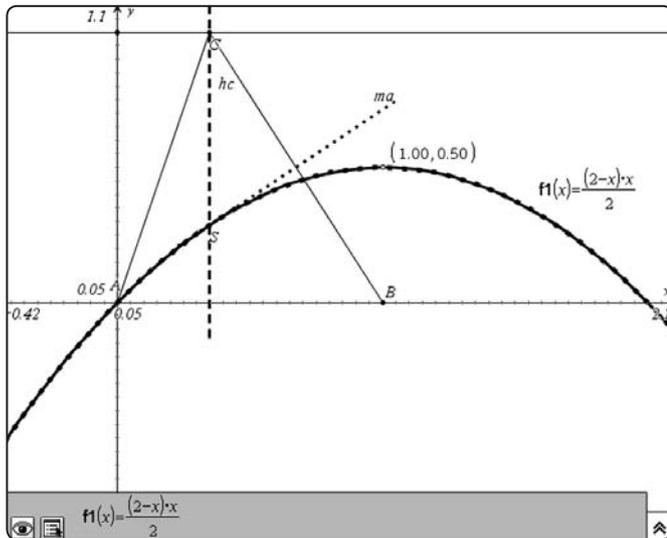


Abb. 4

3. Schnittpunkt von Mittelsenkrechter und Seitenhalbierender

Wir wählen zunächst $s_a \cap m_c$. Auf der Seitenhalbierenden s_a liegen die Punkte $A(0|0)$ und $M_a(0,5 \cdot (t+1) | 0,5)$. Dadurch ergibt sich als Gleichung für s_a :

$$y = f(x) = \frac{1}{t+1} \cdot x \tag{2}$$

Die Mittelsenkrechte m_c wird durch $x = 0,5$ beschrieben.

Für y gilt:

$$y = \frac{1}{2 \cdot (t+1)}$$

Mit $t \in \mathbb{R}$ ($t \neq -1$) ist also $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Alle Schnittpunkte von s_a und m_c liegen also auf der Geraden $x = 0,5$ mit Ausnahme von $P(0,5|0)$. Geometrische Konstruktion der Ortskurve:

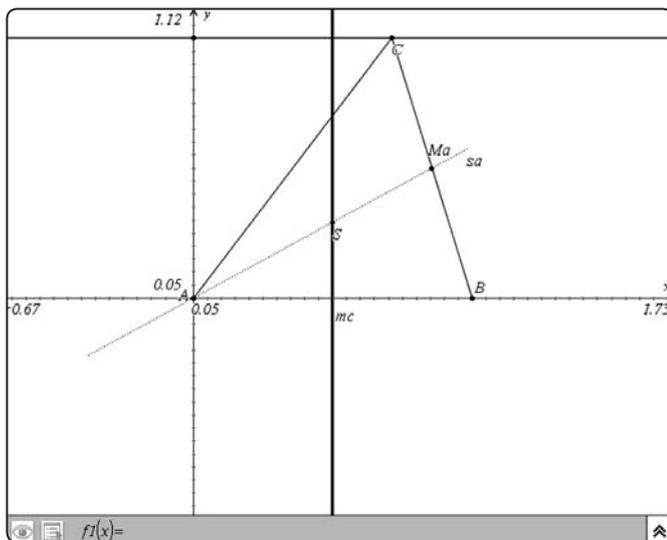


Abb. 5

Betrachten wir nun den Schnitt $m_b \cap s_a$: Der Mittelpunkt M_b der Seite b ist $M_b(0,5 \cdot t | 0,5)$. Der Anstieg der Mittelsenkrechten m_b ergibt sich zu:

$$\frac{-1}{m_{AC}} = \frac{-1}{t} = -t$$

Die Gleichung der Mittelsenkrechten m_b lautet:

$$y = f(x) = -t \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \tag{3}$$

Bringen wir m_b und s_a gemäß Gleichung (2) zum Schnitt, so ergibt sich:

Define $f(x) = -t \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$	Fertig
Define $g(x) = \frac{1}{t+1} \cdot x$	Fertig
solve($f(x) = g(x), x$)	$x = \frac{(t+1) \cdot (t^2+1)}{2 \cdot (t^2+t+1)}$
$f(x) x = \frac{(t+1) \cdot (t^2+1)}{2 \cdot (t^2+t+1)}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{t}{t^2+t+1}$
Define $x(t) = \frac{(t+1) \cdot (t^2+1)}{2 \cdot (t^2+t+1)}$	Fertig
Define $y(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{t^2+t+1}$	Fertig
$\frac{x(t)}{y(t)}$	$t+1$

Abb. 6

Aus der letzten Zeile erhalten wir

$$t = \frac{x}{y} - 1$$

Dies setzen wir ein in $y(t)$. Um Zirkeldefinitionen zu vermeiden, bezeichnen wir x mit xx und y mit yy . Der erhaltene Ausdruck wird noch etwas umgeformt, so dass sich schließlich die Gleichung $-2x^2y + x^2 + 2xy^2 - 2xy - 2y^3 + 2y^2 = 0$ ergibt:

$y \cdot \frac{xx}{yy} - 1 = yy$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{(xx-yy) \cdot yy}{2 \cdot (xx^2 - xx \cdot yy + yy^2)} = yy$
$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{(xx-yy) \cdot yy}{2 \cdot (xx^2 - xx \cdot yy + yy^2)}\right) \cdot 2 \cdot (xx^2 - xx \cdot yy + yy^2)$	$xx^2 - 2 \cdot xx \cdot yy + 2 \cdot yy^2 = 2 \cdot (xx^2 - xx \cdot yy + yy^2) \cdot yy$
factor($xx^2 - 2 \cdot xx \cdot yy + 2 \cdot yy^2 - 2 \cdot (xx^2 - xx \cdot yy + yy^2) \cdot yy = 0$)	$-(xx^2 \cdot (2 \cdot yy - 1) - 2 \cdot xx \cdot yy \cdot (yy - 1) + 2 \cdot yy^2 \cdot (yy - 1)) = 0$
expand($-(xx^2 \cdot (2 \cdot yy - 1) - 2 \cdot xx \cdot yy \cdot (yy - 1) + 2 \cdot yy^2 \cdot (yy - 1)) = 0$)	$-2 \cdot xx^2 \cdot yy + xx^2 + 2 \cdot xx \cdot yy^2 - 2 \cdot xx \cdot yy - 2 \cdot yy^3 + 2 \cdot yy^2 = 0$

Abb. 7

Die Ortskurve als geometrischer Ort konstruiert, ergibt das Bild in Abb.8. Die parametrisierte Darstellung in Abb.9 zeigt optisch eine Übereinstimmung des Kurvenverlaufs.

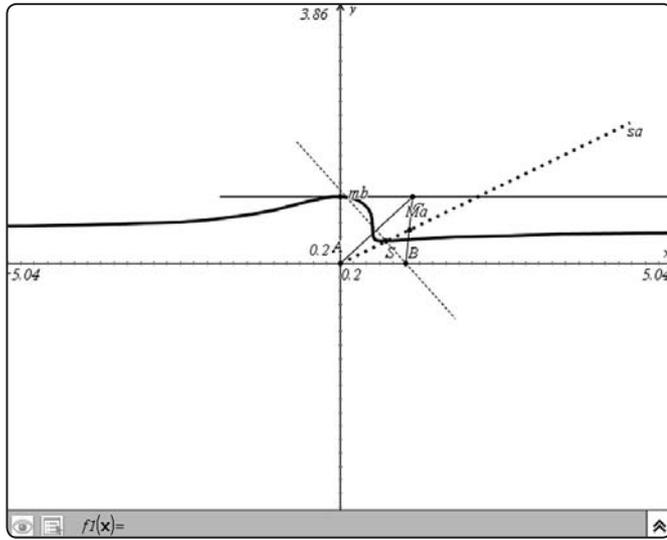


Abb. 8

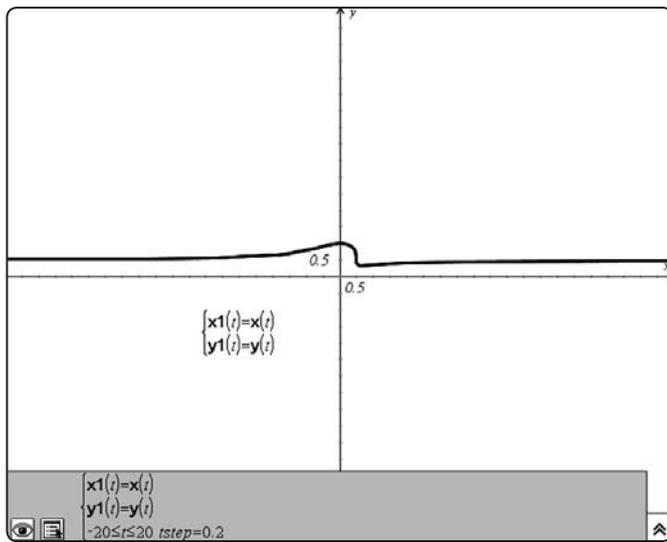


Abb. 9

4. Schnittpunkt von Mittelsenkrechter und Winkelhalbierender

Wir untersuchen zunächst $w_\beta \cap m_c$. Es ist anschaulich klar, dass alle Schnittpunkte auf der Mittelsenkrechten selbst und nur oberhalb der x-Achse liegen können, denn die Winkelhalbierende des Winkels $\angle CBA = \beta$ „überstreicht“ nur die Halbebene oberhalb der x-Achse. Ein rechnerischer Nachweis kann folgendermaßen geführt werden:

In „Wanderungen“ (TI-Nachrichten 2/08, S.29) haben wir gezeigt, dass sich die Winkelhalbierende w_β beschreiben lässt durch:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \frac{t-1}{\sqrt{t^2-2t+2}} - 1 \\ \frac{1}{\sqrt{t^2-2t+2}} \end{pmatrix} \text{ mit } r \in \mathbb{R}$$

Für die Mittelsenkrechte m_c gilt die Gleichung $x = 0,5$ oder in vektorieller Schreibweise:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$

Bringen wir diese Geraden zum Schnitt, so ergibt sich, wie die nachstehende Rechnung mit dem CAS zeigt, dass die Ortskurve die Gerade $x = 0,5$ mit $y > 0$ ist. Die geometrische Konstruktion bestätigt diese Rechnung. (Die Ortskurve ist fett und strichliert gezeichnet.)

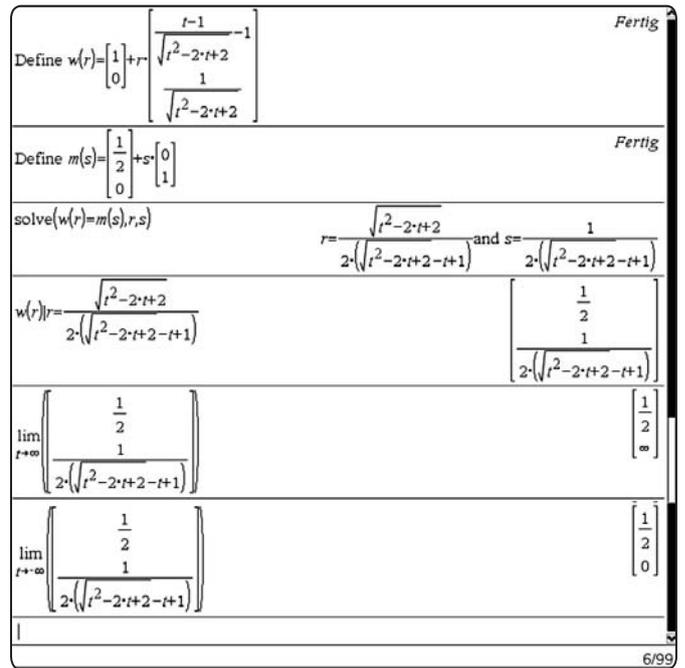


Abb. 10

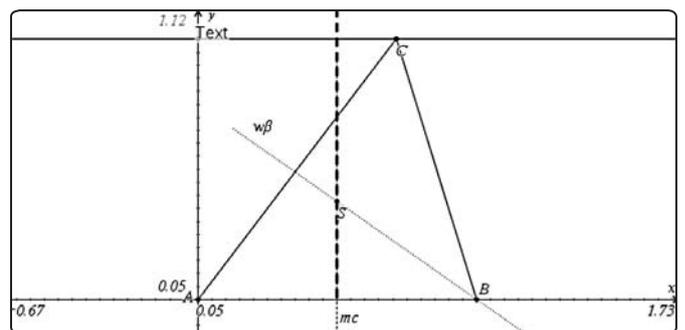


Abb. 11

Betrachten wir nun den Schnitt $m_b \cap w_\beta$. Der Schnittpunkt von $w(r)$ und $m_b(s)$ (gemäß Gleichung (3)) wird mit dem CAS ermittelt:

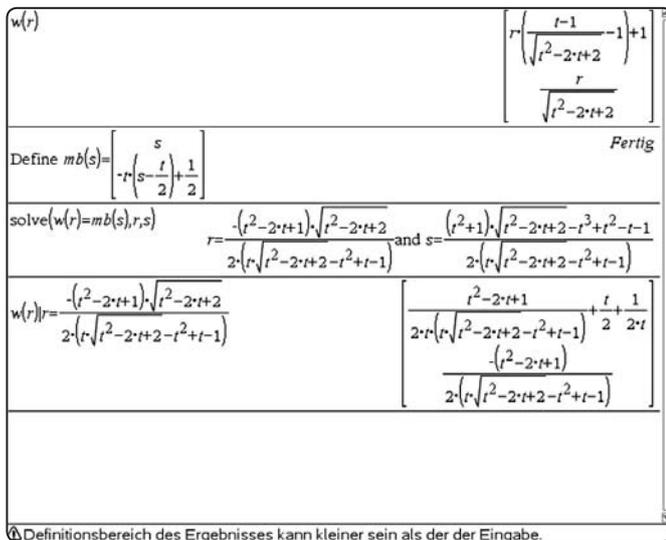


Abb. 12

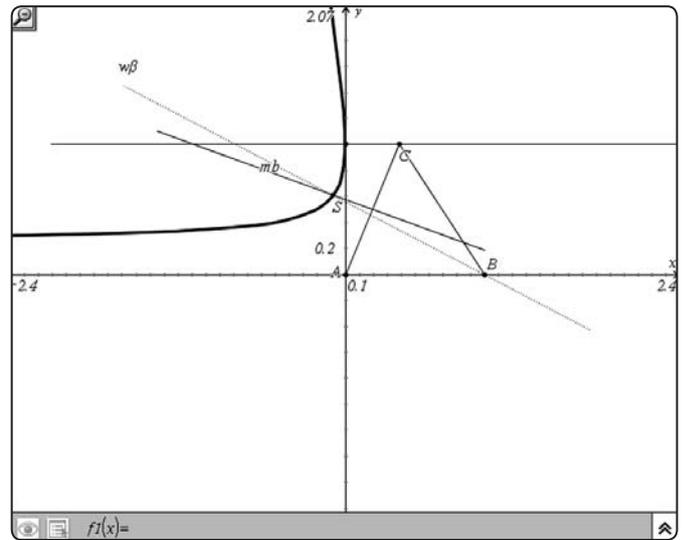


Abb. 15

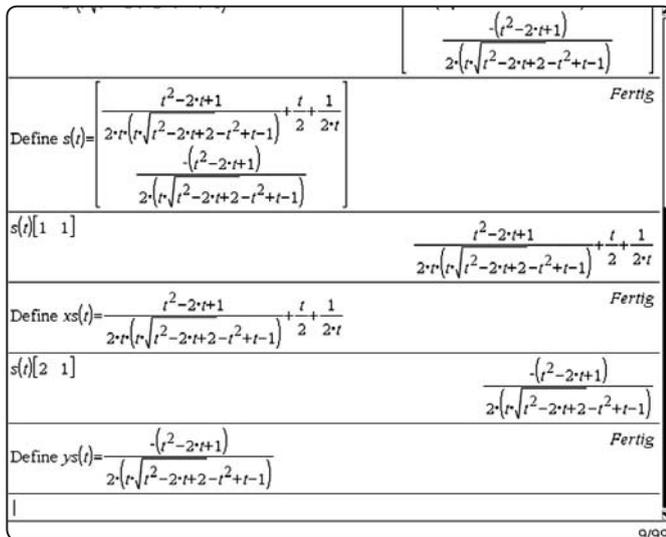


Abb. 13

Die Darstellung der parametrisierten Kurvengleichung entspricht optisch der geometrisch konstruierten Ortskurve.

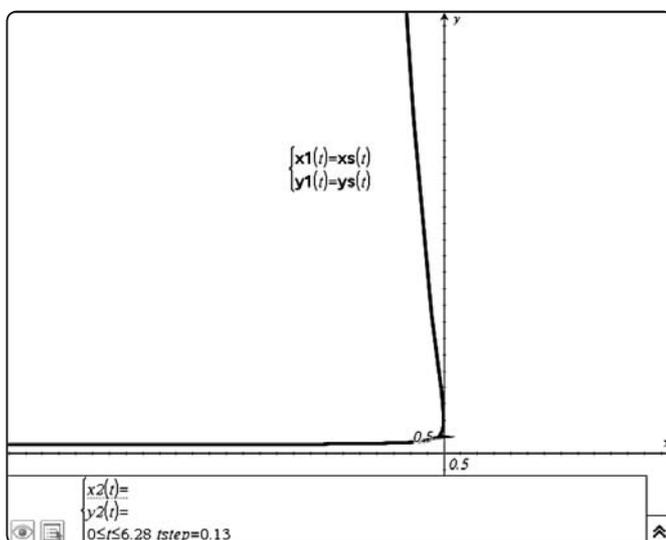


Abb. 14

Wir leiten nun eine parameterfreie Darstellung dieser Ortskurve her. Die Parameterdarstellung war (s. o.):

$$x = \frac{(t-1)^2}{2t \cdot \left(t \cdot \sqrt{(t-1)^2 + 1} - t^2 + t - 1 \right)} + \frac{t+1}{2} + \frac{1}{2t}$$

$$y = \frac{-(t-1)^2}{2 \cdot \left(t \cdot \sqrt{(t-1)^2 + 1} - t^2 + t - 1 \right)}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} & \left(t \cdot \sqrt{(t-1)^2 + 1} - (t^2 - t + 1) \right) \cdot \left(t \cdot \sqrt{(t-1)^2 + 1} + (t^2 - t + 1) \right) \\ &= -(t-1)^2 \end{aligned}$$

Dies lässt sich mit dem Rechner nachprüfen:

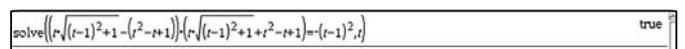


Abb. 16

Wenn wir also Zähler und Nenner bei x und y jeweils mit

$$\left(t \cdot \sqrt{(t-1)^2 + 1} + (t^2 - t + 1) \right)$$

erweitern, so erhalten wir nacheinander

$$x = -\frac{(t-1)^2 \cdot \left(t \cdot \sqrt{(t-1)^2 + 1} + (t^2 - t + 1) \right)}{2t \cdot \left[-(t-1)^2 \right]} + \frac{t^2 + 1}{2t}$$

$$= \frac{1}{2t} \cdot \left(-t \cdot \sqrt{(t-1)^2 + 1} - t^2 + t - 1 + t^2 + 1 \right)$$

$$x = \frac{t}{2t} \cdot \left(1 - \sqrt{(t-1)^2 + 1} \right)$$

(4)

$$y = \frac{1}{2} \cdot \left(t \cdot \sqrt{(t-1)^2 + 1} + (t^2 - t + 1) \right) \cdot \frac{-(t-1)^2}{-(t-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(t^2 - t + 1 + t \cdot \sqrt{(t-1)^2 + 1} \right)$$

$$y = \frac{1}{4} \cdot \left(t + \sqrt{(t-1)^2 + 1} \right)^2 \tag{5}$$

Rechnerischer Nachweis für den vorigen Umformungsschritt:

```
solve(1/2*(t^2-t+1+t*sqrt((t-1)^2+1))-1/4*(t+sqrt((t-1)^2+1))^2,t) true
```

Abb. 17

Gleichung (4) ist äquivalent mit

$$\sqrt{(t-1)^2 + 1} = 1 - 2x \geq 0,$$

also ist $x \leq 0,5$ notwendig. Quadrieren liefert:

$$(t-1)^2 = (1-2x)^2 - 1 = 4x \cdot (x-1) \geq 0.$$

Zusammen mit $x \leq 0,5$ folgt also sogar $x \leq 0$. Für $t \geq 1$ ergibt das Radizieren:

$$t = 1 + 2 \cdot \sqrt{x \cdot (x-1)}$$

Für $t < 1$ erhält man

$$t = 1 - 2 \cdot \sqrt{x \cdot (x-1)}.$$

Diese Resultate führen, eingesetzt in (5), auf

$$y = \frac{1}{4} \cdot \left(t + \sqrt{(t-1)^2 + 1} \right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + 2 \cdot \sqrt{x \cdot (x-1)} + 1 - 2x \right)^2$$

$$y = \left(1 - x + \sqrt{x \cdot (x-1)} \right)^2 \text{ für } t \geq 1,$$

und analog auf

$$y = \left(1 - x - \sqrt{x \cdot (x-1)} \right)^2 \text{ für } t < 1.$$

Natürlich ist in beiden Fällen $x \leq 0$. Die Visualisierung über die graphische Darstellung als parametrische Darstellung (punktirt) und als Funktion zeigt Übereinstimmung!

```
Define xs(t):= (t^2-2*t+1) / (2*t*sqrt(t^2-2*t+2-t^2+t-1)) + t/2 - 1/2 Fertig
Define ys(t):= (t^2-2*t+1) / (2*sqrt(t^2-2*t+2-t^2+t-1)) Fertig
```

Abb. 18

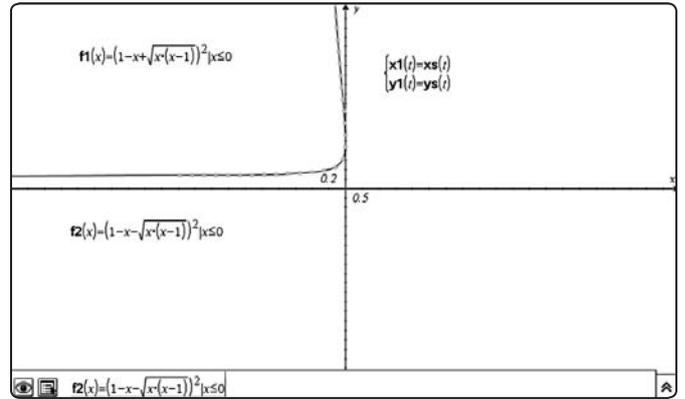


Abb. 19

Zum Schluss:

Wir zeichnen die Ortskurven $m_b \cap w_\beta$ und $m_a \cap w_\beta$ in ein und dasselbe Koordinatensystem und finden eine erstaunliche Ähnlichkeit beider Kurven!

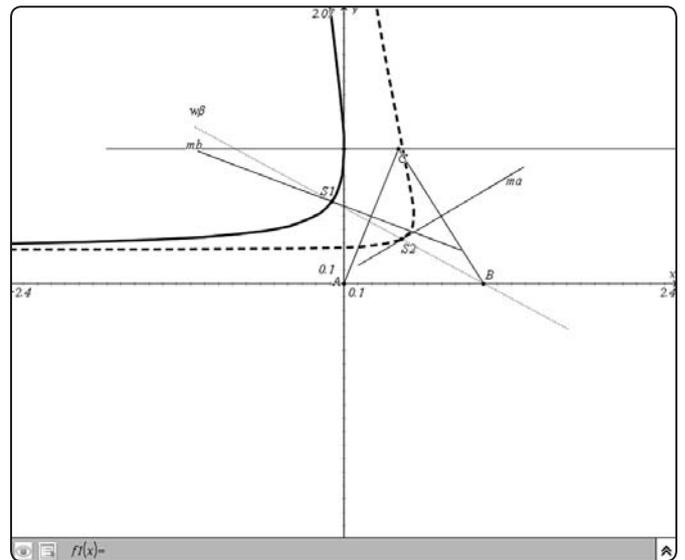


Abb. 20

Der Grund für diese erstaunliche Ähnlichkeit besteht in Folgendem: Als Gleichung für m_a ergab sich:

$$y = f(x) = (1-t) \cdot \left(x - \frac{t+1}{2} \right) + \frac{1}{2}$$

Die entsprechende Gleichung für m_b lautete:

$$y = f(x) = -t \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}$$

Die Struktur beider Gleichungen ist ähnlich und daher ist die graphische Ähnlichkeit der beiden Kurven nicht verwunderlich. Natürlich könnte man die Rechnung auch für m_a analog durchführen. Prinzipiell Neues ergibt sich dabei nicht.

Autoren

Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau (D)
wilfried.zappe@zappe-online.com

Dr. Wolfgang Moldenhauer, Bad Berka (D)
WMoldenhauer@thillm.thueringen.de

Der Modellversuch „M³ - Medienintegration im Mathematikunterricht“ an bayerischen Gymnasien

Ewald Bichler, Prof. Dr. Hans-Georg Weigand



Überblick über den bisherigen Verlauf des Modellversuchs

Der Modellversuch „Medienintegration im Mathematikunterricht“ (kurz: M³) beschäftigt sich mit dem langfristigen Einsatz eines Taschencomputers im Mathematikunterricht des Gymnasiums. Der Modellversuch wurde vom Bayerischen Kultusministerium initiiert, von Texas Instruments finanziell unterstützt, Ewald Bichler (Hans-Leinberger-Gymnasium Landshut) ist der Leiter und Koordinator des Projekts, Prof. Dr. Hans-Georg Weigand und die Universität Würzburg sind für die Evaluation des Versuchs zuständig. In den Modellklassen wurde in den ersten Jahren mit dem Taschencomputer (TC) „TI Voyage™ 200“, später dann mit dem „TI-Nspire™“ gearbeitet. In den Schuljahren 2003/04, 2004/05 und 2005/06 war der Versuch auf die Jahrgangsstufe 10 begrenzt. Ab dem Schuljahr 2006/07 wurde der Versuch auf die 11. Jahrgangsstufe ausgedehnt. So waren im Schuljahr 2006/07 folgende Schulen, Klassen und Lehrkräfte am Modellversuch beteiligt:

- 11 Schulen, 23 Lehrkräfte (in den Modellklassen)
- 5 Klassen der Jahrgangsstufe 10 mit insgesamt 136 Schülerinnen und Schülern
- 16 Klassen der Jahrgangsstufe 11 mit insgesamt 412 Schülerinnen und Schülern
- 11 Kontrollklassen der Jahrgangsstufe 11 mit insgesamt 320 Schülern, unterrichtet von 11 Lehrkräften, von denen keiner am Modellversuch beteiligt gewesen ist

Aufgrund administrativer Schwierigkeiten bezüglich der Zulassung von TC in einer schriftlichen Abiturprüfung konnte eine Ausdehnung des Modellversuchs auf die Jahrgangsstufen 12 und 13 mit analogen Bedingungen nicht erreicht werden. So wurde festgelegt, dass die Schüler in Jg. 12 und 13 zwar den TC in Prüfungen verwenden dürfen, nicht aber in einer schriftlichen Abiturprüfung. Ein Einsatz in der mündlichen Abiturprüfung ist dagegen ermöglicht worden. Ab dem kommenden Schuljahr werden die Modellschulen, die mit dem TC-Einsatz in Klasse 10 beginnen, auch die Abiturprüfung mit diesem Werkzeug schreiben dürfen.

Der Modellversuch in Klasse 11

Im Folgenden sollen einige Erfahrungen des Modellversuchs dargestellt werden, die in den letzten drei Schuljahren – also in 2006/07, 2007/08 und 2008/09 – in der Jahrgangsstufe 11 gewonnen wurden.

In Bichler und Weigand (2008) wurden bereits einige Ergebnisse des Modellversuchs im Schuljahr 2006/07 dargestellt. So zeigte sich etwa, dass sich keine Unterschiede zwischen Modell- und Kontrollklassen bei dem – in traditioneller Art und Weise mit Papier und Bleistift geschriebenen – technologiefreien – Vor- und Nachtest ergeben. Allerdings hat sich auch die Hoffnung nicht erfüllt, dass sich die Schülerinnen und Schüler der Modellklassen etwa im Umgang mit und Interpretieren von Graphen stärker verbessern als die Schüler der Kontrollklassen.

Aus diesem und einigen anderen Ergebnissen ergab sich für die Projektleiter die Schlussfolgerung, dass ein klassisches empirisches Versuchsdesign mit Vor- und Nachtest, die im Zusammenhang mit dem TC erworbenen besonderen Leistungen der Schülerinnen und Schülern der Modellklassen nicht adäquat beschreibt. So durften diese Schülerinnen und Schüler ein Jahr lang den TC bei (fast) allen Problemstellungen einsetzen und mussten nun zum Jahresende einen Test schreiben, bei dem der TC verboten war. Es zeigte sich, dass die Motivation vor allem der guten Schüler für ein derartiges Arbeiten nicht allzu hoch war. Deshalb wurde im Rahmen des Modellversuchs in den letzten Jahren weniger Wert auf Vergleichsuntersuchungen mit Kontrollklassen, sondern größerer Wert auf die Arbeitsweisen der Schülerinnen und Schüler mit dem TC gelegt.

Der TC-Test

Die Schülerinnen und Schüler der Modellklassen haben nach einem halben Jahr (Februar) und einem ganzen Schuljahr (Juni) einen Test mit TC geschrieben. Dabei wurden den Schülern jeweils vier Aufgaben zur Bearbeitung vorgelegt, wobei die Schüler selbst jeweils entscheiden konnten, ob sie den TC verwenden oder nicht. Nach Beendigung des Tests erhielten die Schüler einen Fragebogen, in dem sie zusätzliche Angaben zu den vorher bearbeiteten Aufgaben machen konnten, insbesondere, wo sie den TC dort eingesetzt haben. Der Test wurde vor der Durchführung in einer Klasse pilotiert.

Testaufgaben vom Februar (also nach einem halben Schuljahr):

- 1) Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion

$$f: x \mapsto \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2 + 2x - 2}$$

- 2) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 7x + 1}{-3x^2 + 5x}$.

- 3) Gegeben ist die Funktionenschar $f_a: x \mapsto \frac{a \cdot x + 2}{x^2 - 4}$

mit $a \in \mathbb{R}^+$. Untersuchen Sie das Verhalten von f_a an der Stelle $x = 2$. Achten Sie auf die Nachvollziehbarkeit Ihrer Bearbeitung.

- 4) Geben Sie eine begründete Vermutung über die Symmetrie des Graphen der Funktion

$$f: x \mapsto \frac{x^2 - 4x + 9}{x^2 - 4x + 5}$$

an. (Es muss ersichtlich sein, wie Sie diese Vermutung erhalten haben.)

Testaufgaben im Juni (also nach einem Schuljahr)

- 1) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktion

$$f: x \mapsto \frac{x-1}{x^2-1}$$

an der Definitionslücke $x = 1$.

Ewald Bichler, Prof. Dr. Hans-Georg Weigand

2) Bestimmen Sie Lage und Art des Extremwerts von

$$f: x \mapsto \frac{x^2 - 2}{(x+2)^2}$$

3) Ist die Gerade mit der Gleichung $y = 2x - 4$ Tangente an den Graphen von

$$f: x \mapsto \frac{1}{2} \cdot x^3 - x$$

(Achten Sie auf Nachvollziehbarkeit Ihrer Begründung!)

4) Geben Sie das Monotonieverhalten der Funktion

$$f: x \mapsto 1 - (\ln x)^2$$

für $x > 0$ an. (Achten Sie auf Nachvollziehbarkeit.)

Rechnereinsatz

Folgende Grafiken zeigen, von wie vielen Schülern (nach eigenen Angaben) der TC im Februar und Juni-Test verwendet worden ist.

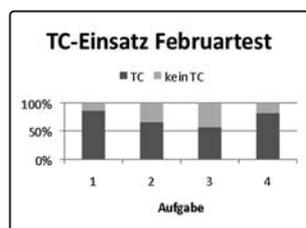


Abb. 1

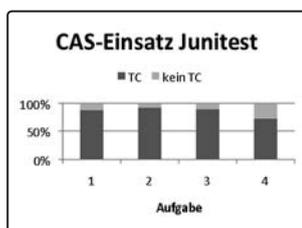


Abb. 2

Die Gründe für das Nichtverwenden des TC liegen vor allem darin, dass die Schülerinnen und Schüler sich mit dem TC nicht vertraut fühlen. Es überrascht der hohe Prozentsatz der Schüler beim Februartest, die dies angeben. Es lässt sich daraus folgern, dass es etwas dauert, bis die große Mehrheit der Klasse eine hinreichende Vertrautheit mit dem TC erreicht hat.

Interessant ist ein Blick auf den Einsatz des TC aufgeschlüsselt nach Klassen (die Klassen sind aus Gründen der Anonymisierung mit Buchstaben von A bis N bezeichnet, wobei dahinter eine zufällige Sortierung steckt.):

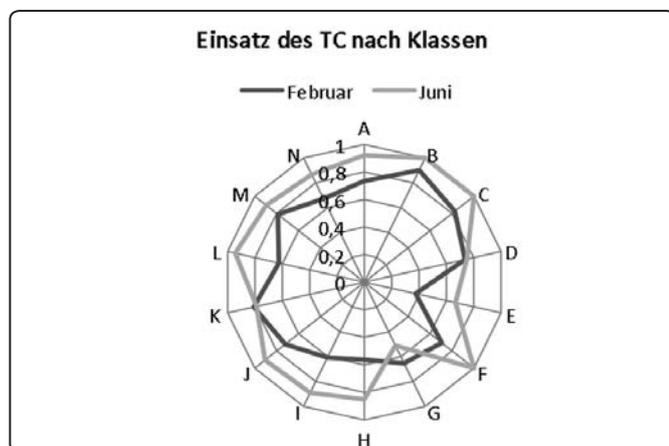


Abb. 3

In drei Klassen (B, C, F) beträgt der Einsatz des TC im Juni 100%, vorher war er ebenso bereits hoch. In zwei Klassen (K, D) blieb der Einsatz des TC nahezu konstant. In einer Klasse (G) nimmt er zu Schuljahresende ab. Ansonsten kann die Zunahme des TC-Einsatzes zum Schuljahresende überall beobachtet werden.

In den folgenden Graphiken werden die durchschnittlich erreichten Bewertungseinheiten derjenigen Schüler, welche einen TC verwendet haben, mit denjenigen verglichen, welche keinen TC verwendet haben.

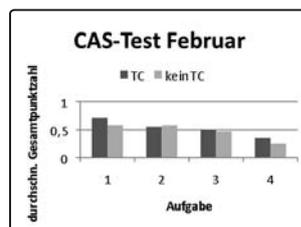


Abb. 4

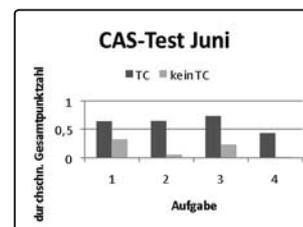


Abb. 5

Im Februar gibt es eine leichte Tendenz, dass diejenigen Schüler, welche den TC einsetzen, erfolgreicher in der Bearbeitung der Aufgaben abschneiden als diejenigen, die keinen TC einsetzen. Im Juni ist dies markant.

Anhand einer Aufgabe soll exemplarisch dargestellt werden, wie die Schüler den TC eingesetzt haben.

Aufgabe 1 (Februar-Test)

Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion

$$f: x \mapsto \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2 + 2x - 2}$$

Bei dieser Aufgabe erwartet man die Ermittlung der Nullstellen des Nennerterms. Ein Schüler, der einen TC zur Verfügung hat, wird dies vermutlich einfach an den TC auslagern.

Bei dieser Aufgabe haben 85% den TC eingesetzt. Die Schüler, die den TC genutzt haben, haben die Aufgabe zu 71% gelöst, diejenigen, die den TC nicht genutzt haben, zu 58%. Der Unterschied ist aber nicht signifikant ($p=0,25$).

Insgesamt haben diejenigen Schüler, welche den TC benutzt haben, folgendes angegeben: 8% haben die Lösungsformel für quadratische Gleichungen mit entsprechenden Koeffizienten in den TC eingetippt, 54% haben den solve-Befehl zum Lösen der quadratischen Gleichung verwendet, 11% haben den factor-Befehl zum Faktorisieren des Nennerterms verwendet, 18% haben den zeros-Befehl verwendet, welcher die Nullstellen des Nennerterms ausgibt, und 10% haben eine sonstige nicht weiter spezifizierte Strategie angewendet. Interessant ist ein Blick auf das Verhalten in den einzelnen Klassen:

Ewald Bichler, Prof. Dr. Hans-Georg Weigand

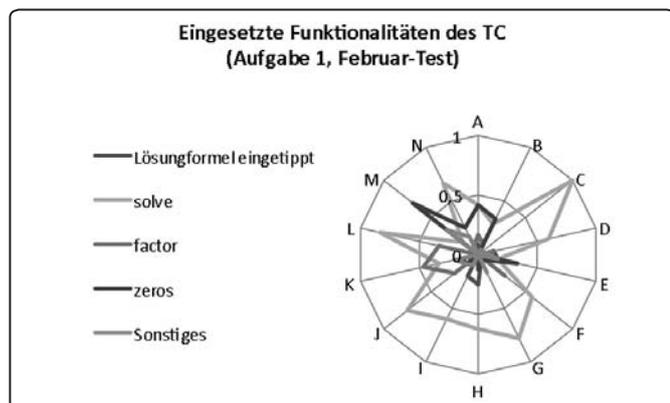


Abb. 6

Man erkennt sofort, dass sich zwischen den Klassen die verwendete Funktionalität des TC unterschiedlich darstellt, ebenso differiert dies innerhalb der Klassen. Die Anwendung des solve-Befehls ist sehr verbreitet, in einer Klasse (Klasse C) verwenden sogar alle Schüler diesen Befehl. In einer anderen Klasse (Klasse M) verwenden die meisten Schüler den zeros-Befehl, der in einigen anderen Klassen überhaupt nicht auftritt. Beim factor-Befehl tritt ein ähnliches Phänomen auf.

Diejenigen Schüler, die keinen TC genutzt haben, gaben dafür folgende Gründe an:

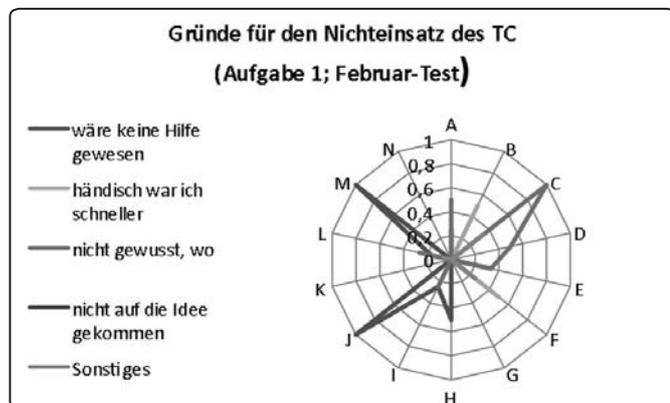


Abb. 7

Die Aussagen, der TC wäre keine Hilfe gewesen bzw. man wüsste nicht, wo man ihn bei dieser Aufgabe einsetzen sollte, überraschen insofern, da sich diese Aufgabe geradezu anbietet, die Tätigkeit des Lösen einer Gleichung an den TC auszulagern. Es bleibt hier die Frage offen, inwieweit die Schüler, die dies angegeben haben, nicht eher mathematische Verständnisschwierigkeiten mit der Aufgabenstellung hatten, also nicht wussten, dass die Nullstellen des Nenners gesucht sind. Ebenso überraschend ist die Aussage, man sei händisch schneller gewesen. Eine offene Frage ist hier auch, inwieweit diese Schüler es gewohnt waren, den TC zum Lösen von Gleichungen einzusetzen.

Insgesamt zeigt sich, dass die Schüler, die den TC im Juni-Test eingesetzt haben, deutlich mehr Bewertungseinheiten erreicht haben. Dieses bessere Abschneiden liegt nicht an der Leistungsfähigkeit der Schüler. Vielmehr scheint dies zum einen am Werkzeug TC zu liegen, zum anderen am Unterricht in den jeweiligen Klassen und damit am Faktor Lehrkraft. Ein Hinweis darauf ist auch der sehr unterschiedliche Einsatz der Schüler beim TC-Test in den jeweiligen Klassen.

Einsatzzeitpunkt des TC

Die Schüler wurden bei den TC-Tests jeweils gebeten, bei jeder Aufgabe anzugeben, ob sie den TC (falls sie ihn zur Lösung eingesetzt haben) zu Beginn des Lösungsprozesses (als Orientierung, zur Lösungsfindung), während des Lösungsprozesses (begleitend, etwa als Kontrollorgan) oder am Ende des Lösungsprozesses (zum Überprüfen des Ergebnisses) eingesetzt haben. Dabei waren Mehrfachnennungen möglich.

Für die jeweiligen Aufgaben zeigen sich folgende Ergebnisse:

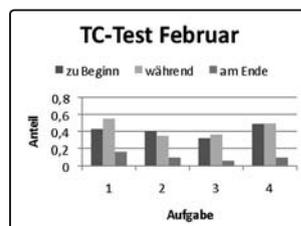


Abb. 8

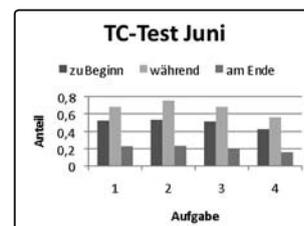


Abb. 9

Die jeweiligen Anteile der Angaben sind im Juni höher als im Februar. Man kann erkennen, dass die Angaben der Schüler im Juni bezogen auf die Aufgaben nicht so stark differieren. Zusätzlich haben sich die Anteile erhöht, was ein Hinweis darauf ist, dass die Schüler den TC im Juni in mehr Phasen integrieren als im Februar. Auffallend ist, dass sich die Angabe „während der Lösung“ deutlich erhöht hat. Dies kann als Beleg dafür gedeutet werden, dass die Schüler den TC am Jahresende als Werkzeug in ihre Lösungsprozesse besser integriert haben als zur Schuljahresmitte. Den TC am Ende des Lösungsprozesses zur Kontrolle einzusetzen spielt dagegen eine eher untergeordnete Rolle.

Trägt man die Angaben geordnet nach Klassen auf, so erkennt man, dass die Angaben sich (wie oben beschrieben) erhöhen, allerdings bleibt das Grundmuster in den Klassen bei „während“ und „am Ende“ erhalten. Wann Schüler im Laufe eines Lösungsprozesses den TC einsetzen scheint also klassentypisch zu sein, was sich nur erklären lässt, wenn man den Unterricht in den Klassen, insbesondere die Art und Weise, wann die Lehrkraft den TC in Lösungsprozesse integriert und den Schülern nahebringt, berücksichtigt. Nicht in gleicher Weise lässt sich dies bei der Angabe „zu Beginn“ erkennen. Eine Tendenz ist aber durchaus abzulesen.

Service auf einen Blick

Innovative Technologie

Dank der Technologie unserer aktuellen Graphikrechner TI-84 Plus, TI-84 Plus Silver Edition, TI-89 Titanium, Voyage™ 200, TI-Nspire™ (mit Touchpad), TI-Nspire™ CAS (mit Touchpad) können Sie die bestehenden Fähigkeiten der Rechner durch Herunterladen zusätzlicher Applikationen und/oder Upgrades erweitern und Ihren persönlichen Wünschen anpassen. Damit halten Sie sich alle Optionen für die Zukunft offen.

Kostenlose Ausleihe

Sie möchten einen TI-Graphikrechner oder ein Computeralgebrasystem testen? – Kein Problem! Wir leihen Ihnen Einzel-exemplare oder Klassensätze bis zu vier Wochen – kostenlos und unverbindlich!

Unterrichtsmaterialien

Neben den „TI-Nachrichten“ gibt es eine Fülle von begleitenden Unterrichtsmaterialien zum Einsatz unserer Produkte – insbesondere auch von Schulbuchverlagen, hier eine Auswahl von TI und T³:

- **CuBaLibra:** Einfache, gut strukturierte Aufgaben: Stoff für eine Unterrichtsstunde.
- **MMM:** Kurze Beispiele für alltäglich benötigte Veranschaulichungen, die Umsetzung wird mittels Kurzvideos erklärt.
- **T³ Akzente:** Aufgaben mittlerer Komplexität mit Schülerarbeitsblätter und didaktischen Hinweisen.

Mehr Informationen, kostenlose Downloads sowie die Anmelde-möglichkeit zum E-Newsletter „TI-Materialien“ finden Sie auf den TI-Webseiten oder unter: www.ti-unterrichtsmaterialien.net

Lehrerfortbildungen

Graphikrechner und CAS sind für viele Kolleginnen und Kollegen neu und unbekannt. Wir helfen Ihnen mit Fortbildungen an Ihrer Schule oder auf Veranstaltungen! Wenden Sie sich direkt an T³. Mehr Informationen zu T³ finden Sie im Internet:

T³ Deutschland: www.t3deutschland.de

T³ Österreich: www.t3oesterreich.at

T³ Schweiz: www.t3schweiz.ch

Oder kontaktieren Sie Ihren TI-Schulberater sowie unser Customer Service Team.

Praktische Präsentationsmöglichkeiten

Projizieren Sie das Display der Lehrerversion Ihres TI-Graphikrechners mit ViewScreen™, Overheadprojektor, Beamer oder auch am Whiteboard.

Flexible Verbindungsmöglichkeiten

Die Verbindungskabel zu den TI-Graphikrechnern und Computeralgebrasystemen ermöglichen eine schnelle und stabile Verbindung zum PC oder Mac.

Unkomplizierte Messwerterfassung

Portable, universell einsetzbare Messwerterfassungssysteme für den naturwissenschaftlichen Unterricht. Verschiedene Sensoren erhältlich.

Allgemeine Informationen

Nehmen Sie mit unserem Customer Service Center Kontakt auf, wenn Sie technische Auskünfte benötigen oder Fragen zum Gebrauch unserer Rechner oder bezüglich einer Lehrerfortbildung haben. Auch zum Ausleihen der Rechner ist das CSC die erste Adresse:

Wir sind für Sie da:



Texas Instruments

Customer Service Center

Tel: 00 800 - 48 42 27 37 (Anruf kostenlos)

Fax: 00 420 - 2 26 22 17 99

Allgemeine Informationen:

ti-cares@ti.com

Kostenlose Ausleihe von Graphikrechnern und Computer-Algebra-Systemen:

ti-loan@ti.com

Kostenloses Abonnement der TI-Nachrichten:

ti-nachrichten@ti.com

Garantie

Auf alle Graphikrechner und Computeralgebrasysteme von Texas Instruments bietet Texas Instruments 3 Jahre Herstellergarantie. Sollte doch einmal etwas defekt sein, rufen Sie bitte zunächst unser Customer Service Center an. Oft kann das Problem bereits am Telefon behoben werden.

education.ti.com/deutschland • education.ti.com/oesterreich • education.ti.com/schweiz
ti-cares@ti.com