

TI-Nachrichten

Ausgabe 1/12

Inhaltsverzeichnis

Dr. H. Weller, R. Pflöging:

Wie entsteht das Bild des
Turms auf dem Bildschirm? 1

H. Kammer:

Die Überlagerung harmonischer Schwingungen 7

B. Schmidt:

Hefeknospen mögen es warm - Einsatz des
TI-Nspire™ CX und des TI-Nspire™ Lab Cradle
im Biologieunterricht 11

M. Roser:

ABS – ein sinnvolles
Assistenzsystem auch für Motorräder? 13

J. Enders:

Untersuchung eines Röntgenspektrums
mit der TI-Nspire™ Lab Station 16

Dr. H. Langlotz:

Gleichungssysteme mit Parametern 19

Dr. K. Wloka:

Kinetik der Reaktion von
Magnesium mit Salzsäure-Lösung 21

Dr. A. Roulier:

Simulation von Chaos mit dem Magnetpendel 26

S. Luislampe:

Von linearen zu kubischen Splines 28

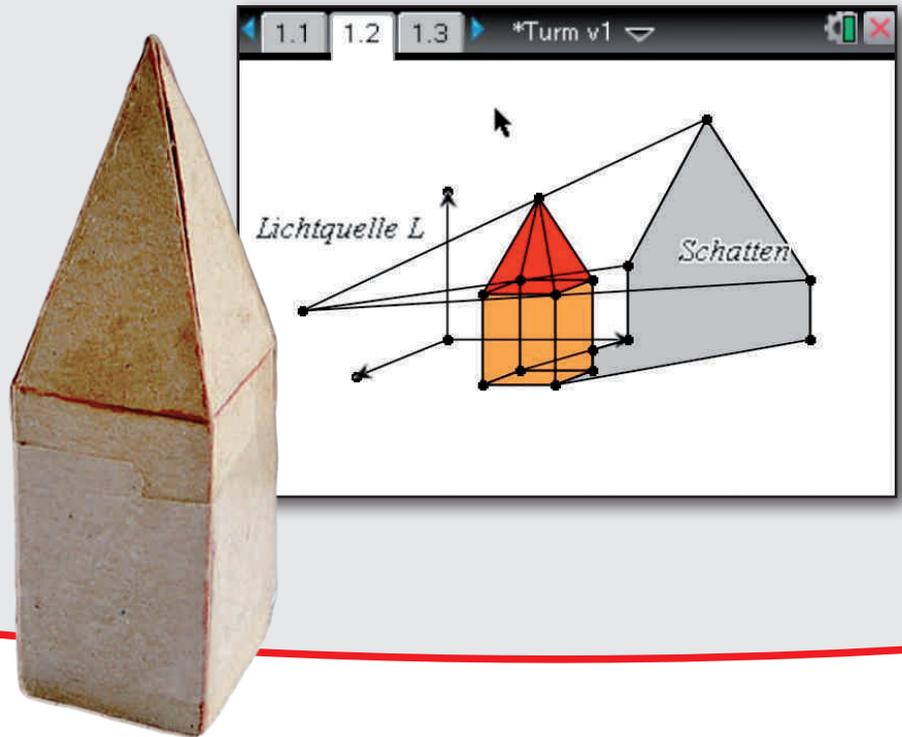
Tipps und Tricks:

G. Dreeßen-Meyer:

π im Reißverschluss 31

Weitere Unterrichtsmaterialien:

www.ti-unterrichtsmaterialien.net



Wie entsteht das Bild des Turms auf dem Bildschirm?

Dr. Hubert Weller, Roland Pflöging



**Ein reales Objekt wird auf dem Bildschirm
dargestellt**

Jede Darstellung eines geometrischen Objekts, sei es mit Bleistift und Lineal auf einem Blatt Papier, mit Geodreieck und Kreide an der Tafel oder mit dem Computer auf dem Bildschirm, ist eine Projektion des 3-dimensionalen Raumes in die 2-dimensionale Ebene.

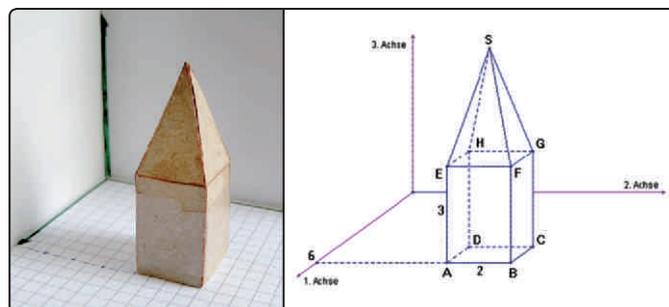


Abb. 1: Turm in 3D - reales Objekt und Bild im Koordinatensystem

Wie entsteht das Bild des Turms auf dem Bildschirm?

Dr. Hubert Weller, Roland Pfleging

Um das Schrägbild eines Körpers mit einem Computer darstellen zu können, müssen die Raumkoordinaten geeignet in 2D-Koordinaten transformiert (umgerechnet) werden. Dies ist natürlich abhängig von dem zur Darstellung verwendeten Koordinatensystem.

Welches Koordinatensystem ist sinnvoll? An dieser Stelle werden sicherlich – nicht nur bei gestandenen Lehrkräften – die Ansichten auseinandergehen. Lassen Sie einmal von Schülerinnen und Schülern einen Würfel zeichnen. Mit ein wenig Glück bekommt man dabei schon eine ganze Reihe der Projektionsmöglichkeiten, die man anschließend diskutieren kann. Hier wird zum Einstieg eine Kavalierperspektive, die sich an dem üblicherweise verwendeten Karopapier orientiert (siehe Abb. 2, x-Achse 30° mit $k=0,5$). Dies hat den Vorteil, dass Schülerinnen und Schüler das von ihnen benutzte Karopapier zum Zeichnen der 3D-Punkte nehmen können.

Die folgenden Aufgaben sind in Unterricht und Workshops eingesetzt worden und dienen dem Heranführen an die Projektion. Anschließend werden einfache Untersuchungen (Schattenkonstruktionen) durchgeführt.

Aufgabe 1

Zeichne den Turm in diesem Koordinatensystem (vgl. Abb. 1) und bestimme die räumlichen Koordinaten der Eckpunkte des Turms mit quadratischer Grundfläche (Der Punkt A hat die Koordinaten $(6|4|0)$ und der Punkt S hat als 3. Koordinate $z = 6$).

Ergänzend zur vorbereitenden Aufgabe 1 geht es nun darum, diesen Turm mit dem TI-Nspire™ darzustellen. Zunächst überlegt man sich an einem bestimmten Punkt, und anschließend allgemein, wie die „Umrechnung“ der Koordinaten vorzunehmen ist.

Aufgabe 2

- Zeichne den Punkt $P(5|6|3)$ in das räumliche Koordinatensystem und lies die Bildkoordinaten in dem 2-dimensionalen Koordinatensystem ab.
- Bestimme auch für die nachfolgenden Punkte die (2D-) Bildkoordinaten, indem du die Punkte einzeichnest und die entsprechenden Koordinaten abliest: $Q_1(-4|-5|6)$, $Q_2(8|7|1)$ und $Q_3(-2|7|1)$.
- Berechne für die folgenden Punkte die (2D-) Bildkoordinaten: $R_1(20|35|70)$ und $R_2(150|-24|160)$
- Entwickle eine allgemeine Berechnungsformel:
 $P_{3D}(x | y | z) \rightarrow P_{2D}(? | ?)$

Zeichenerklärung:  Computeralgebrasystem
TI-89 Titanium, Voyage™ 200

 TI-Nspire™ Technologie

 Graphische Taschenrechner
TI-82 STATS, TI-83 Plus,
TI-84 Plus, TI-84 Plus Silver Edition

 Messwerterfassungssystem
CBL 2™, CBR 2™, TI-Nspire™ Lab Cradle

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

viele unserer Leserinnen und Leser kennen und schätzen die TI-Nachrichten bereits seit einigen Jahren. Das belegen die zahlreichen positiven Rückmeldungen, die uns regelmäßig erreichen. Insbesondere der Praxisbezug und die Vielseitigkeit der Artikel wird als besonders nützlich empfunden. Dieses bestärkt uns, Ihnen auch weiterhin interessante Beispiele von erfahrenen Lehrkräften zur Verfügung zu stellen. Empfehlen Sie die TI-Nachrichten gerne Ihren Kolleginnen und Kollegen.

Natürlich möchten wir dabei auch in Zukunft Ihren Wünschen gerecht werden. Bitte teilen Sie uns daher Ihre Anregungen mit oder senden selbst Beiträge ein. Schicken Sie uns gerne auch Ihre Erfahrungsberichte in Bezug auf einzelne TI-Nachrichten Artikel oder ganz allgemein beim Einsatz der TI-Technologie im Unterricht. Informieren Sie uns bitte, wenn Sie die TI-Nachrichten per E-Mail und nicht mehr auf dem Postwege erhalten möchten: ti-nachrichten@ti.com. Sämtliche Artikel finden Sie zudem im Internet unter: www.ti-unterrichtsmaterialien.net.

Viel Freude beim Lesen der Beiträge wünscht Ihnen

Ihr TI-Team

Wie entsteht das Bild des Turms auf dem Bildschirm?

Dr. Hubert Weller, Roland Pflöging

Lösungshinweise:

Der Zeichnung (vgl. Abb. 2) entnimmt man: $P_{2D}(3,5|1,75)$

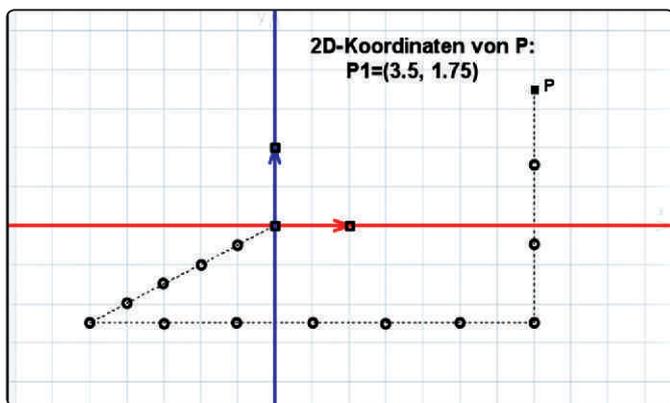
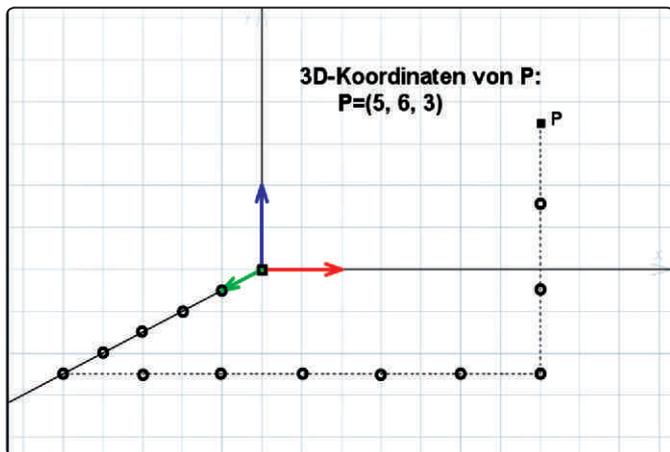


Abb. 2a, Abb. 2b: Umwandlung der 3D- in 2D-Koordinaten

Jeder Schritt in Richtung der (räumlichen) x-Achse ist im 2D-Koordinatensystem ein halber Schritt nach links und ein Viertel Schritt nach unten, analog übersetzt man die Schritte in Richtung der (räumlichen) y- und z-Achse und erhält:

$$P_{3D}(x | y | z) \rightarrow P_{2D}(-0,5 \cdot x + y | -0,25 \cdot x + z)$$

Damit haben wir die Voraussetzung geschaffen, den Turm auf dem Bildschirm darzustellen, dabei nutzen wir die Tabellenapplikation „Lists & Spreadsheet“, um die Koordinaten der Punkte einzugeben.

A	p_nam	B	px	C	py	D	pz	E	bx	F	by	G	H	I	J
1	a		6		4		0			1	$-0,25 \cdot b1$				
2	b		6		6		0								
3	c		4		6		0								
4	d		4		4		0								
5	e		6		4		3								
6	f		6		6		3								
7	g		4		6		3								
8	h		4		4		3								
9	s		5		5		6								
10															
11															
12															
13															
14															
	F1														

Abb. 3: Tabelle zur Berechnung der Projektion

In der ersten Spalte sind die Namen (p_nam) der Punkte vermerkt, um später Korrekturen vornehmen und ggf. Fehler leichter finden zu können. In den folgenden drei Spalten werden die räumlichen Koordinaten der Punkte (px, py und pz) eingetragen. Für die Berechnung der Projektionskoordinaten bieten sich generell zwei Wege an: Die zellenweise und die spaltenweise Berechnung. Da bei der spaltenweisen Berechnung beim nachträglichen Eintragen von Punkten stets lästige Fehlermeldungen auftreten (es liegen ja die Koordinaten nicht alle gleichzeitig vor) wird hier die zellenweise Berechnung eingesetzt. Hierzu wird in Zelle E1 der Ausdruck „ $-0,5 \cdot B1 + C1$ “ und in F1 der Ausdruck „ $-0,25 \cdot B1 + D1$ “ eingegeben, anschließend kopiert man die Formel (Zellen markieren, an der rechten unteren Ecke bis zum Ende der Punktliste ziehen).

In einem neuen Fenster mit „Graphs“ lässt man sich den Streuplot zu bx und by zeichnen (Menu - 3: Graph Type - 4: Scatter Plot).

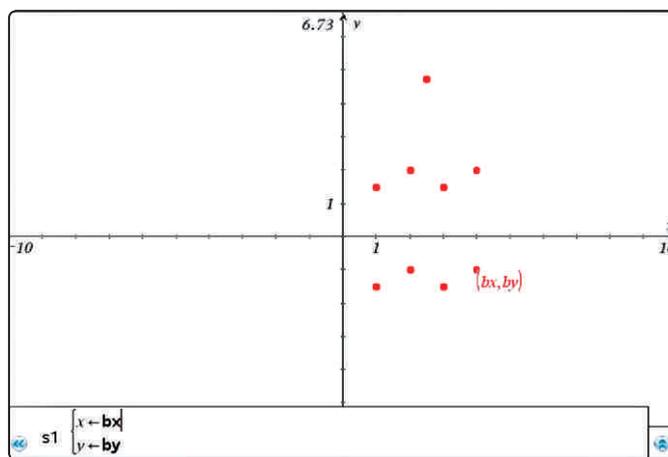


Abb. 4: 2D-Streuplot des Turmes

Stimmen die Eingaben und Formeln, sollte der Turm schon zu erkennen sein. Jetzt können die entsprechenden Seiten- und Dachflächen als Polygone (Geometriebefehl im Menu) zusammengefasst werden, deren Flächen auch noch gefärbt werden können. Im folgenden Bild sind zusätzlich die Achsen als Ortsvektoren der Punkte (5|0|0), (0|5|0) und (0|0|5) eingezeichnet und das übliche 2D-Achsenkreuz im Menu ausgeblendet worden. Aber Achtung: Dann lässt sich das Koordinatensystem nicht mehr mit dem Cursor verschieben!

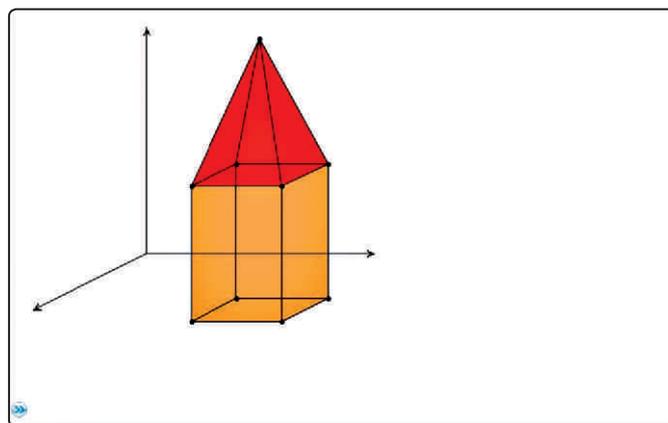


Abb. 5: Fertiger Turm mit farbigen Polygonflächen

Dr. Hubert Weller, Roland Pflöging

Für den ersten Einstieg in das Thema reicht es eine Projektion zu betrachten. Will man mehrere verschiedene Projektionen einsetzen, so erhöht sich der Aufwand ein wenig.

Verschiedene Parallelprojektionen

Bisher haben wir die sogenannte **Kavalierprojektion** benutzt. Dieser Begriff stammt aus dem mittelalterlichen Militärwesen. Kavalier (Reiter) sind Aufbauten auf den Festungsanlagen gewesen, die in dieser Art der Darstellung („von vorne betrachtet“) unverzerrt gezeichnet worden sind.

In einer anderen Situation möchte man den Grundriss eines Gebäudes, einer Anlage o.ä. in seinen Abmessungen und Winkeln darstellen. Dabei kommt es darauf an, dass die Achsenvektoren die Länge 1 haben und orthogonal zueinander sind. Diese **Militärprojektion** wird häufig bei Gebäuden oder anschaulichen Stadtplänen verwendet.

Will man alle Längenverhältnisse unverzerrt darstellen, benutzt man die **Isometrie**. In dieser Darstellung wird der Umriss einer Kugel als Kreis dargestellt. In der Technik wird häufig auch die **Dimetrie** verwendet.

Vereinfacht werden die erforderlichen Umrechnungen, indem man Abbildungsmatrizen verwendet. Die Projektionen werden durch die Bilder der drei räumlichen Basisvektoren bestimmt.

	Kavalierprojektion $\begin{pmatrix} -0,5 & 1 & 0 \\ -0,25 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
	Militärprojektion $\begin{pmatrix} -\cos(45^\circ) & \cos(45^\circ) & 0 \\ -\sin(45^\circ) & -\sin(45^\circ) & 1 \end{pmatrix}$
	Isometrie $\begin{pmatrix} -\cos(30^\circ) & \cos(30^\circ) & 0 \\ -\sin(30^\circ) & -\sin(30^\circ) & 1 \end{pmatrix}$

Abbildungen 6: Verschiedene Projektionen

Um diese Projektionen wahlweise benutzen zu können, wird eine „Calculator“-Anwendung mit der Tabelle und dem Grafikfenster verknüpft. Zunächst werden die Abbildungsmatrizen unter entsprechenden Namen abgespeichert.

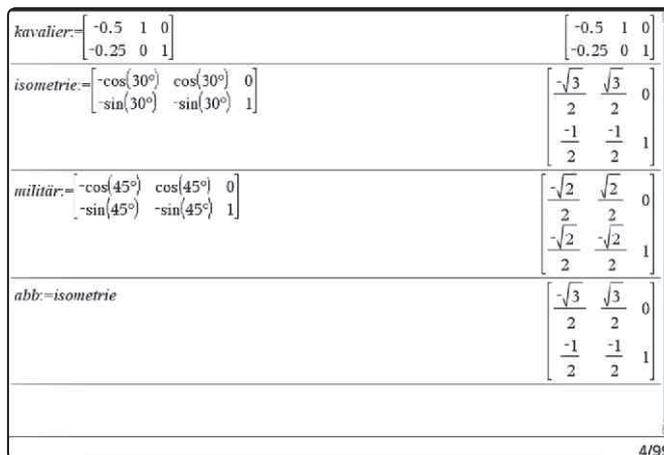


Abb. 7: Eingabe der Projektionsmatrizen

Die Matrix *abb* dient zur verallgemeinerten Übergabe der Werte in die Tabelle. Dort müssen die Spalten E und F durch die folgenden Einträge in eine Matrizenmultiplikation geändert werden:

$$E1 \text{ „} =\text{abb}[1,1]*B1+\text{abb}[1,2]*C1+\text{abb}[1,3]*D1\text{“}$$

$$F1 \text{ „} =\text{abb}[2,1]*B1+\text{abb}[2,2]*C1+\text{abb}[2,3]*D1\text{“}$$

Die Zahlen in den rechteckigen Klammern selektieren die Matrixelemente. Nach der Eingabe müssen die Formel in E1 und F1 natürlich noch markiert und bis zum Tabellenende kopiert werden, um die Änderung auf alle Punkte anzuwenden.

Wenn man eine andere Perspektive betrachten möchte, so legt man dies z.B. mit *abb:=isometrie* fest und lässt die Tabelle (z.B. mit CTRL-R) neu berechnen. Danach hat man das neue Bild.

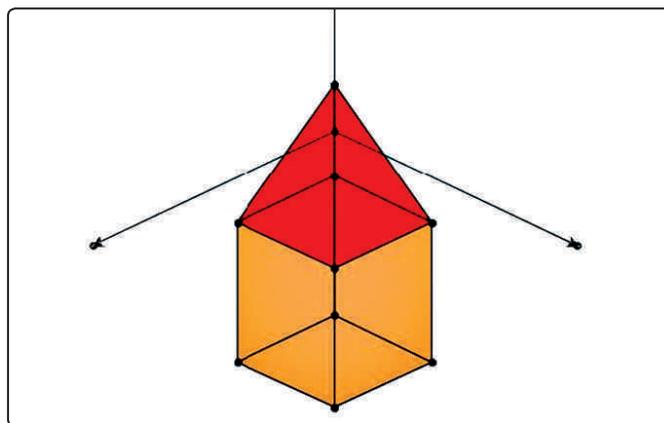


Abb. 8a: Turmabbildung in Isometrie

Wie entsteht das Bild des Turms auf dem Bildschirm?

Dr. Hubert Weller, Roland Pflöging

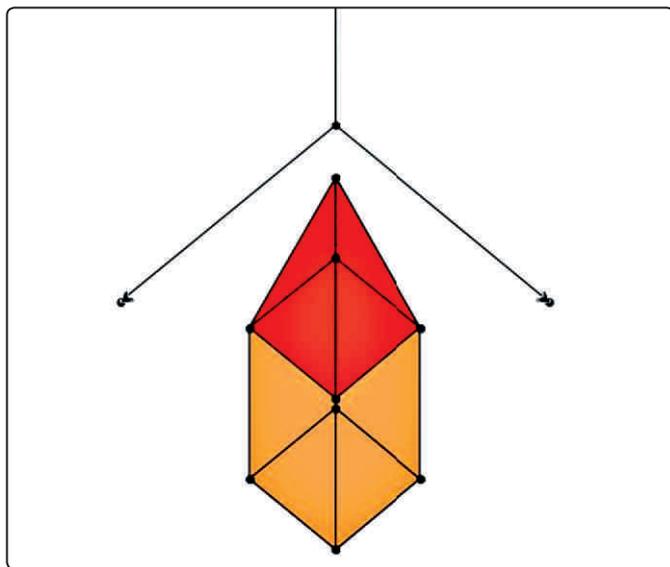


Abb. 8b: Turmabbildung in Militärprojektion

Licht und Schatten

Nun hat man ein recht komfortables Werkzeug, mit dem man weitere Untersuchungen und Konstruktionen durchführen kann. So lassen sich beispielsweise Schattenkonstruktionen berechnen und visualisieren. Hierfür lässt sich natürlich der CAS-Teil des TI-Nspire™ gut einbinden

Aufgabe 3

Unser Turm steht vor einer Wand (die xz-Ebene), die Sonne scheint und erzeugt einen Schatten des Turms an der Wand und auf dem Boden. Die Richtung der Sonnenstrahlen ist gegeben durch den Vektor:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zeichne ein Bild des Turms mit Schatten in das Koordinatensystem.

Lösungshinweise:

Der Sonnenstrahl entlang der Pyramiden-Spitze lässt sich durch eine Parameterdarstellung der Geraden mit dem Ortsvektor des Punktes S und dem Richtungsvektor \vec{v} beschreiben.

$$g: \vec{x} = \vec{OS} + t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 5+2t \\ 5-3t \\ 6-t \end{pmatrix}$$

In der xz-Ebene wird die 2. Koordinate gleich 0, also ist für den Parameter zu wählen: $t = 5/3$. Die Koordinaten des Schattenpunkts von S sind: $S' (25/3 \mid 0 \mid 13/3)$. Analog kann man mit weiteren Punkten des Turmes verfahren.

Im Rechner lassen sich mit der Funktion $lweg(t,v)$ leicht die notwendigen Gleichungen erkennen (bzw. auch lösen) und mit den Lösungen von t die Schattenpunkte bestimmen. Die Eingabe der Ortsvektoren erfolgt hier noch per Hand und auch die

Ergebnisvektoren müssen in der Tabelle anschließend manuell eingegeben werden. Ein Automatisieren dieses Weges ist sicherlich möglich, erschwert jedoch schwächeren Schülerinnen und Schülern den Zugang zum Problem.

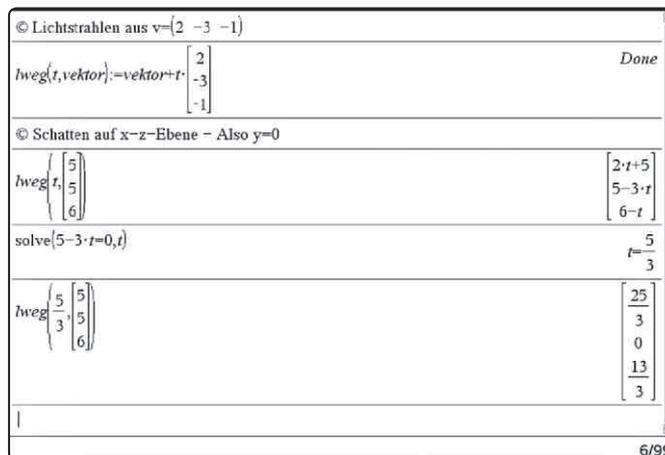


Abb. 9: Exemplarische Berechnung eines Schattenpunktes

A	p_nam	B	px	C	py	D	pz	E	bx	F	by	G	H	I	J
4	d		4		4		0		2		1				
5	e		6		4		3		1		1.5				
6	f		6		6		3		3		1.5				
7	g		4		6		3		4		2				
8	h		4		4		3		2		2				
9	s		5		5		6		2.5		4.75				
10	e1		5		0		0		-2.5		-1.25				
11	e2		0		5		0		5		0				
12	e3		0		0		5		0		5				
13	ursp		0		0		0		0		0				
14	s3		25/3		0		13/3		-4.16667		2.25				
15	f3		10		0		1		-5		-1.5				
16	h3		20/3		0		5/3		-3.33333		0				
17															

Abb. 10: Berechnete Schattenpunkte in der Projektionstabelle

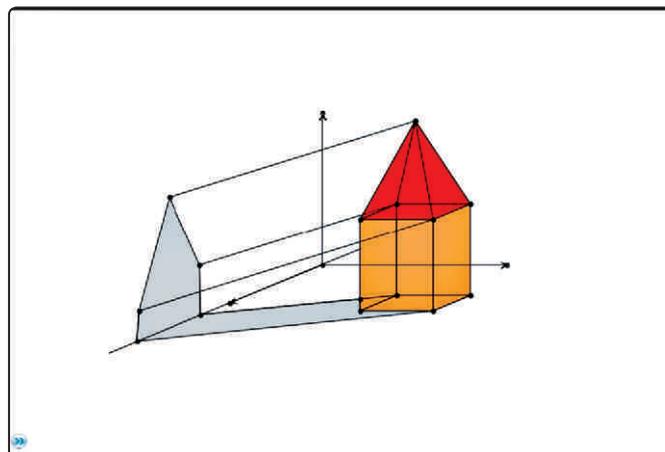


Abb. 11: Paralleler Schattenwurf des Turmes

Beim Einzeichnen des Schattenpolygons sollte man darauf achten, den hinteren Fußpunkt des Turmes nicht als Polygonpunkt zu wählen, da ansonsten der Schatten „vor“ der Turmwand

Dr. Hubert Weller, Roland Pflöging

eingezeichnet wird. Für eine etwas schönere Optik darf ein wenig mit den Geometriemöglichkeiten des TI-Nspire™ experimentiert werden (Senkrechten und Schnittpunkte konstruieren), was aber auch dem Verständnis dient: Haben senkrechte Linien einen senkrechten Schatten?

Ebenso lässt sich eine andere Form des Schattenwurfes berechnen:

Aufgabe 4

Abends wird der Turm durch eine Lampe, die sich im Punkt $L(12|2|4)$ befindet, angestrahlt. Es wird ein Schatten auf der hinteren Wand (yz-Ebene) und auf dem Boden erzeugt. Berechne und zeichne auch hier ein Bild des Schattens.

Lösungshinweise:

Die Geraden zur Beschreibung der Lichtstrahlen verlaufen alle durch den Punkt L (Aufpunkt) und haben verschiedene Richtungsvektoren (z.B. bzgl. der Punkte S und L):

$$g_{S-L} : \vec{x} = \vec{OS} + t \cdot (\vec{OL} - \vec{OS}) = \begin{pmatrix} 5-7t \\ 5+3t \\ 6+2t \end{pmatrix}$$

Die erste Komponente muss Null werden, also ist $t = 5/7$. Der Schattenpunkt von S ist demnach: $S'(0 | 50/7 | 52/7)$.

Entsprechend werden die Schattenpunkte von F und H berechnet und das Bild gezeichnet. Hierzu wurden ähnliche Rechnungen mit TI-Nspire™ durchgeführt und die Ergebnisse wieder abgebildet.

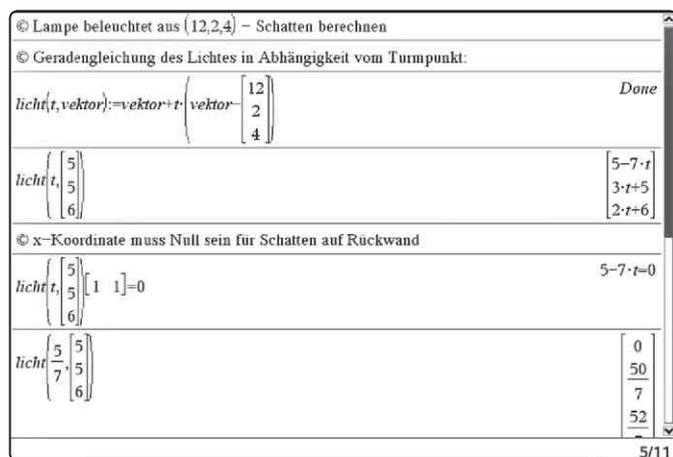


Abb. 12: Exemplarische Berechnung eines Schattenpunktes

Um zu zeigen, dass sich das Ganze auch auf einem TI-Nspire™ Handheld realisieren lässt, ist für das Titelbild des Artikels einmal die Handheldansicht des TI-Nspire™ CAS CX gewählt worden.

Für die folgende Aufgabe, deren Lösung hier nicht beschrieben werden soll, ist schon einiges an Hintergrundwissen (Schnitte von Ebenen und Geraden, etc.) nötig.

Aufgabe 5: Die Pyramiden in Ägypten

In der Nähe von Kairo steht die Cheops- neben der Chephrenpyramide. Die eine wirft einen Schatten auf die andere.

Wir nehmen einmal vereinfacht an, dass die erste Pyramide die folgenden Eckpunkte hat: $A(-3|3|0)$, $B(3|3|0)$, $C(3|-3|0)$, $D(-3|-3|0)$ und $E(0|0|5)$. Die Richtung der Sonnenstrahlen ist vorgegeben durch den Vektor:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -12 \\ -16 \\ -7 \end{pmatrix}$$

- Zeichne ein Bild der Pyramide und ihres Schattens im Koordinatensystem.
- Eine zweite Pyramide hat die folgenden Eckpunkte: $P(-5|-10|0)$, $Q(-5|-6|0)$, $R(-9|-6|0)$, $S(-9|-10|0)$ und $T(-7|-8|3)$. Zeichne das Bild dieser Pyramide in das gleiche Koordinatensystem. Zeichne den Schatten, den die erste Pyramide auf der zweiten erzeugt. (Berechne die Koordinaten aller dazu notwendigen Punkte.)

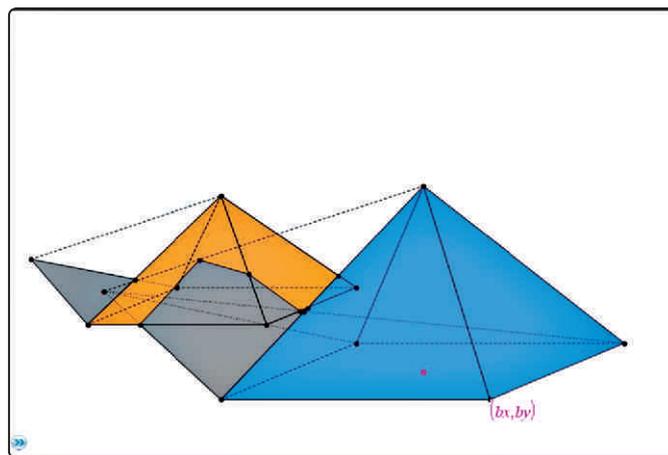


Abb. 13: Im Schatten der Pyramiden

Dieser Artikel sollte eine Grundlage für einen praxisorientierten Unterricht liefern, der Objekte und Prozesse aus der Schulumwelt in den Mittelpunkt stellt. Wer mag, kann das Ganze mit entsprechenden Matrizenabbildungen auch zu höheren optischen Weihen führen und dabei Objekte nicht nur projizieren sondern auch drehen, skalieren und verschieben. Bei Bedarf funktioniert dies auch mit Schieberegler und automatisch ablaufender Animation - das begeistert nicht nur Schülerinnen und Schüler!

Autoren:

Dr. Hubert Weller, Giessen (D)
hubert.weller@math.uni-giessen.de

Roland Pflöging, Biedenkopf (D)
pfloeging@lahntalschule.de

Die Überlagerung harmonischer Schwingungen

Hans Kammer



1. Einleitung

Die Berechnung der Überlagerung von harmonischen Schwingungen mit gleicher Frequenz aber mit verschiedenen Amplituden und Phasenlage ist ein klassisches Problem des gymnasialen Mathematik- und Physikunterrichts.

Die Lösung dieses Problems mit goniometrischer (trigonometrischen) Beziehungen ist umständlich; mithilfe der Euler'schen Beziehung kann es hingegen in der Gauss'schen Zahlenebene durch die Einführung komplexwertiger Funktionen erheblich vereinfacht werden. Diese Berechnungsmethode wird von wissenschaftlichen Rechnern (TI-30X Pro MultiView™), Graphikrechnern (TI-82 STATS, TI-83/84 Plus) und CAS-Rechner (TI-Nspire™ CAS) unterstützt.

Die Bearbeitung von Schwingungsvorgängen in der komplexen Gauss'schen Zahlenebene führt Schülerinnen und Schüler frühzeitig in eine Methode ein, die im professionellen Umfeld der analogen und digitalen Signalverarbeitung (Elektrotechnik, Elektronik) allgemein üblich ist. Der nachfolgende Text ist so abgefasst, dass er von Schülerinnen und Schülern, z.B. als Lernaufgabe, direkt bearbeitet werden kann.

2. Die Funktion der harmonischen Schwingung

Abbildung 1 zeigt die Graphen der Schwingungsfunktionen:

$$y_{\text{links}}(t) = y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi)$$

$$y_{\text{rechts}}(t) = y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - \phi)$$

Die Größe y_0 bezeichnen wir als Amplitude (Maximalauschlag), ϕ als Phasenverschiebung (Phase), ω als Kreisfrequenz (in 1/Sekunde), t ist die Zeit (in Sekunden) und T die Schwingungsdauer (Periode).

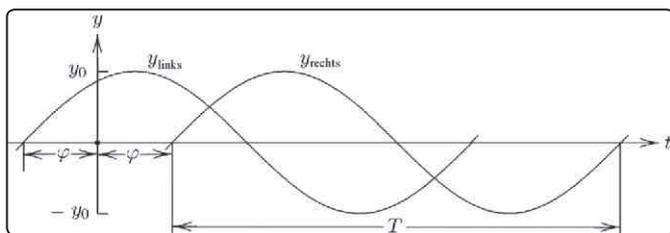


Abb. 1: Harmonische Schwingungen gleicher Frequenz und Amplitude aber unterschiedlicher Phase

Wir entnehmen dem Diagramm, dass eine positive Phasenverschiebung eine Translation des Funktionsgraphen nach links, eine negative Phasenverschiebung dagegen eine Translation nach rechts bewirkt.

Zwischen ω und T gilt der Zusammenhang $\omega \cdot T = 2 \cdot \pi$; für die Frequenz f (Anzahl Schwingungen pro Sekunde) gilt $f = 1/T = \omega/(2 \cdot \pi)$.

3. Die Überlagerung zweier harmonischer Schwingung

Wir addieren jetzt zwei Schwingungsfunktionen $y_1(t)$ und $y_2(t)$ mit der gleichen Frequenz f (bzw. Kreisfrequenz ω), aber unterschiedlichen Amplituden $y_{0,1}$ und $y_{0,2}$ bzw. Phasen ϕ_1 und ϕ_2

$$y_1(t) = y_{0,1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_1); \quad y_2(t) = y_{0,2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_2)$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$$= y_{0,1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_1) + y_{0,2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_2)$$

Zerlegen wir diese Funktion $y(t)$ gemäß dem Additionstheorem

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

erhalten wir schließlich:

$$y = y_{0,1} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\phi_1) + y_{0,1} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin(\phi_1) +$$

$$y_{0,2} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\phi_2) + y_{0,2} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin(\phi_2)$$

Jetzt fassen wir die Glieder mit $\sin(\omega \cdot t)$ und mit $\cos(\omega \cdot t)$ zusammen:

$$y = \sin(\omega \cdot t) \cdot (y_{0,1} \cdot \cos(\phi_1) + y_{0,2} \cdot \cos(\phi_2)) + \cos(\omega \cdot t) \cdot (y_{0,1} \cdot \sin(\phi_1) + y_{0,2} \cdot \sin(\phi_2)) \quad (1)$$

und setzen diese Funktion y einer neuen Schwingungsfunktion mit der Kreisfrequenz ω und der vorerst unbekanntes Amplitude y_0 und der ebenso unbekanntes Phase ϕ gleich

$$y = y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi)$$

$$= y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\phi) + y_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin(\phi) \quad (2)$$

$$= \sin(\omega \cdot t) \cdot (y_0 \cdot \cos(\phi)) + \cos(\omega \cdot t) \cdot (y_0 \cdot \sin(\phi))$$

Ein Vergleich von (1) und (2) ergibt:

$$y_0 \cdot \cos(\phi) = y_{0,1} \cdot \cos(\phi_1) + y_{0,2} \cdot \cos(\phi_2)$$

$$y_0 \cdot \sin(\phi) = y_{0,1} \cdot \sin(\phi_1) + y_{0,2} \cdot \sin(\phi_2)$$

Abbildung 2 zeigt eine geometrische Interpretation dieses Resultats in einem rechtwinkligen Dreieck.

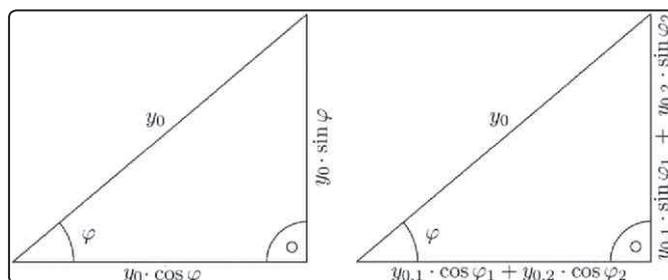


Abb. 2: Amplituden und Phasen der Gesamtschwingung (links) und der Einzelschwingungen (rechts)

Resultat:

Die Überlagerung (Superposition, Addition) von harmonischen Schwingungen mit gleicher Kreisfrequenz ω (bzw. Frequenz f), aber verschiedenen Amplituden $y_{0,1}$, $y_{0,2}$ und Phasen ϕ_1 , ϕ_2 ergibt wiederum eine harmonische Schwingung gleicher Kreisfrequenz ω (aber mit anderer Amplitude y_0 und anderer Phase ϕ).

4. Zeigerdarstellung

Das Resultat (Abb. 2) lässt noch eine andere Interpretation zu (Abb. 3):

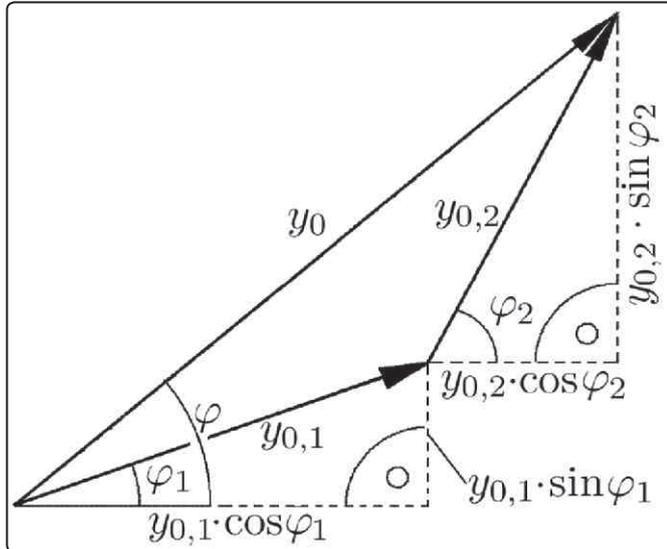


Abb. 3: Teilschwingungen und Sumschwingung in der Zeiger- (Vektor-) Darstellung

Betrachten wir die beiden Teilschwingungen als Vektoren mit den Polarkoordinaten $(y_{0,1}|\varphi_1)$ bzw. $(y_{0,2}|\varphi_2)$ so ergibt sich die Sumschwingung als resultierender Vektor mit den Polarkoordinaten $(y_0|\varphi)$. In der Elektrotechnik bzw. der Physik heißen solche Vektoren „Zeiger“ (Zeigerdarstellung von Schwingungen). Beachten Sie, dass der gemeinsame zeitabhängige Teil $(\omega \cdot t)$ der drei Schwingungsgleichungen $y(t)$, $y_1(t)$ und $y_2(t)$ in dieser Darstellung raffiniertweise nicht mehr vorkommt!

5. Darstellung in der komplexen Gauss'schen Zahlenebene

Diese Vektoren (Zeiger) interpretieren wir jetzt als komplexe Zahlen (Z , Z_1 , Z_2) in der Gauss'schen Zahlenebene (Abb. 4) und schreiben:

$$\begin{aligned} Z &= Z_1 + Z_2 = y_0 \cdot \underbrace{(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))}_z \\ &= y_{0,1} \cos(\varphi_1) + y_{0,2} \cos(\varphi_2) + i \cdot (y_{0,1} \sin(\varphi_1) + y_{0,2} \sin(\varphi_2)) \\ &= \underbrace{y_{0,1} (\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1))}_{z_1} + \underbrace{y_{0,2} (\cos(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2))}_{z_2} \end{aligned}$$

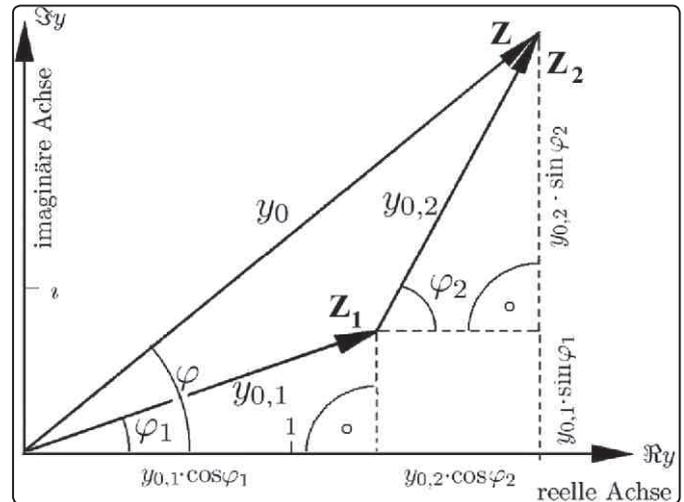


Abb. 4: Darstellung in der Gauss'schen Zahlenebene

Mithilfe der Beziehung von Euler und de Moivre $e^{i \cdot \varphi} = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$ können wir jetzt schreiben:

$$\begin{aligned} Z &= Z_1 + Z_2 = y_0 \cdot e^{i \cdot \varphi} \\ &= y_{0,1} \cdot e^{i \cdot \varphi_1} + y_{0,2} \cdot e^{i \cdot \varphi_2} \end{aligned}$$

Die Überlagerung von harmonischen Schwingungen mit gleicher Kreisfrequenz ω (bzw. Frequenz f) sowie verschiedener Amplituden $y_{0,1}$, $y_{0,2}$ und Phasenwinkeln φ_1 , φ_2 reduziert sich damit auf die Addition von komplexen Zahlen.

6. Ein Beispiel

Problemstellung

Wir berechnen die Überlagerung der beiden Teilschwingungen

$$\begin{aligned} y_1 &= 3 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{6}\right) \\ y_2 &= 5 \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

Damit unsere Methoden direkt angewendet werden können, müssen beide Schwingungen in der Sinusdarstellung vorliegen. Für y_2 schreiben wir daher:

$$\begin{aligned} y_2 &= 5 \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{6}\right) = 5 \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 5 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Sämtliche TI-Nachrichten Artikel und weitere nützliche Materialien finden Sie hier:
www.ti-unterrichtsmaterialien.net



Konventionelle goniometrische (trigonometrische) Lösungsmethode mit reellen Zahlen

Achtung: Der Rechner muss auf das Bogenmaß (Radian) eingestellt werden.

Der Abb. 2 entnehmen wir:

$$y_0 = \sqrt{(y_{0,1} \cos(\phi_1) + y_{0,2} \cos(\phi_2))^2 + (y_{0,1} \sin(\phi_1) + y_{0,2} \sin(\phi_2))^2}$$

$$= \sqrt{\left(3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 + \left(3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2}$$

$$\approx 7.74472$$

und

$$\phi = \arctan \frac{y_{0,1} \cdot \sin(\phi_1) + y_{0,2} \cdot \sin(\phi_2)}{y_{0,1} \cdot \cos(\phi_1) + y_{0,2} \cdot \cos(\phi_2)}$$

$$= \arctan \frac{3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\approx 0.852286 \text{ rad} \approx 48.8324^\circ$$

Wir erhalten schließlich als Resultat:

$$y_1 + y_2 = 3 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{6}\right) + 5 \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\approx 7.74472 \cdot \sin(\omega \cdot t + 0.852286)$$

Lösung mit komplexen Zahlen

Die Rechnereingabe (TI-Nspire™ CAS)

$$3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}} + 5 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$$

ergibt

$$\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} + i \left(\frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \right) \approx 5.09808 + 5.83013 \cdot i$$

Die Eingabe (menu, 2: Number, 9: Complex Number Tool, 6: Convert to Polar)

$$\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} + i \left(\frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \right) \cdot i \rightarrow \text{Polar}$$

ergibt

$$e^{-i \cdot \tan^{-1} \cdot (8 \cdot \sqrt{3} - 15)} \cdot \sqrt{15 \cdot \sqrt{3} + 34} \approx e^{0.852286 \cdot i} \cdot 7.74472$$

Die Berechnung mit komplexen Zahlen ist einfacher und liefert dasselbe Ergebnis wie die konventionelle goniometrische (trigonometrische) Methode.

Bei den Grafik-Rechnern TI-82 STATS, TI-83/84 Plus erfolgt die Eingabe analog zum TI-Nspire™ CAS.

Beim TI-30X Pro MultiView™-Rechner muss

$$\cos \phi + i \cdot \sin \phi = e^{i \phi}$$

einggegeben werden, da die Eingabe $e^{i \phi}$ bei diesem Rechner (leider) nicht zulässig ist.

7. Eine technische Anwendung: Drehstromnetze

Einführung

Die heute üblichen Dreiphasen-Wechselstromnetze (Drehstromnetze) versorgen ein Elektrogerät über Kabel und Stecker

(Abb. 5) mit drei elektrischen Spannungen U_1 , U_2 und U_3 und (gemessen zwischen den Polleitern L_1 , L_2 und L_3 gegenüber dem Neutraleiter (Nullleiter N).

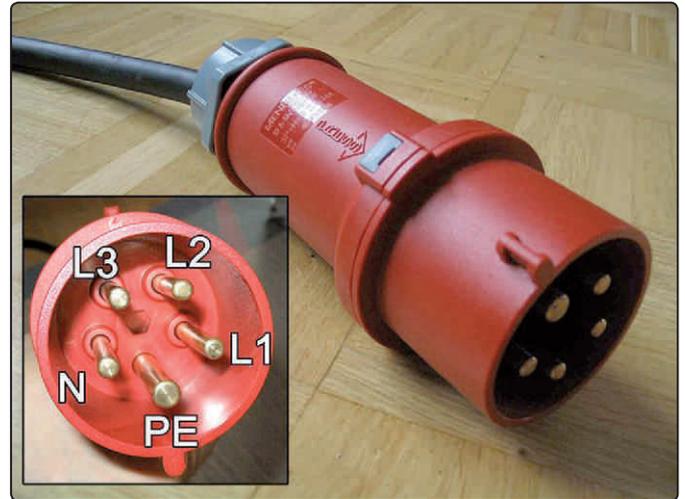


Abb. 5: Drehstromstecker CEE 32 5 (32 Ampere, 230/400 Volt, 5 Leiter)

Der Anschluss PE ist der so genannte Schutzleiter und wird aus Sicherheitsgründen mit dem (Metall-) Gehäuse des angeschlossenen Elektrogeräts verbunden.

Die Frequenz beträgt (in Europa) $f = 50$ Hertz, die Kreisfrequenz damit $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \approx 314$ Hz, die Periode $T = 20$ Millisekunden und die Amplitude $U_0 = 325$ Volt. Die drei Spannungen U_1 , U_2 und U_3 sind gegeneinander zeitlich je um $20/3$ ms ≈ 6.67 ms versetzt. Dies entspricht einer Phasenverschiebung von $2 \cdot \pi/3$ (120°).

Die zeitliche Abhängigkeit dieser drei Spannungen lautet:

$$U_1 = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$U_2 = U_0 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right)$$

$$U_3 = U_0 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{4 \cdot \pi}{3}\right)$$

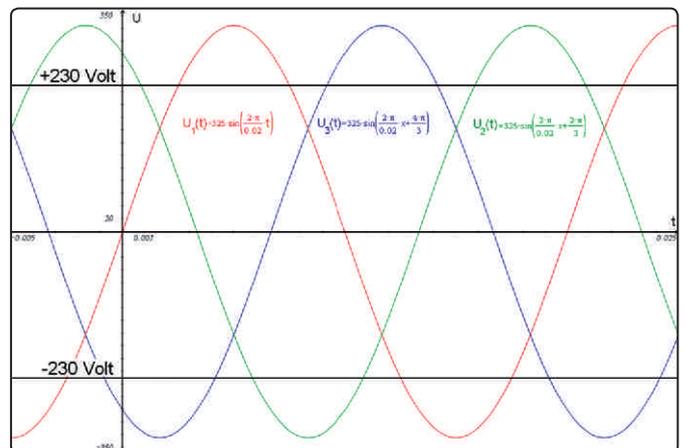


Abb. 6: Zeitliche Abhängigkeit der Spannungen $U_1(t)$, $U_2(t)$ und $U_3(t)$ in Drehstromnetzen

Netzspannung 230 Volt

Der zeitliche quadratische Mittelwert U_{RMS} dieser Spannungen („Root-Mean-Square“-Spannung oder Effektivspannung), die so genannte Netzspannung, beträgt:

$$\begin{aligned}
 U_{\text{RMS}} &= \sqrt{\frac{\int_0^T U_0 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) dt}{T}} \\
 &= \frac{U_0}{\sqrt{T}} \cdot \sqrt{\int_0^T \sin^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) dt} = \frac{U_0}{\sqrt{T}} \cdot \sqrt{\frac{T}{2}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{325 \text{ Volt}}{\sqrt{2}} \approx 230 \text{ Volt}
 \end{aligned}$$

Dieses Integral kann mit dem TI-Nspire™ CAS, den Grafikrechnern TI-82 STATS, TI84 Plus und dem wissenschaftlichen Rechner TI-30X Pro MultiView™ numerisch, mit dem TI-Nspire™ CAS auch algebraisch, gelöst werden.

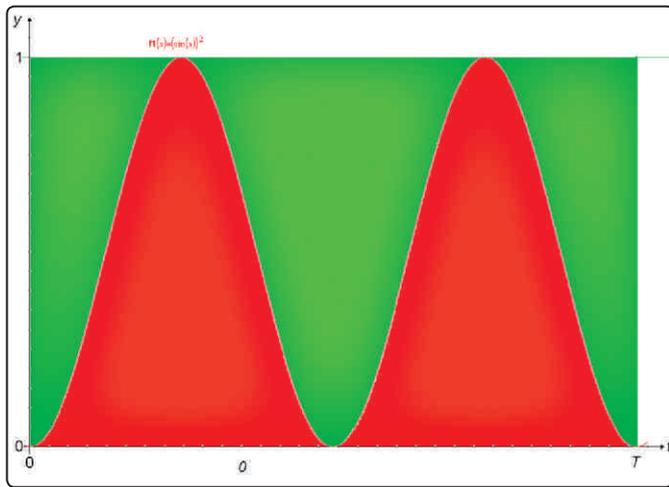


Abb. 7: Fläche unter dem Funktionsgraphen der quadrierten Sinusfunktion (rot)

Untersucht man die Fläche unter dem Funktionsgraphen von

$$\sin^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right)$$

längs einer Periode T , so erkennt, man aber auch ohne Rechnung, dass sie gerade halb so groß ist, wie die Fläche des Rechtecks, welche den Graphen umschließt (Abb. 7).

Sternschaltung

Werden drei elektrische Lasten je zwischen einem der drei Polleiter L_1, L_2, L_3 und dem Neutralleiter (Nullleiter) N betrieben, so spricht man in der Elektrotechnik von einer Sternschaltung (Abb. 8, links).

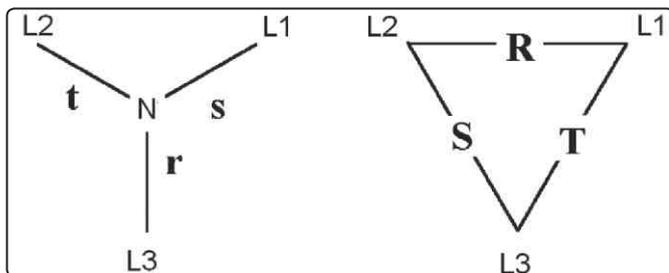


Abb. 8: Stern- und Dreiecksschaltung (schematisch)

Werden diese drei Lasten elektrisch gleich stark belastet, so fließen drei gleich große elektrische Ströme

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t), \\
 I_2 &= I_0 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{2 \cdot \pi}{3}\right) \\
 I_3 &= I_0 \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{4 \cdot \pi}{3}\right)
 \end{aligned}$$

welche sich im Sternpunkt, dem Neutralleiter addieren. Für den Summenstroms gilt (Rechner!)

$$I_{1,2,3} = I_0 \cdot \left(\underbrace{e^{i \cdot 0}}_1 + e^{i \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}} + e^{i \cdot \frac{4 \cdot \pi}{3}} \right) = 0$$

d.h. dass Amplitude und Phasenwinkel des Summenstroms verschwinden, im Neutralleiter also kein elektrischer Strom fließt. Dieses erstaunliche Resultat zeigt den großen Vorteil von Dreiphasennetzen gegenüber Einphasennetzen auf: Falls das Dreiphasennetz auf allen drei Polleitern gleich (symmetrisch) belastet ist, kann auf den Neutralleiter verzichtet werden.

Im Vergleich zu einem einzelnen *einphasigen* Wechselstromsystem halbiert sich bei einem symmetrischen Dreiphasensystem der Materialaufwand für elektrische Leitungen bei einer gleich großen elektrischen Leistung!

Dreiecksschaltung

Werden drei elektrische Lasten je zwischen den drei Polleiter L_1, L_2, L_3 betrieben also zwischen L_1 und L_2, L_2 und L_3 sowie L_3 und L_1 (der Neutralleiter (Nullleiter) N also nicht verwendet), so spricht man in der Elektrotechnik von einer Dreiecksschaltung (Abb. 8, rechts). Die elektrischen Spannungen an den drei elektrischen Lasten sind dann die Differenzen der Polleiterspannungen und es gilt:

$$\begin{aligned}
 U_{1,2} &= U_0 \cdot \left(\underbrace{e^{i \cdot 0}}_1 - e^{i \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}} \right) = U_0 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{6}} \cdot \sqrt{3} \\
 &\text{Amplitude } \sqrt{3} \cdot U_0, \text{ Phasenwinkel } -\frac{\pi}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{1,2} &= U_0 \cdot \left(e^{i \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3}} - e^{i \cdot \frac{4 \cdot \pi}{3}} \right) = U_0 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{3} \\
 &\text{Amplitude } \sqrt{3} \cdot U_0, \text{ Phasenwinkel } +\frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{1,2} &= U_0 \cdot \left(e^{i \cdot \frac{4 \cdot \pi}{3}} - \underbrace{e^{i \cdot \frac{6 \cdot \pi}{3}}}_1 \right) = U_0 \cdot e^{-i \cdot \frac{5 \cdot \pi}{6}} \cdot \sqrt{3} \\
 &\text{Amplitude } \sqrt{3} \cdot U_0, \text{ Phasenwinkel } -\frac{5 \cdot \pi}{6}
 \end{aligned}$$

Wird ein Gerät zwischen den Polleitern L_1 , L_2 , L_3 angeschlossen so erhöht sich die Spannung der Amplitude und beträgt:

$$\sqrt{3} \cdot U_0 = \sqrt{3} \cdot 325 \text{ Volt} \approx 563 \text{ Volt. (Faktor } \sqrt{3}\text{)}$$

Die effektive Spannung (Netzspannung) beträgt

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot U_0 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot 325 \text{ Volt} \approx 398 \text{ Volt,}$$

also rund 400 Volt. Damit erkennen wir einen weiteren großen Vorteil von Drehstromnetzen: Je nachdem, ob eine elektrische Last in Stern- oder in Dreieckschaltung angeschlossen wird stehen zwei unterschiedliche Netzspannungen von 230 Volt bzw. von 400 Volt (Effektivspannungen) zur Verfügung.

Quelle

[1] Schneebeil, H.R., Vollmer, H.,R.: Skalarprodukte, Schwingungen, Signale, Download unter:

www.swisseduc.ch/mathematik/schwingungen/

Print on Demand unter:

www.lulu.com/browse/search.php?fListingClass=0&fSearch=Schneebeil

Autor:

Hans Kammer, Bern (CH)

hanskammer@bluewin.ch

Hefeknospen mögen es warm - Einsatz des TI-Nspire™ CX und des TI-Nspire™ Lab Cradle im Biologieunterricht

Barbara Schmidt



Die Schwierigkeit bei biologischen Experimenten besteht immer darin, dass an der einen oder anderen Stelle lebende Organismen oder Organe beteiligt sind, die leider nicht immer das tun, was man von ihnen erwartet. Die Grundfrage, die man sich stellen muss bevor man solche Experimente im Unterricht einsetzt, ist also: Wie erreiche ich ein akzeptables Maß an Replizierbarkeit? Es gibt verschieden Möglichkeiten um diese Hürde zu nehmen. Man kann zum Einen so viele Versuche durchführen, dass man genügend „richtige“ Messwerte zusammenbekommt oder man kann zum Anderen auf verlässliche Organismen wie Bakterienkulturen oder Hefen zurückgreifen. Diese bieten durch ihren einfachen Bau und zuverlässigen Stoffwechsel, die Chance Schüler relativ sicher zu brauchbaren Ergebnissen gelangen zu lassen.

In dem vorgestellten Experiment werden Hefepilze der Backhefe *Saccharomyces cerevisiae* eingesetzt, die mit Hilfe des TI-Nspire™ und des CO₂-Sensors bei der Gärung und Zellatmung beobachtet werden. Backhefe ist den Schülern meist von zu Hause vertraut und bietet eine gute Grundlage für weitere Experimente. Man kann zum Beispiel die Wirkung von Umweltgiften (etwa Alkohol) auf die Hefe testen oder die Entwicklung in verschiedenen Nährlösungen.

Das Experiment

Zunächst wird also die Hefe in einer Suspension mit einer Zuckerlösung gemischt und bei verschiedenen Temperaturen beobachtet, wie sie Zucker in Kohlenstoffdioxid verwandelt. Dabei wird sehr schnell ersichtlich, dass die Reaktionsgeschwindigkeit von der Temperatur abhängt (Abb. 1). Außerdem lässt sich feststellen, dass mit einem Temperaturanstieg um 10 Kelvin sich die Reaktionsgeschwindigkeit etwa verdoppelt. Somit hat man die RGT-Regel hergeleitet.

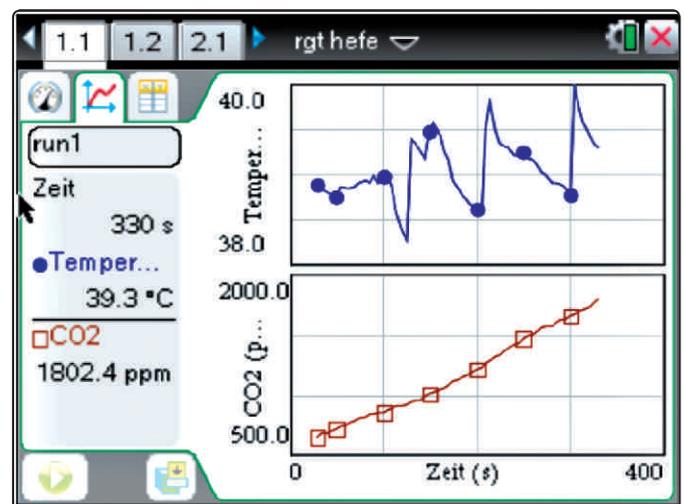


Abb. 1a: Messung bei ca. 39°

Barbara Schmidt

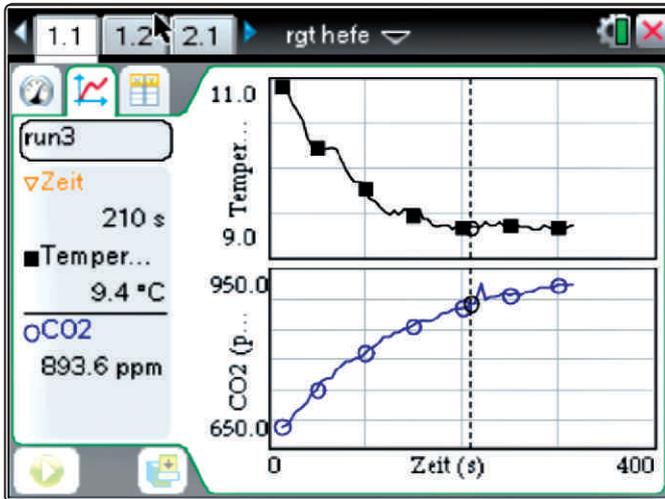


Abb. 1b: Messung bei ca. 10° (unbearbeiteter Screenshot vom TI-Nspire™ CX)

Zudem kann man an dieser Stelle den Unterschied zwischen Atmung und Gärung verdeutlichen. Da Hefepilze fakultative Anaerobier sind, können sie sowohl Atmung mit Hilfe ihrer Mitochondrien als auch Gärung im Cytoplasma betreiben. Durch die hohe Zuckerkonzentration, die in dem Versuch zum Einsatz kommt, wird trotz des oberflächlich vorhandenen Sauerstoffs vorwiegend Gärung betrieben. Dies würde sich auch bei Belüftung der Suspension nicht ändern (Crabtree-Effekt). Die Hefe verbraucht so mehr Glucose, gewinnt aber weniger Energie als durch die Zellatmung. Hier wird die schnellere Produktion von Kohlenstoffdioxid für eine bessere Messbarkeit ausgenutzt. Je nach Unterrichtsziel kann man darauf eingehen. Es ist jedoch nicht zwingend erforderlich um die RGT-Regel abzuleiten.

Anleitung

2 EL Haushaltszucker in 200 ml Wasser auflösen. Mit ½ Päckchen Frischhefe und 200 ml Wasser eine Hefesuspension herstellen. 3 Wasserbäder (10°C, 20°C, 40°C) für die Mischungen bereitstellen (Abb. 2). Eis und heißes Wasser vorbereiten.



Abb. 2 Arbeitsplatz mit vorbereiteten Wasserbädern

Die Standardeinstellungen für den TI-Nspire™ können genutzt werden (300 Sekunden; automatische Skalierung des TI-Nspire™). Erst kurz vor dem Start die vortemperierte Hefesuspension und die Zuckerlösung (jeweils 20 ml) zusammen gießen. Dabei kann man das Probengefäß des CO₂-Sensors nutzen oder kleine Weithalslerlenmeyerkolben. Sofort nach dem Zusammen gießen der Flüssigkeiten die Erfassung starten. Die einzelnen Durchläufe (run1, run2, ...) können einfach mit dem Symbol unten links gespeichert werden. Während der 5 Minuten des Durchlaufs die Temperatur mit Hilfe des Eises bzw. heißen Wassers möglichst konstant halten. Probengefäß spülen und weitere Durchgänge nach dem gleichen Muster durchführen.

Da das TI-Nspire™ Lab Cradle die Möglichkeit bietet mehrere Sensoren anzuschließen, kann man den CO₂-Sensor und parallel den Temperatursensor einsetzen, um die Temperatur des Wasserbades konstant zu halten. Allerdings sollte man dann die Geräte an eine externe Stromversorgung anschließen, da der CO₂-Sensor viel Energie vom Lab Cradle und Handheld abzieht. Genauso kann man natürlich den TI-84 Plus mit CBL nutzen oder ein Easylink verwenden und die Temperatur mit einem analogen Thermometer kontrollieren. Der Vorteil des neuen TI-Nspire™ CX liegt darin, dass man sehr schnell die Messkurven zusammenführen kann und somit eine hervorragende Übersicht bekommt um die RGT-Regel abzuleiten (Abb. 3). Dazu auf den Reiter Grafik gehen und in dem Feld, in dem sonst run1, run2, run3... steht, auf „Alles“ gehen. Nun kann man für die einzelnen Durchgänge noch die Symbole und Farben anpassen, sodass man Temperatur und CO₂-Wert besser zuordnen kann.

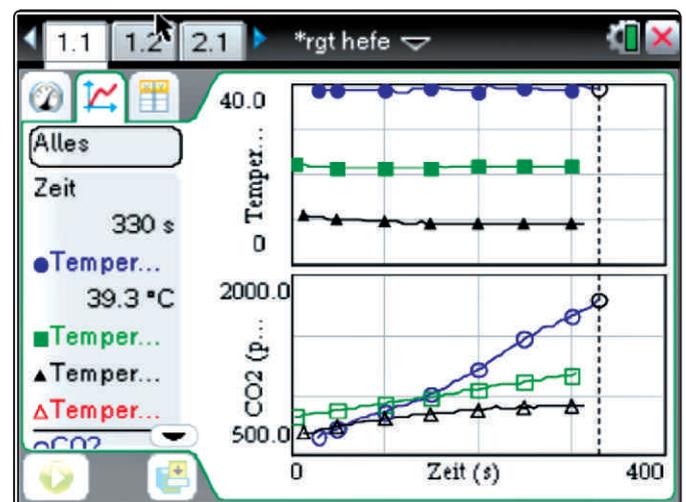


Abb. 3: gemeinsame Darstellung aller drei Kurven (Symbole und Farben bearbeitet)

Autor:

Barbara Schmidt, Berlin (D)
BuB.Schmidt@t-online.de

ABS – ein sinnvolles Assistenzsystem auch für Motorräder?

Michael Roser



Im Rahmen der Berufsmaturitätsarbeit hat sich David Ott, Schüler aus meiner Physik-Klasse, mit dem Nutzen von Assistenzsystemen und insbesondere mit ABS für Motorräder auseinandergesetzt. Da David selbst Motorrad fährt und zu seinem Kollegenkreis auch Profifahrer zählen, interessierte ihn u.a. auch speziell die Behauptung, dass Profis ohne ABS besser bremsen könnten.

Als Betreuer dieser Arbeit schlug ich David für die Untersuchung dieser Aussage vor, bei den vorgesehenen Testfahrten mit einem Beschleunigungssensor die Messwerte des Bremsens mit und ohne ABS zu erfassen und danach auszuwerten.

David setzt zwar im Mathematik- und Physikunterricht das TI-Nspire™ Handheld ein, hatte jedoch keinerlei Erfahrung mit der Messwerterfassung mit Hilfe von Sonden und dem TI-Nspire™. Nach einer kurzen Einführung an einem konkreten Beispiel (Anfahren und Abbremsen des Liftes im Schulhaus) traute sich David 15 Minuten später zu, die Datenerfassung beim Testbremsen mit den Motorrädern durchführen zu können.

Welche konkreten Probleme es noch zu lösen galt, bevor die Messwerte aufgenommen werden konnten, zeigt ein Originalauszug aus der Arbeit:

9.5. Aufzeichnen der Verzögerung

Unsere begleitende Lehrperson und Physiklehrer, Herr M. Roser, machte mich darauf aufmerksam, dass sich die Verzögerung mit Hilfe eines Beschleunigungssensors und unseres Taschenrechners TI-Nspire von Texas Instruments aufzeichnen lässt. Gerne nahm ich dieses Angebot an.

Den Beschleunigungssensor platzierte ich so, dass er möglichst frei von anderen Einflüssen messen kann. Bei einer Vollbremsung federt die Vorderradgabel durch die dynamische Radlastverteilung stark ein und das Heck des Motorrades hebt sich. Der beste Platz wäre wohl an der Vorderradachse gewesen, die Montage an der Achse



Abb. 23 - Beschleunigungssensor auf der Radabdeckung der BMW G 650.

war aber nicht möglich. Die Radabdeckung ist am unteren Teil der Federgabel befestigt und somit frei von der dynamischen Radlastverteilung. Dort konnte ich den Sensor auch exakt in Fahrtrichtung und waagrecht platzieren. Einzig die Vibrationen des Motors waren noch deutlich spürbar, diese konnte ich jedoch durch das Kalibrieren des Sensors und Anpassen der Messwerte minimieren.



Abb. 22 - Beschleunigungssensor.

Abb. 1: Originalauszug aus der BM-Arbeit

Da sich David der Fehleranfälligkeit der Testversuche und der Messungen bewusst war, haben er und seine Crew versucht, möglichst viele dieser Störquellen auszuschließen:

9.8. Versuchsablauf

Vor jeder Messreihe hatten beiden Fahrer drei Probeläufe. Danach wurden je drei Vollbremsungen durchgeführt und aufgezeichnet. Wurde zu früh oder zu spät gebremst oder merkte der Fahrer, dass die Anfahrtsgeschwindigkeit nicht richtig war, haben wir den Versuch wiederholt.



Abb. 27 - Kontrollieren und Speichern der Messdaten.

Die Aufzeichnung mit dem Taschenrechner verlief gut, einzig das Abspeichern bereitete mir Probleme. Zudem konnte ich schlecht einschätzen, ob die Messdaten wirklich brauchbar waren. Sonst war der Versuch einwandfrei verlaufen. Es ereignete sich kein Sturz und nichts erlitt Schaden, das wichtigste Ziel war erreicht. Nach fast zwei kalten Stunden freuten wir uns, das Motorrad wieder in die Garage stellen zu können.

Abb. 2: Originalauszug aus der BM-Arbeit

Die Qualität der Messdaten ist in der Tat bei einem Beschleunigungs-Zeit-Diagramm nicht einfach einzuschätzen:

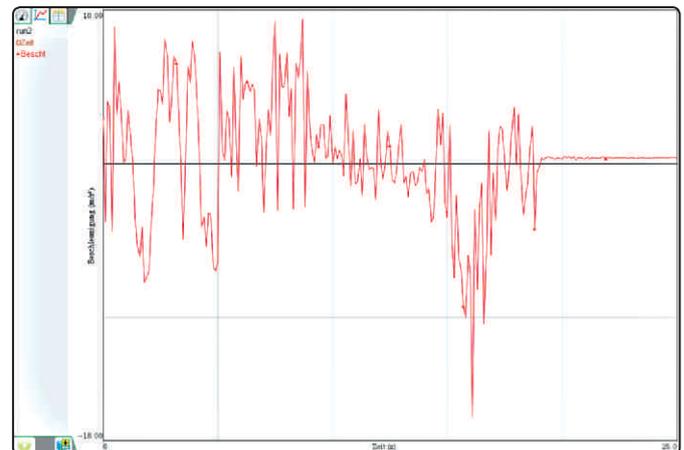


Abb. 3: a-t-Diagramm

Die Kalibrierung

Obwohl der Sensor vor dem Testlauf kalibriert wurde, ist zu erkennen, dass ab ca. 18 Sekunden sich ein praktisch konstanter Wert, der allerdings grösser als null ist, einstellt. Ein nachträgliches Kalibrieren kann durch Addieren oder Subtrahieren eines konstanten Korrekturwertes zu den einzelnen Beschleunigungsmessdaten erfolgen:

Schonen Sie die Umwelt und teilen uns bitte mit, wenn Sie die TI-Nachrichten nicht mehr erhalten möchten oder wenn Sie die Zusendung per E-Mail bevorzugen. Sämtliche Artikel finden Sie zudem unter: www.ti-unterrichtsmaterialien.net. Informieren Sie uns auch, wenn sich Ihre Adresse geändert hat:

ti-nachrichten@ti.com

run2				
	Zeit	Beschl	Calib_a	
1	0	2.99	2.64	
2	0.1	-3.77	-4.12	
3	0.2	4.06	3.71	
4	0.3	3.71	3.36	
5	0.4	-4.35	-4.70	
6	0.5	8.92	8.57	
7	0.6	3.22	2.87	
8	0.7	5.33	4.98	
9	0.8	2.93	2.58	
10	0.9	0.07	-0.280	

Abb. 4: Kalibrierung der Messwerte

Eine zusätzlich berechnete Spalte (= Beschleunigung - 0.35) wird eingefügt, mit dem Ziel, dass die Werte ab 18 s praktisch null sind:

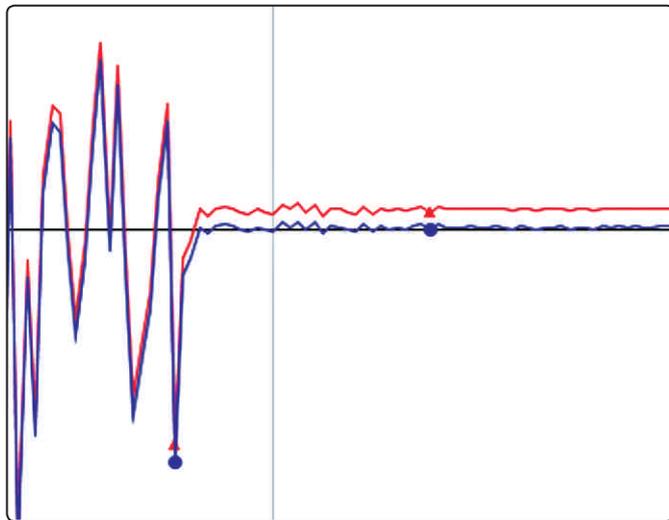


Abb. 5: Messwerte der Beschleunigung und ihre Kalibrierung

In einer neuen List&Spreadsheet-Seite werden die ersten beiden Spalten mit den Listen der Messwerte verlinkt. In der dritten und vierten Spalte werden jeweils aus der momentanen Beschleunigung die momentane Geschwindigkeit und daraus die momentan zurückgelegte Wegstrecke (numerische Integration) berechnet:

	A run2.zeit	B run2.calib_a_	C v	D s
1	0.	2.64052	0.264062	0.026406
2	0.1	-4.12457	-0.148405	0.011566
3	0.2	3.71057	0.222652	0.033831
4	0.3	3.36328	0.55898	0.089729
5	0.4	-4.7035	0.08863	0.098592
6	0.5	8.56748	0.945378	0.19313
7	0.6	2.87215	1.23259	0.316389
8	0.7	4.98224	1.73082	0.489471
9	0.8	2.58273	1.98909	0.68838
10	0.9	-0.279839	1.96111	0.88449

Abb. 6: Berechnung von Geschwindigkeit und zurückgelegter Wegstrecke

Werden diese Listen der Geschwindigkeit v und des Weges s in Abhängigkeit der Zeit als Scatterplots dargestellt, so ergibt sich ein sehr viel aussagekräftigeres Bild:

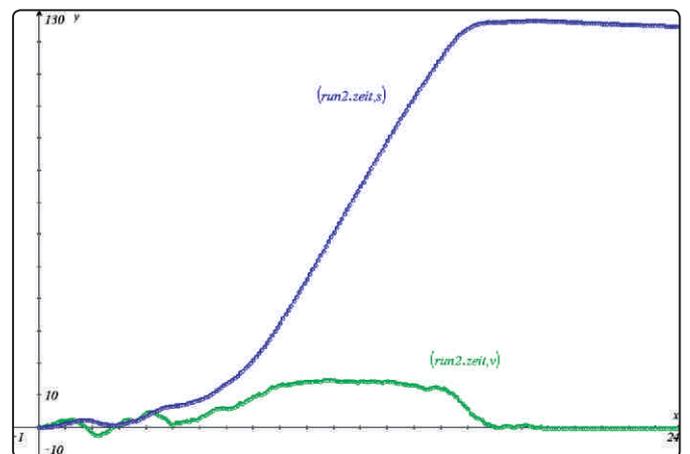


Abb. 7: Graphischer Verlauf von Geschwindigkeit und Weg

Allerdings ist festzustellen, dass mit der numerischen Anpassung von -0.35 der zurückgelegte Weg ab 18 Sekunden leicht abnimmt, anstatt konstant bleibt. Mit der Schieberegler-Variablen *kalib*, die in der zusätzlichen Spalte *Calib_a* der Messwertfassung den numerischen Korrekturwert ersetzt, kann nun interaktiv getestet werden, mit welchem Korrekturwert die beste Kalibrierung erzielt wird:

Informationen zum Lehrerfortbildungsprojekt T³ finden Sie unter:

www.t3deutschland.de
www.t3oesterreich.at
www.t3schweiz.ch

ABS – ein sinnvolles Assistenzsystem auch für Motorräder?

Michael Roser

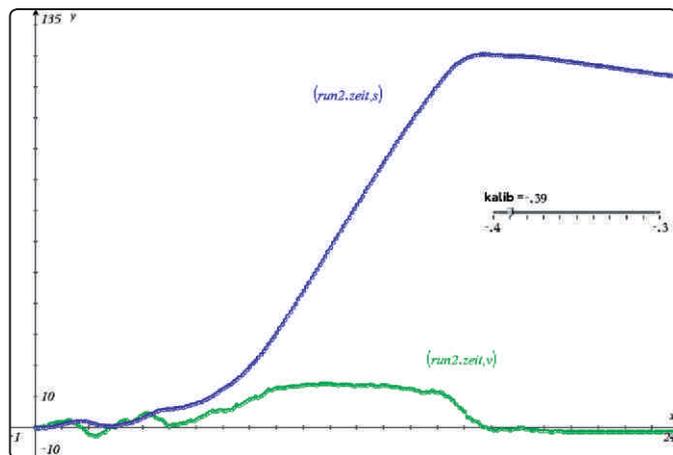


Abb. 8

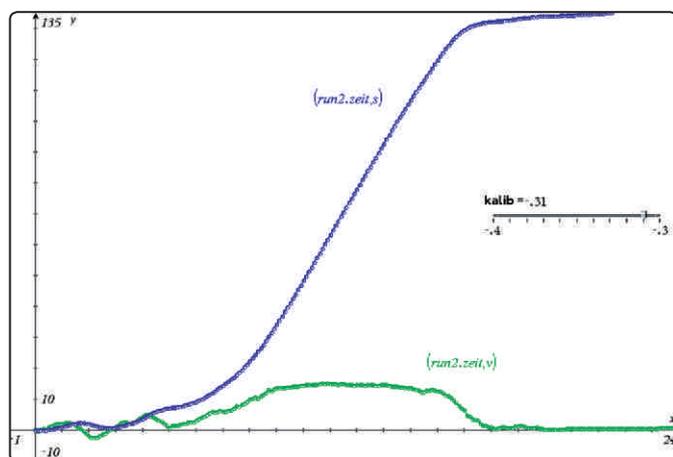


Abb. 9

Mit dem Schieberegler und der Eigenschaft, dass der Graph des Weges ab 18 Sekunden konstant bleiben muss, lässt sich eine viel genauere Kalibrierung durchführen.

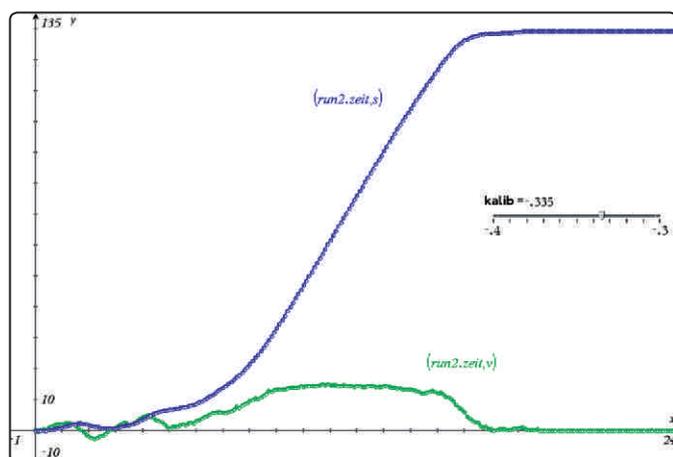


Abb. 10

Die Auswertung der Graphen

Die Messdaten in der Anfahrphase mit zwei Schaltvorgängen sind einerseits nicht relevant für die Untersuchung der Frage-

stellung und wären andererseits auch nicht brauchbar, da negative Beschleunigungen und somit auch eine Abnahme des Weges in der Beschleunigungsphase nicht plausibel sind.

Mittels digitalem Tachometer hat der Fahrer vor der Vollbremsung versucht, die Geschwindigkeit von 50 km/h (= 13.9 m/s) zu halten.

Bei der Vollbremsung mit ABS konnte dann eine mittlere Verzögerung von rund 7.3 m/s² erzielt werden.

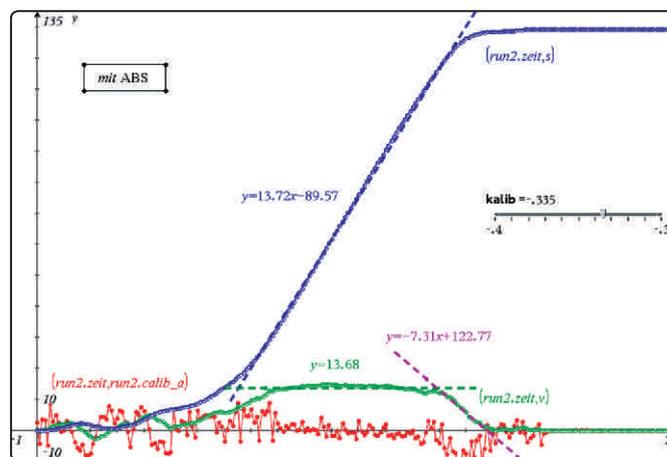


Abb. 11

Obwohl in den Versuchsergebnissen sicher noch viele kleine Ungenauigkeiten stecken, wurde bei der Vollbremsung ohne ABS eine Verzögerung von rund 6.8 m/s² erreicht.

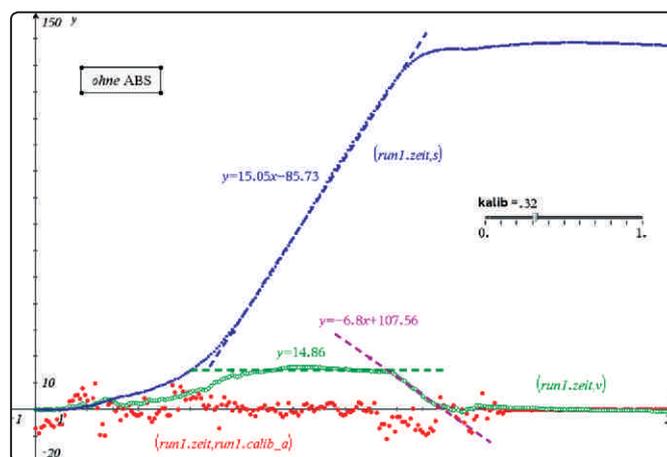


Abb. 12

Damit konnte David in seiner Arbeit mindestens zeigen, dass es Profis gibt, die mit dem Assistenzsystem ABS doch eine größere Verzögerung und damit einen kürzeren Bremsweg erzielen als ohne ABS.

Autor:

Michael Roser, Neftenbach (CH)

mroser@hispeed.ch

Untersuchung eines Röntgenspektrums mit der TI-Nspire™ Lab Station

Jürgen Enders



Ein klassisches Experiment der Kursstufe ist die Untersuchung von Röntgenspektren. Im Artikel wird beschrieben, wie solche Messungen mit der TI-Nspire™ Lab Station (bestehend aus TI-Nspire™ Lab Cradle und DataQuest App) durchgeführt werden können.

1. Grundlagen

In einer Röntgenröhre prallen Elektronen, die mit mehreren kV beschleunigt wurden, auf eine Anode. Durch ihre große Energie können sie in die Hülle der Atome eindringen, aus denen die Anode besteht. Gelangen sie in Kernnähe, werden sie durch die Kernladung abgelenkt. Als Folge wird ein Photon emittiert und die Elektronen werden abgebremst. Die Photonenenergie streut über einen großen Bereich, so dass das Spektrum dieser Strahlung (Bremsstrahlung) kontinuierlich ist. Die Elektronen können aber auch ihre Energie an Elektronen der Atomhülle übertragen und sie anregen. Dadurch entstehen unbesetzte Plätze, die sofort von anderen Elektronen der Atomhülle ausgefüllt werden. Dabei werden Photonen emittiert, die für das jeweilige Anodenmaterial charakteristisch sind. Sie bilden ein Spektrum aus charakteristischen Linien, das dem kontinuierlichen Bremspektrum überlagert ist. Im Versuch sichtbar sind die K_α -Linie (Sprung von der L-Schale auf die K-Schale) und die K_β -Linie (Sprung von der M-Schale auf die K-Schale).

Wegen der kleinen Wellenlängen der Röntgenstrahlung verwendet man bei der Untersuchung der Spektren einen Kristall, bei dem die an parallelen Netzebenen reflektierte Strahlung zur Interferenz gebracht wird (Braggsche Interferenz). Die Wellenlänge, bei der konstruktive Interferenz auftritt, ist abhängig vom Winkel, unter dem die Röntgenstrahlung auf den Kristall auftrifft. In der Praxis dreht man deshalb den Kristall, um verschiedene Winkel einzustellen. Detektiert wird die Röntgenstrahlung mit einem Geiger-Müller-Zählrohr, das ebenfalls gedreht werden muss.

2. Einstellungen und Versuchsdurchführung

Die Drehung sollte gleichmäßig mit motorisch kleiner, konstanter Geschwindigkeit erfolgen. Dadurch konnten hier etwa 10 Messungen pro Grad Drehung aufgenommen werden, es wurde also auf etwa $1/10^\circ$ genau gemessen. Die Messungen erfolgten ab 5° , um wirklich nur die reflektierte Strahlung zu erfassen, und endeten - bis auf eine Ausnahme - bei 30° . Aufgezeichnet wurde dabei die Spannung am Analogausgang des Geiger-Müller-Zählgerätes, die zugleich noch mit einem Drehspulinstrument kontrolliert wurde.

Geräte:

Schulröntgeneinrichtung mit Motorantrieb des Drehkristalls (Drehkristalle: LiF und NaCl), Geiger-Müller-Zählrohr und Betriebsgerät mit Analogausgang, Drehspulmessinstrument, TI-Nspire™ Lab Station mit TI-Nspire™ CX CAS inkl. integrierter DataQuest App und LabCradle, Spannungssensor

Einstellungen:

Zählgerät: 100 Impulse/s pro V, DataQuest™: Geschwindigkeit: 1 Stichprobe pro s, Dauer: 300 s

Versuchsablauf:

- 1) Drehwinkel auf 5° einstellen
- 2) Messung am TI-Nspire™ starten
- 3) Motor starten
- 4) Drehkristallwinkel beobachten – bei 30° Messung stoppen
- 5) evtl. Messung wiederholen, sonst mit  - 1: Experiment – 3: Datensatz behalten eine neue Messung (run) aufnehmen.

Abbildung 1 zeigt das Ergebnis einer solchen Messung. Über die Schaltfläche *run1* können alle Messreihen nacheinander oder zusammen grafisch dargestellt werden.

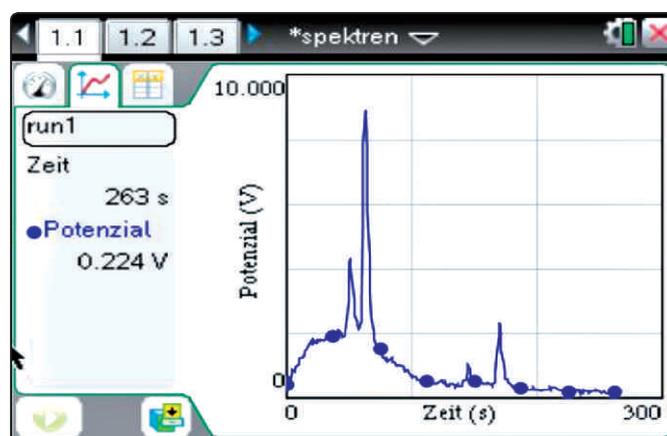


Abb. 1

	run1	Potenzial	Zeit
1	0	0.471	
2	1	0.521	
3	2	0.533	
4	3	0.684	
5	4	0.650	

Abb. 2

Abbildung 2 zeigt die Messtabelle mit den Messwerten aller Messreihen.

3. Auswertung

Für die weitere Auswertung muss die Zeitachse auf Grad-Maß umgerechnet werden. Dazu überträgt man zunächst die Daten nach *Lists&Spreadsheet*. Die Gradmaß-Werte können dann in einer neuen Spalte *grad* mit der Gleichung
$$\text{grad} = 5 + 30 \cdot \text{run1.zeit} / \text{max}(\text{run1.zeit})$$
 berechnet werden. In *Graphs* kann man sich dann die Messung als Streudiagramm (kleine Punkte, verbunden) darstellen lassen (Abb. 3).

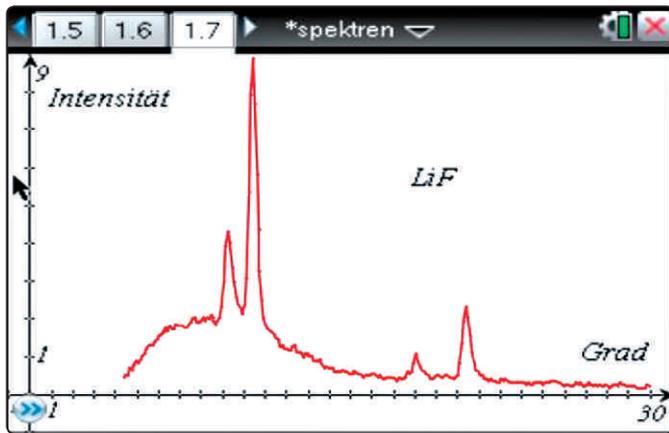


Abb. 3

Sehr gut zu sehen sind der Bremsberg und die für die Molybdän-Anode charakteristischen Linien erster und zweiter Ordnung. Für den Netzebenenabstand $d = 201 \text{ pm}$ (LiF) erhält man die in der Tabelle aufgeführten Ergebnisse, abgelesen unter Verwendung der *Grafikspur* (menu - 5: Spur).

Linie	Θ ($n = 1$)	Θ ($n = 2$)	$\lambda = 2d \cdot \sin(\Theta) / n$ 1.Ord./2.Ord. (Mittelwert)	Literaturwert
K_α	$10,4^\circ$	$20,4^\circ$	$72,6 / 70,1 \text{ pm}$ ($71,3 \text{ pm}$)	$71,1 \text{ pm}$
K_β	$9,25^\circ$	$18,0^\circ$	$64,6 / 62,1 \text{ pm}$ ($63,4 \text{ pm}$)	$63,2 \text{ pm}$

Die Mittelwerte stimmen gut mit den Literaturwerten überein.

4. Abhängigkeit des Spektrums von Strahlstromstärke und Anodenspannung

Abbildung 4 zeigt das Röntgenspektrum bei den Stromstärken $I_A = 0,8 \text{ mA} / 0,4 \text{ mA} / 0,1 \text{ mA}$ und gleicher Anodenspannung $U_A = 41 \text{ kV}$. Deutlich ist zu erkennen, dass die Intensität abnimmt, aber die grundsätzliche Struktur des Spektrums erhalten bleibt. Insbesondere ist bei allen Stromstärken die linke (kurzwellige) Grenze des Spektrums gleich.

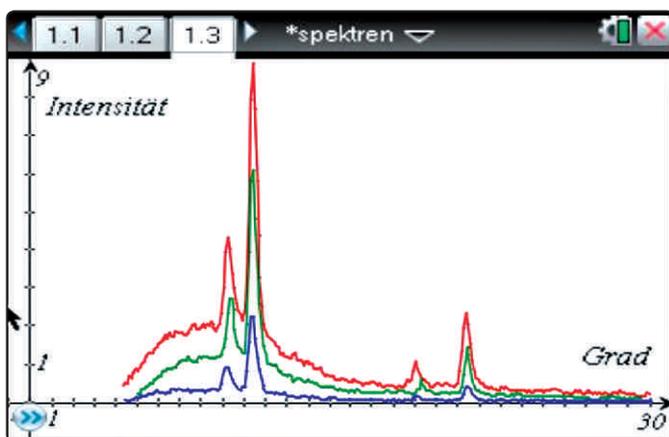


Abb. 4

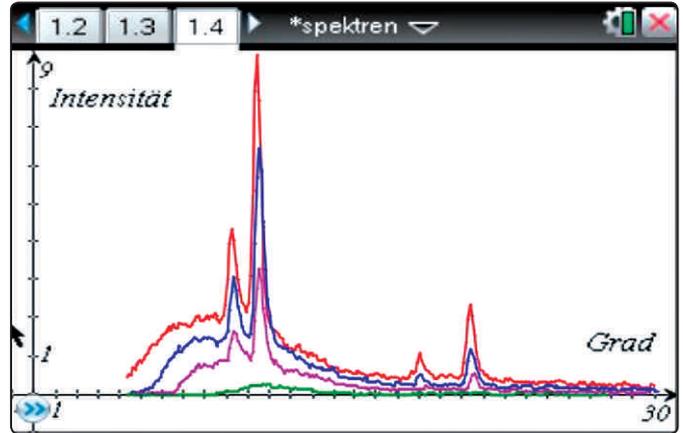


Abb. 5

Auch die Anodenspannung U_A lässt sich variieren (Abb. 5). Bei der einheitlichen Strahlstromstärke $I_A = 0,8 \text{ mA}$ wurden Spektren für $41 \text{ kV} / 37 \text{ kV} / 30 \text{ kV} / 21 \text{ kV}$ aufgenommen. Erwartungsgemäß verringert sich die Intensität, bei 21 kV sind nicht einmal mehr die charakteristischen Linien zu sehen. Aber es verschiebt sich auch die kurzwellige Grenze nach rechts hin zu größeren Wellenlängen.

Für die kurzwellige Grenze gilt:

$$\lambda_{\min} = (h \cdot c) / (e \cdot U)$$

Mit $\lambda = 2d \cdot \sin(\Theta)$ erhält man $2d \cdot \sin(\Theta) = (h \cdot c) / (e \cdot U)$ oder

$$h = (2d \cdot \sin(\Theta) \cdot e \cdot U) / c$$

Die Werte für das Plancksche Wirkungsquantum h weichen stark vom Literaturwert ab, da es schwierig ist, den Grenzwinkel genau zu bestimmen.

Spannung	Grenzwinkel Θ	λ_{\min}	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
41 kV	4°	$28,0 \text{ pm}$	$6,14 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
37 kV	$4,9^\circ$	$34,3 \text{ pm}$	$6,79 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
30 kV	$6,2^\circ$	$43,4 \text{ pm}$	$6,96 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
21 kV	$8,8^\circ$	$61,5 \text{ pm}$	$6,90 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

5. Einfluss eines Zirkonfilters

Bei einigen Versuchen (z.B. zur Absorption) wird monochromatische Röntgenstrahlung benötigt. Die Monochromatisierung erreicht man üblicherweise durch den Einschub eines dünnen Streifen Zirkonbleches in den Strahlengang. Abbildung 6 zeigt den Einfluss auf das Spektrum.

Jürgen Enders

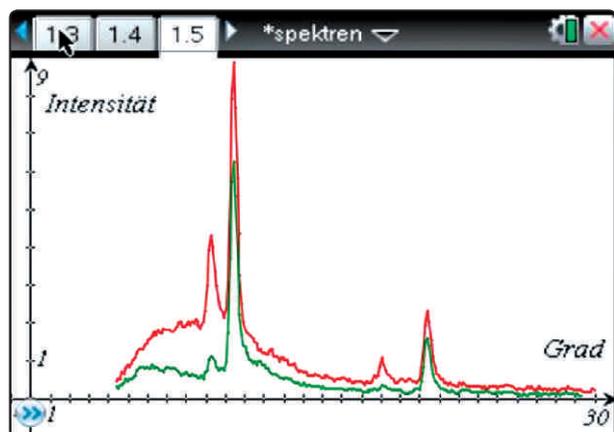


Abb. 6

Bis kurz vor der charakteristischen Linie K_{α} ist eine sehr deutliche Dämpfung der Strahlung erkennbar, die auch die K_{β} -Linie mit einschließt. Dann liegt offenbar eine Absorptionskante des Zirkon vor, so dass alle größeren Wellenlängen nur geringfügig abgeschwächt werden. Dominierend in ihrer Intensität bleibt aber die K_{α} -Linie, so dass man durchaus von monochromatischem Röntgenlicht sprechen kann.

6. Vergleich LiF und NaCl als Drehkristall

Verwendet man statt LiF als Kristall NaCl, so liegen die charakteristischen Linien bei kleineren Winkeln (K_{α} : 7,99° K_{β} : 7,15°) und dichter zusammen (LiF: 1,15°, NaCl: 0,84°), da der Netzebenenabstand bei NaCl größer ist ($d = 282$ pm).

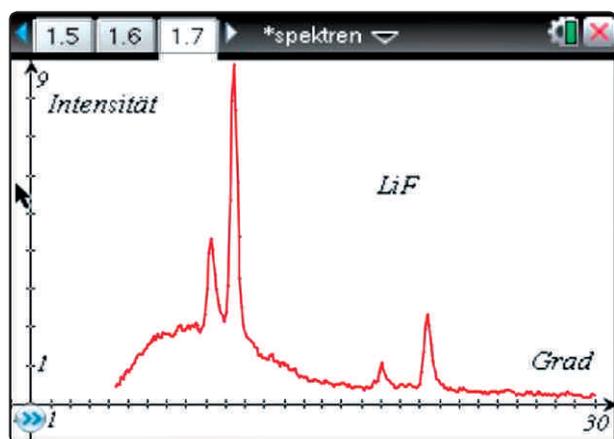


Abb. 7

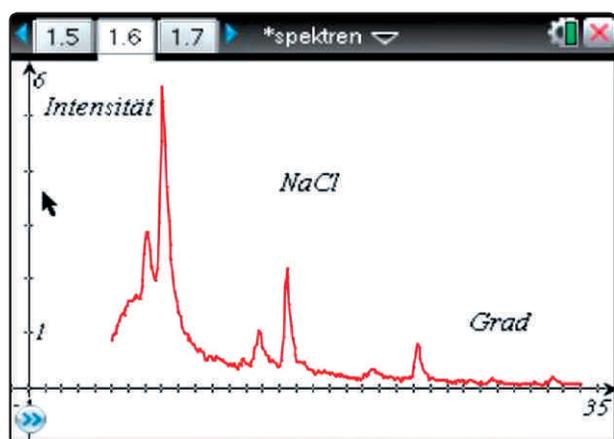


Abb. 8

Die charakteristischen Linien sind bei NaCl im Gegensatz zu LiF bis zur 4. Ordnung erkennbar, wenn man die Messung bis etwa 33° erweitert:

Linie	n = 1	2	3	4
K_{α}	7,99°	15,4°	23,2°	31,2°
K_{β}	7,15°	13,8°	20,6°	27,6°

7. Feinstruktur der K_{α} - Linie

Die K_{α} -Linie besteht aus den zwei dicht benachbarten Linien $K_{\alpha 1}$ und $K_{\alpha 2}$. Eine Auflösung dieser Linien sollte möglich sein, wenn man eine möglichst große Ordnung betrachtet und eine hohe Abtastrate einstellt. Hier wurde beim NaCl-Kristall $n = 3$ gewählt. Der interessante Bereich umfasst etwa zwei Winkelgrad, die maximal mögliche Abtastrate beim Spannungssensor ist 30 pro Sekunde. Mit diesen Werten wurde die Abbildung 9 erstellt, hier in der Darstellung mittels LabQuest™.

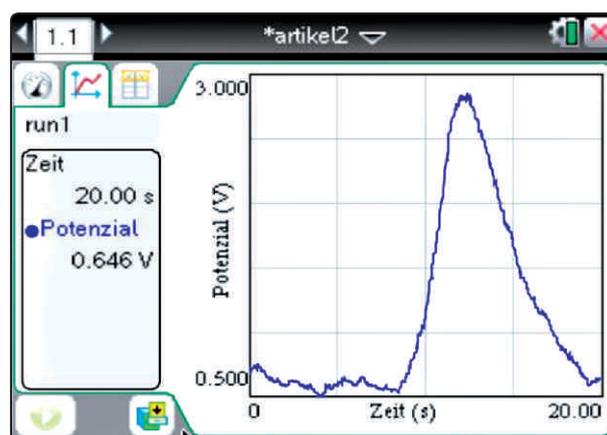


Abb. 9

Eine Trennung der Linien ist nicht sichtbar geworden, die Feinstruktur von K_{α} kann nicht dargestellt werden. Lediglich der flachere Abfall hin zu größeren Wellenlängen könnte als Indiz dafür gewertet werden, dass K_{α} aus zwei Linien besteht.

Autor:

Jürgen Enders, Hameln (D)

aj.enders@t-online.de

Gleichungssysteme mit Parametern

Dr. Hubert Langlotz



Für viele, die seit längerem mit CAS-Rechnern arbeiten, ist das folgende Problem vermutlich bekannt. Da aber z. B. in Thüringen viele neue Nutzer hinzu gekommen sind, ist es vielleicht angebracht, noch einmal darauf hin zu weisen. (vgl. auch TI-Nachrichten 2/99, K.-H. Keunecke: *Vorsicht bei Gleichungssystemen mit Parametern: rref() löst nicht alle!*)

Beispielaufgabe:

Man bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems $a \cdot x + y = 1$ und $x + a \cdot y = 1$ in Abhängigkeit vom reellen Parameter a !

Erster Lösungsversuch

Ein erster Versuch mit den Lösungsvariablen x und y liefert nur eine Lösung.

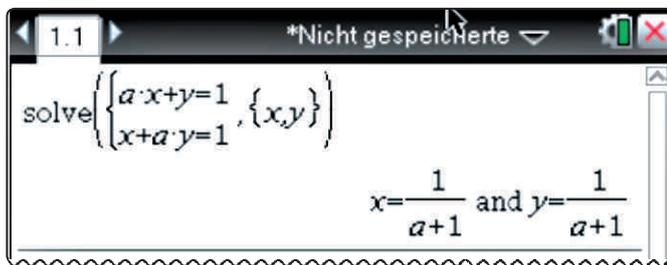


Abb. 1

Von den Schülerinnen und Schülern sollte man vielleicht erwarten, dass sie den Fall $a = -1$ ausschließen und interpretieren können (Was bedeutet dies?).

Zweiter Lösungsversuch

Was aber passiert, wenn man das Gleichungssystem **so** löst, also drei Lösungsvariablen angibt?

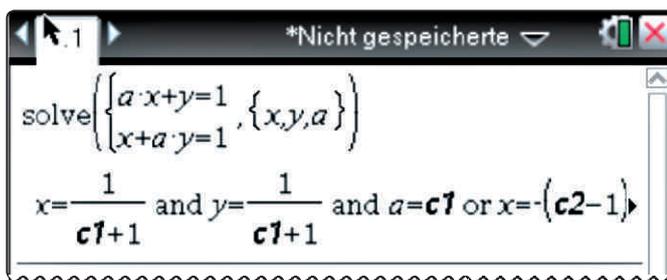


Abb. 2

Man sieht, dass noch ein weiterer Fall ($a=1$) diskutiert werden muss.

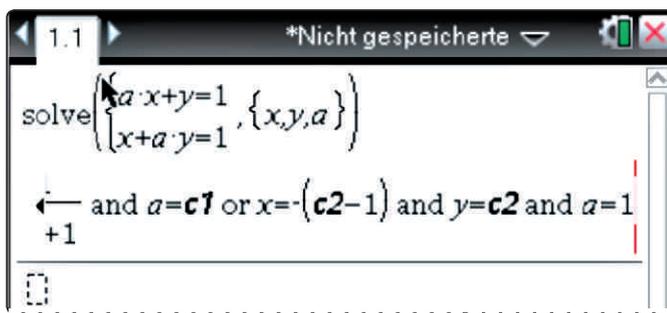


Abb. 3

Interessant wird es, wenn man die Gleichungen als lineare Funktionen auffasst und sich diese in Abhängigkeit vom Parameter a darstellen lässt.

Formt man die beiden Gleichung nach y auf, ergeben sich die Funktionen f_1 und f_2 mit:

$$f_1(x) = y = 1 - a \cdot x \quad \text{bzw.} \quad f_2(x) = y = (1 - x) / a$$

Es entstehen in der Grafik vier unterschiedliche Fälle, die nachfolgend diskutiert werden.

Fall 1: $a \neq -1$ und $a \neq 0$

Hier handelt es sich um zwei sich schneidende Geraden, d. h. es existiert eine eindeutige Lösung.

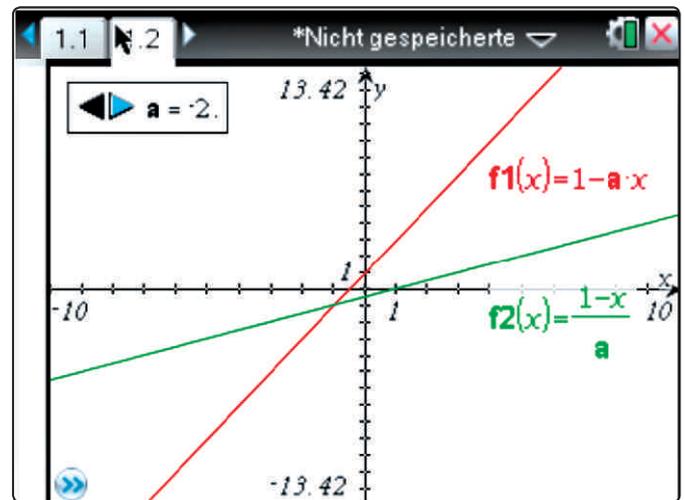


Abb. 4

Fall 2: $a = -1$

Die diesem Fall entstehen zwei zueinander parallele Geraden, also hat das Gleichungssystem keine Lösung. Dieser Fall ist auch bei Verwendung des solve-Befehls mit 3 Lösungsvariablen nicht sofort ersichtlich.

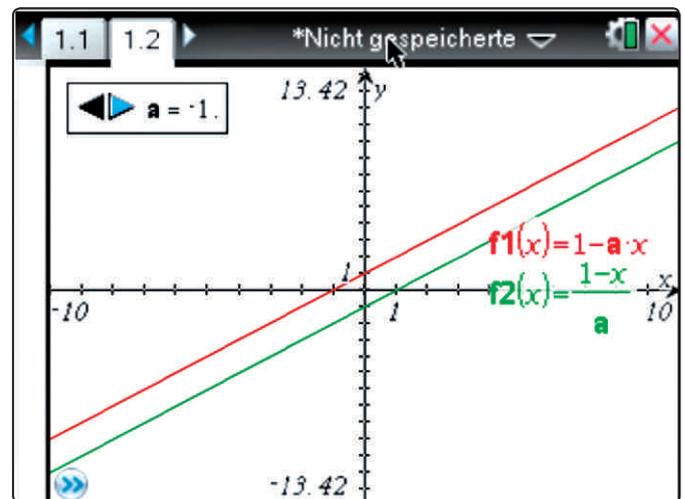


Abb. 5

Fall 3: a = 0

Eigentlich handelt es sich hier auch wieder um den Fall 1, allerdings wird die Gerade zu $x = 1$ nicht gezeichnet und der gemeinsame Punkt $(1|1)$ ist in der Grafik nicht erkennbar.

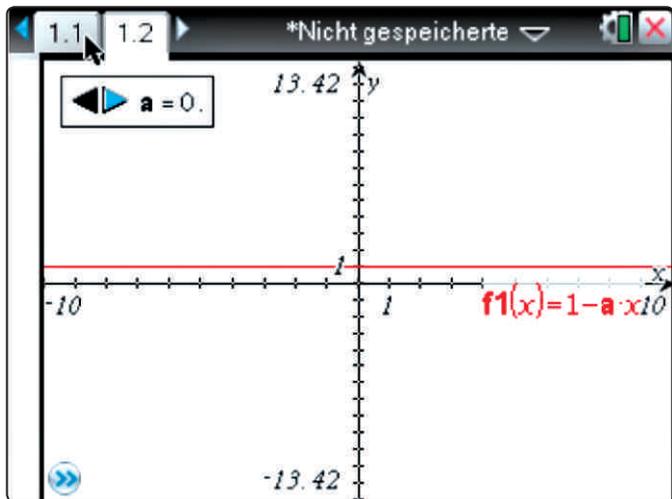


Abb. 6

Fall 4: a = 1

Beide Gleichungen sind identisch, d. h. es existieren unendlich viele Lösungen. Dies ist der durch Anwendung des solve-Befehls mit drei Lösungsvariablen gefundene weitere Fall.

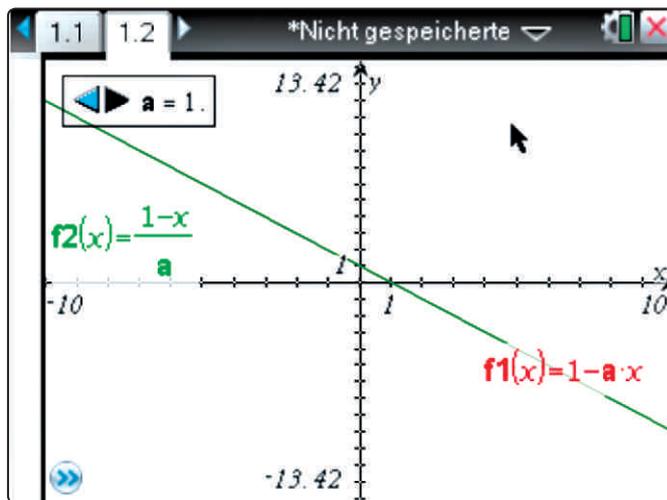


Abb. 7

Zusammenfassend lässt sich feststellen:

Kommen in einem Gleichungssystem zusätzliche Parameter vor, so sollte man beim Lösen immer nach allen „Variablen“ lösen lassen. Eine graphische Kontrolle (wenn möglich) ist zu empfehlen. Der ebenfalls im Menü befindliche Befehl linsolve() sollte in solchen Fällen nicht verwendet werden, da dort z.B. bei 2 Gleichungen nur 2 Variablen angegeben werden können.

Autor:

Dr. Hubert Langlotz, Wutha-Farnroda (D)
langlotz-mosbach@t-online.de

Autoren willkommen! Kritik erwünscht!

Ihr Beitrag zu den TI-Nachrichten ist herzlich willkommen, besonders natürlich Beispiele aus dem Unterricht. Ihre Kritik hilft uns, Ihren Wünschen besser gerecht zu werden. Ihr Lob spornt uns an.

Senden Sie Ihre Beiträge bitte per E-Mail an unsere TI-Nachrichten Redaktion:
ti-nachrichten@ti.com

oder per Post an

Texas Instruments, Education Technology, TI-Nachrichten, Haggertystraße 1, 85356 Freising, Deutschland

Bitte beachten Sie die Hinweise für Autoren auf unserer Website.

Kinetik der Reaktion von Magnesium mit Salzsäure-Lösung

Dr. Klaus Wloka



Plädoyer für den Einsatz des graphikfähigen Taschenrechners (GTR) im Chemieunterricht

Mittlerweile wird an den meisten Gymnasien in Niedersachsen bereits in Klasse 7 ein graphikfähiger Taschenrechner (GTR) im Mathematikunterricht eingeführt. Nach meinen Erfahrungen wird dieser dann auch im Fach Physik angemessen bei der Auswertung von Experimenten eingesetzt, da sich die meisten Physikkolleginnen und -kollegen, die Mathematik als zweites Fach unterrichten, seiner Vorteile bei der Auswertung von Daten aus Messreihen bewusst sind. Ein wirkliches Schattendasein erlebt aber der Einsatz des GTR immer noch in den Fächern Chemie und wohl auch Biologie. Viele Chemielehrerinnen und -lehrer, die Mathematik nicht als zweites Fach unterrichten, haben aufgrund ihrer außergewöhnlichen experimentellen Belastungen im Unterricht nur selten die Zeit, sich mit den vielfältigen Möglichkeiten des Einsatzes des an ihrer Schule eingeführten GTR auseinanderzusetzen. Die Kenntnis weniger Funktionen bietet aber bereits vielfältigen Komfort bei der Auswertung quantitativer Experimente. Dies soll am Beispiel einer experimentellen Auswertung im Folgenden gezeigt werden. Die Auswertung erfolgt mit einem TI-83/84. Fokussiert wird auf die Anwendung der Listenoptionen des GTR. Die ersten Aufgabenteile liefern das chemische Verständnis für erforderliche Berechnungen, die dann bei der Arbeit mit den Listen wieder in Erscheinung treten. Das Vorgehen zur Benutzung eines GTR wird anhand der Lösung einer Aufgabe ausführlich besprochen und mit Tipps angereichert.

Die Aufgabe

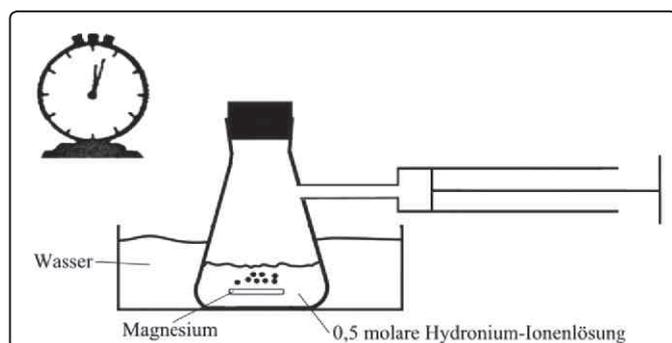


Abb. 1

Kinetik der Reaktion von Magnesium mit Salzsäure-Lösung

Da die Reaktion exotherm verläuft und die Temperatur mit Sicherheit einen Einfluss auf die Geschwindigkeit der Reaktion ausübt, wird das Reaktionsgefäß in eine große Schale mit Wasser gestellt, um die Temperatur im Gefäß weitgehend konstant zu halten.

Für die Untersuchung des zeitlichen Verlaufs wird zunächst einmal das gebildete Wasserstoff-Volumen in Abhängigkeit von der Zeit aufgefangen.

Durchführung:

Zu ca. 150 mg Magnesiumband (ca. sieben 1 cm lange Stückchen) werden zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$ $V = 10 \text{ mL}$ Salzsäure-Lösung der Anfangskonzentration $c_{\text{H}_3\text{O}^+}(0) = 0,5 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$ gegeben. In bestimmten Zeitabständen wird das im Kolbenprobier aufgefangene Wasserstoffvolumen $V_{\text{H}_2}(t)$ gemessen. Zu Beginn lässt man erst etwas mehr Wasserstoff entstehen, bevor man mit der Ablesung beginnt. Es ergeben sich die auf dem Arbeitsblatt dargestellten Messwerte bei $T = 293 \text{ K}$ und $p = 1013 \text{ hPa}$.

Anleitungen

Bevor die Schülerinnen und Schüler mit der Aufgabe beginnen, erhalten sie die Kenntnisse zur Arbeit mit Listen auf dem TI-83/84 aus der Mittelstufe noch einmal zusammengefasst auf einem Infoblatt. Zudem erhalten sie eine Anleitung, wie sie mit dem GTR die erforderlichen Daten zur Aufgabenstellung mit den Listenoptionen ermitteln können (siehe folgende Seiten).

Hinweise zur kinetischen Auswertung der Reaktion von Magnesium mit Hydronium-Ionen mithilfe der Listenverarbeitung des GTR

In die Liste L1 werden die Zeiten, in die Liste L2 die Volumina des aufgefangenen Wasserstoffs gegeben. Mit $L3 = L2/24$ wird die Anzahl der Mole Wasserstoff berechnet. Mit $L4 = (5 - 2 \cdot L3)/10$ wird die Hydronium-Ionenkonzentration der Lösung berechnet. Mit $L5 = \text{abs}(\Delta\text{List}(L1))$ wird jeweils der Betrag der Differenz jeweils zweier aufeinander folgender Zeitwerte berechnet ($\text{abs}()$ unter $\text{math} \rightarrow \text{Num} \rightarrow 1$; $\Delta\text{List}()$ unter $\text{list} \rightarrow \text{Ops} \rightarrow 7$). Mit $L6 = \text{abs}(\Delta\text{List}(L4))$ wird der Betrag der Differenz zweier aufeinanderfolgender Konzentrationswerte berechnet [beachte: da $c_2 < c_1$ ist, wird $c_2 - c_1 < 0$, der Betrag bewirkt nach Definition: $\text{abs}(c_2 - c_1) = -(c_2 - c_1) = c_1 - c_2$]. Mit $L7 = L6/L5$ wird die mittlere Geschwindigkeit über dem jeweiligen Intervall berechnet. Diese wird der mittleren Konzentration des jeweiligen Intervalls zugeordnet. Es wird also ein $(\bar{c} - \bar{v})$ -Diagramm erzeugt. Hierbei wird ein kleiner Fehler gemacht, weil die Sekante nicht genau die Tangente des Konzentrationswertes der Intervallmitte ist, aber bei kleinen Intervallen liegt der zugehörige Konzentrationswert schon in der Nähe der Mitte. Die Intervallmitten lassen sich wie folgt berechnen: In L4 wird der erste Wert gelöscht, dann $L8 = L6/2 + L4$. (Begründung: In L6 stehen die $c_v - c_{v+1}$ -Werte):

$$\frac{c_1 - c_2}{2} + c_2 = \frac{c_1 - c_2 + 2c_2}{2} = \frac{c_1 + c_2}{2}$$

Kinetik der Reaktion von Magnesium mit Salzsäure-Lösung

- Arbeitsblatt -

	$\frac{\text{Zeit}}{\text{s}}$	$\frac{V(\text{H}_{2(\text{g})})}{\text{mL}}$							
1	0	0							
2	64	20							
3	88	25							
4	113	30							
5	143	35							
6	182	40							
7	240	46							
8	270	48							
9	295	50							
10	360	53							
11	420	55							
12	540	56							

Es ergeben sich die in der Tabelle dargestellten Messwerte bei $T = 293 \text{ K}$ und $p = 1013 \text{ hPa}$.
In die leeren Spalten können Sie später Ihre mit dem GTR ermittelten Daten eintragen.

Aufgaben

- Stellen Sie das $(t - V)$ -Diagramm (Zeit-Volumen-Diagramm) auf dem Display des GTR dar. Übernehmen Sie es in Ihre Mappe.
- Ermitteln Sie die Stoffmenge der Wasserstoffmoleküle in $\text{mmol} \left[n_{\text{H}_2}(t) \right]$, die zu den gegebenen Zeiten entstanden ist. (Arbeiten Sie dabei mit den Listenoptionen des GTR).
- Berechnen Sie die zugehörigen zeitabhängigen Konzentrationen der Hydronium-Ionen $c_{\text{H}_3\text{O}^+}(t)$. Das entstehende Wasser kann für die Konzentrationsbestimmung vernachlässigt werden.
- Erstellen Sie ein $\left[t - c_{\text{H}_3\text{O}^+}(t) \right]$ Diagramm (Zeit-Konzentrations-Diagramm) auf dem Display Ihres GTR und übernehmen Sie es in Ihre Mappe.

- Die Durchschnittsgeschwindigkeit \bar{v} einer chemischen Reaktion wird definiert als Konzentrationsänderung der Edukte oder der Produkte über einem Zeitintervall Δt :

$$\bar{v} = \frac{\Delta c(\text{Produkt})}{\Delta t} \quad \text{oder} \quad \bar{v} = -\frac{\Delta c(\text{Edukt})}{\Delta t} \quad \text{Das negative Vorzeichen bezogen auf eine eduktbezogene Auswertung ist erforderlich, weil } \Delta t = t_2 - t_1 > 0 \text{ und } \Delta c = c_2 - c_1 < 0 \text{ ist, es aber nur positive Geschwindigkeiten des Umsatzes geben kann.}$$

lich, weil $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$ und $\Delta c = c_2 - c_1 < 0$ ist, es aber nur positive Geschwindigkeiten des Umsatzes geben kann.

Ermitteln Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v} = \left| \frac{c(t_{v+1}) - c(t_v)}{t_{v+1} - t_v} \right|$ des Umsatzes an Hydronium-Ionen über den Intervallen $t_v < t < t_{v+1}$ für $v=1, \dots, 11$. Nutzen Sie dafür die Listenoptionen Ihres GTR. Formulieren Sie Aussagen zur Reaktionsgeschwindigkeit.

- Ermitteln Sie die mittleren Konzentrationen der Hydronium-Ionen-Konzentration über den jeweiligen Intervallen $[t_v, t_{v+1}]$ für $v=1, \dots, 11$.
- Analysieren Sie eine mögliche proportionale Beziehung zwischen der mittleren Konzentration der Hydronium-Ionen über den Intervallen und der zugehörigen mittleren Geschwindigkeit \bar{v} über den Intervallen.

Zur Arbeit mit dem GTR

- Anleitung -

Das Arbeiten mit Listen

- Mit [STAT/1(1: EDIT)] erreicht man die Ebene der verfügbaren und erweiterbaren Listen.
- Wird der über der Liste stehende Name mit den Cursortasten [◀,▶,▼,▲] angesteuert und mit [Enter] bestätigt, lassen sich Listenwerte durch beliebige Rechnungen verändern oder auch Listenwerte erzeugen. Das Betätigen von CLEAR löscht die Listenwerte der angewählten Liste.
- Möchte man Listenwerte verändern, dann müssen vorher eventuelle Verknüpfungen mit anderen Listen - erkennbar an dem ♦-Zeichen - aus dem Listenkopf entfernt werden.
- Reicht die Anzahl der vordefinierten Listen nicht aus, können im Listen-Editor neue Listen benannt werden. Wichtig: Diese Listen werden nur über [2nd STAT/Names] wieder aufgerufen.
- Eine Möglichkeit, sich häufig viel Tipparbeit zu ersparen, liefert der sequence Befehl. Er ist zu finden unter [List (2nd STAT) /▶OPS/5 (5:seq())] und hat folgendes Format: $\text{seq}(\text{Funktionsterm}, \text{Variable}, \text{Anfangswert}, \text{Endwert}, \text{Schrittweite})$.

Das Arbeiten mit Regressionen

Eine Übersicht über durchführbare Regressionen lässt sich unter [STAT/▶CALC(2nd TRACE)] finden. Ein ermittelter Regressionssterm kann im Funktionseditor (Y=) abgelegt werden. Das Befehlsformat für die Durchführung und Abspeicherung für z.B. eine lineare Regression lautet: [4(4:LinReg(ax+b))/L1(2nd 1)/, /L2(2nd 2)/, /VARS/▶Y-Vars/1(1: Function)/1(1:Y1)]. Auf dem Display erscheint: $\text{LinReg}(ax+b)L1, L2, Y1$. (Bei Verwendung von MATHPRINT erscheint eine entsprechende Eingabemaske.)

Mit [Enter] werden dann die Koeffizienten a, b einer linearen Funktion ermittelt, die den Punkten P_v mit den Koordinaten $x_v \in L1 / y_v \in L2$ optimal entspricht (Ausgleichsgerade). Wird $L2$ vor $L1$ genannt, werden die x -Werte der Liste $L2$ und die y -Werte der Liste $L1$ entnommen. Der Funktionsterm wird dann automatisch im Funktionseditor abgelegt und kann später auch gezeichnet werden (siehe Abschnitt STAT PLOT).

Ganz häufig gibt es in den Naturwissenschaften Messwerte, die als 100% sicher angesehen werden können. Häufig sind dies Randwerte von Messungen. Da die Regression nach der minimalen Summe der Gaußschen Fehlerquadrate berechnet wird, kann den sicheren Messwerten eine größere Geltung dadurch verliehen werden, dass sie zum Beispiel als 10000 mal gemessen in die Berechnung eingehen. Hierfür wird eine neue Liste, z.B. $L3$ erzeugt, in der jedem Wertepaar ($x_v \in L1 / y_v \in L2$) die Präferenz 1 und dem sicheren Wertepaar die Präferenz 10000 durch Liste $L3$ zugeordnet wird. Für unser Beispiel würde das Befehlsformat $\text{LinReg}(ax+b)L1, L2, L3, Y1$ bewirken, dass eine Ausgleichsgerade ermittelt wird, die nahezu durch den Ursprung verläuft.

Das Arbeiten mit STAT Plot (2nd Y=)

Im STAT PLOT- Editor lassen sich die Punkte, deren Koordinaten durch zwei Listen vorgegeben sind, graphisch darstellen. Zunächst wird einer der angebotenen Plots, z. B., [1: Plot1...Off] angewählt. An Off oder On erkennt man, ob der Plot aktiv ist oder nicht. Man erkennt auch, welche Darstellungsoption und welche Listen die x - und y - Koordinaten der Punkte liefern. Mit [(On)◀/Enter] wird der Plot aktiviert. Man wechselt mit [▼] zu Type und steuert mit [◀] oder [▶] z.B. die unverbundene Punktdarstellung (erste Position) an, die durch [Enter] aktiviert wird. Eine Zeile darunter wird eingegeben, aus welcher Liste die x -Werte und dann aus welcher Liste die y -Werte stammen sollen. Wichtig ist, dass beide Listen gleich lang sein müssen. Abschließend kann das Symbol für die Punktdarstellung gewählt werden. Wird nun die [STAT PLOT] Taste betätigt, stimmt meistens die Skalierung der Achsen in der Darstellung nicht. Mit [ZOOM/9 (9:ZoomStat)] erfolgt automatisch die richtige Skalierung. Eine Darstellung der Punkte und der Regressionskurve erfolgt, wenn die Regression wie oben beschrieben eingegeben worden ist.

Dr. Klaus Wloka

Ziel ist es, den mittleren Konzentrationen (aus L8) die jeweilige mittlere Intervallgeschwindigkeit zuzuordnen und den Zusammenhang mithilfe der im GTR vorhandenen Regressionen zu untersuchen. Hierfür wird noch rein formal der Punkt (0|0) ergänzt, indem am Ende der Listen L7 und L8 der Wert 0 eingefügt wird. Wenn die Hydronium-Konzentration $0 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$ wäre, wäre die Geschwindigkeit $0 \frac{\text{mol}}{\text{L} \cdot \text{s}}$. Das ist eine Randbedingung. Allerdings wird die Hydronium-Ionen Konzentration nie $0 \frac{\text{mol}}{\text{L}}$.

In L9 werden den Messwerten Prioritäten zugeordnet (vgl. Anleitung). (0|0) wird als 10^6 mal gemessen berücksichtigt. Es wird eine lineare Regression durchgeführt: [(Stat→Calc→4:) LinReg(ax+b) L8,L7,L9,y1.] Regressionen sind zu gebrauchen, wenn der Regressionskoeffizient nahe bei 1 ist. Dann liegen die gegebenen Punkte recht gut auf dem durch die angegebene Gleichung beschriebenen Graphen.

Lösungen

a) Die Werte der gegebenen Daten werden in die Listen L1 und L2 eingetragen, die zugehörige Stoffmenge der Wasserstoffmoleküle in mmol wird in L3 berechnet. In Abb. 3 sind die vollständigen Listen L1 bis L3 abgebildet.

Es wird ein (t-V) -Diagramm mit STATPLOT erzeugt. Mit der Taste TRACE und den Steuerungstasten ◀, ▶ lassen sich die Koordinaten auf dem Display ablesen und in den zu zeichnenden Graphen eintragen (Abb. 4).

L1	L2	L3	↕ 3
0	0	0	
64	20	.83333	
88	25	1.0417	
113	30	1.25	
143	35	1.4583	
182	40	1.6667	
240	46	1.9167	
L3="L2/24"			

Abb. 2

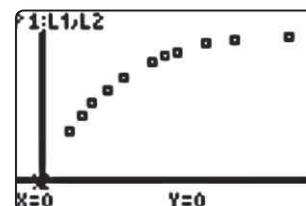


Abb. 4

L1	L2	L3	↕ 3
0	0	0	
64	20	.83333	
88	25	1.0417	
113	30	1.25	
143	35	1.4583	
182	40	1.6667	
240	46	1.9167	
270	48	2	
295	50	2.0833	
360	53	2.2083	
420	55	2.2917	
540	56	2.3333	
L1(13) =			

Abb. 3

L4	↕	L5	L6	↕ 6
.5		64	.04167	
.33333		24	.04167	
.29167		25	.04167	
.25		30	.04167	
.20833		39	.04167	
.16667		58	.05	
.1667		30	.01667	
.1		25	.01667	
.08333		65	.025	
.05833		60	.01667	
.04167		120	.00833	
.03333				
L6(12) =				

Abb. 5

- b) Die zu ermittelnde Anzahl der Wasserstoff-Moleküle in mmol wird in L3 berechnet, wie in a) beschrieben.
- c) Hieraus wird dann die Konzentration der Hydronium-Ionen in L4 bestimmt (Abb. 5).
- d) Das $\left[t - c_{\text{H}_3\text{O}^+}(t) \right]$ Diagramm wird als PLOT2 gezeichnet (Abb. 6).
- e) In L5 und L6 werden die Beträge der Δc - und Δt -Werte ermittelt (Abb. 5).
- f) In L7 werden dann die Durchschnittsgeschwindigkeiten über den Intervallen berechnet. Man erkennt, dass die Durchschnittsgeschwindigkeiten mit fortschreitender Zeit und damit sinkender Konzentration abnehmen (Abb. 7).

(Noch) mehr Leistung für Ihren Rechner – mit dem aktuellen Betriebssystem

Aktualisieren Sie Ihren Rechner mit der neuesten Version des Betriebssystems. Nutzen Sie die kostenlose Upgrade-Möglichkeit auf den TI-Webseiten im Bereich „Downloads“.

Graphikrechnermodell	Aktuelle Betriebssystem-Version
TI-83 Plus	1.19
TI-84 Plus/TI-84 Plus Silver Edition	2.55 MP
TI-89 Titanium	3.10
Voyage™ 200	3.10
TI-Nspire™	3.20 (ab Mai)
TI-Nspire™ CAS	3.20 (ab Mai)

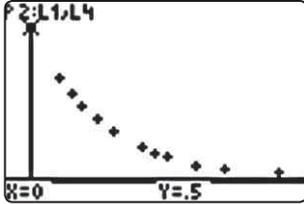


Abb. 6

L7	Y1	L9
.0026	.4167	1
.00174	.3125	1
.00167	.2708	1
.00139	.2292	1
.00104	.1875	1
8.8E-4	.1417	1
5.6E-4	.1083	1
6.7E-4	.0917	1
3.8E-4	.0708	1
2.8E-4	.05	1
6.9E-5	.0375	1
0	0	1E6

Abb. 7

```

ExpReg
y=a*b^x
a=.49999990056
b=.9938965766
r^2=.9999990319
r=-.999999516
    
```

Abb. 11

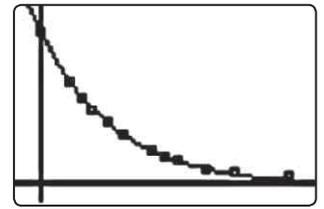


Abb. 12

Damit wäre die Funktion für die Abnahme der Hydronium-Ionen-Konzentration mit der Zeit (mit $\ln b \approx -0,006122$).

$$c_{\text{H}_3\text{O}^+}(t) = a \cdot b^t = c(0) \cdot e^{(\ln b) \cdot t} = 0,5 \frac{\text{mol}}{\text{L}} \cdot e^{(-0,006122 \cdot \text{s}^{-1}) \cdot t}$$

g) In L8 wird nun die mittlere Konzentration der jeweiligen Intervalle berechnet. Genauere Angaben hierzu sind der Anleitung zu entnehmen. Der „sichere“ Datenpunkt (0|0) wird ergänzt und mit ausreichender Priorität berücksichtigt (siehe L9 in Abb. 7).

h) Die Lineare Regression LinReg(ax+b) L7,L8,L9,Y1 wird durchgeführt. Der ermittelte Funktionsterm des Graphen wird unter Y1 abgelegt (Abb. 8).

Zur Darstellung eines Konzentrations-Geschwindigkeits-Plottes wird wie folgt vorgegangen: Unter Math→8 findet man den Befehl nDeriv(Funktion, Variable, Stelle) mit der die Ableitung einer Funktion f nach der Variablen x an der jeweiligen Stelle x numerisch bestimmt wird. Diese Ableitung lässt sich nicht als Term ausdrücken, allerdings werden die Werte der Ableitung berechnet.

```

LinReg
y=ax+b
a=.0059921456
b=-2.04605E-10
r^2=.9951499674
r=.9975720362
    
```

Abb. 8

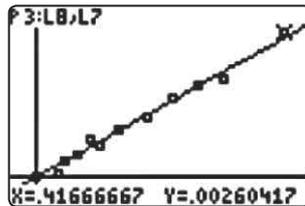


Abb. 9

```

Plot1 Plot2 2008
Y1=0.5*e^(ln(b)
X)
Y2=nDeriv(Y1,X,
X)
Y3=
Y4=
Y5=
    
```

Abb. 13

```

LinReg
y=ax+b
a=.0061187465
b=-1.53391E-10
r^2=.9995186945
r=.9997593183
    
```

Abb. 14

Der Betrag des Regressionskoeffizienten nahe bei 1 gibt an, dass die Punkte recht gut auf einer Geraden durch den Ursprung liegen. Sie genügt der Gleichung $v = 5,992 \cdot 10^{-3} \text{s}^{-1} \cdot c_{\text{H}_3\text{O}^+}$, d.h. die mittlere Geschwindigkeit ist der mittleren Konzentration proportional (Abb. 9).

Fortsetzung

Der folgende Ansatz basiert auf der Verwendung von Momentangeschwindigkeiten (Beträge der Tangentensteigungen) in Punkten des $[t - c_{\text{H}_3\text{O}^+}(t)]$ Graphen. Diese Tangentensteigungen können erst ermittelt werden, wenn der Funktionsterm der Funktion bekannt ist.

Ausgehend von der Liste L1 (Zeiten) und der Liste L4 (Hydronium-Ionen-Konzentrationen) lässt sich die exponentielle Regression ExpReg L1,L4,L9,y2 durchführen, bei der die Anfangskonzentration und ein mittlerer, etwa der 5. Messwert, als sicher angesehen werden mit folgendem Ergebnis:

L1	L4	L9
0	.5	1E6
64	.33333	1
88	.29167	1
113	.25	1
143	.20833	1E6
183	.16667	1
240	.11667	1
270	.1	1
295	.08333	1
360	.05833	1
420	.04167	1
540	.03333	1

Abb. 10

L8	L9	LA
.41667	1	.00306
.3125	1	.00207
.27083	1	.00179
.22917	1	.00153
.1875	1	.00128
.14167	1	.001
.10833	1	7E-4
.09167	1	5.9E-4
.07083	1	5E-4
.05	1	3.4E-4
.0375	1	2.3E-4
0	1	1.1E-4
-----	1E6	0

Abb. 15

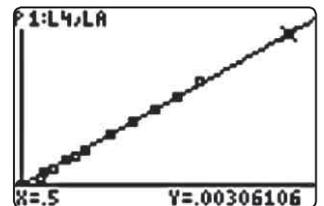


Abb. 16

Mit $[\text{abs}(y2(L1)) \rightarrow L_A]$ werden die Momentangeschwindigkeiten an den jeweiligen Messzeitpunkten in der Liste L_A gespeichert (Abb. 14). Nun lässt sich das Konzentrations-Geschwindigkeitsdiagramm plotten, nachdem der „sichere“ Datensatz (0|0) in L_4 und L_A ergänzt und mit hoher Priorität versehen wurde, eine adäquate lineare Regression durchführen (Abb. 15). Vergleicht man die beiden Proportionalitätsfaktoren (Geschwindigkeitskonstanten) so stellt man fest, dass sie nahezu übereinstimmen.

Autor:

Dr. Klaus Wloka, Stadthagen (D),
Klaus.Wloka@freenet.de

Simulation von Chaos mit dem Magnetpendel

Dr. Alfred Roulier



Versuchsaufbau und Ziele

Ein langes Pendel (ebenes Problem) mit einer magnetischen Metallkugel kann sich frei in einer Ebene bewegen. 3 Magnete bilden die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks, das den Abstand d zur Bewegungsebene des Pendelkörpers hat. Die Pendelaufhängung befindet sich senkrecht über dem Schwerpunkt des gleichseitigen Dreiecks der Magneten.

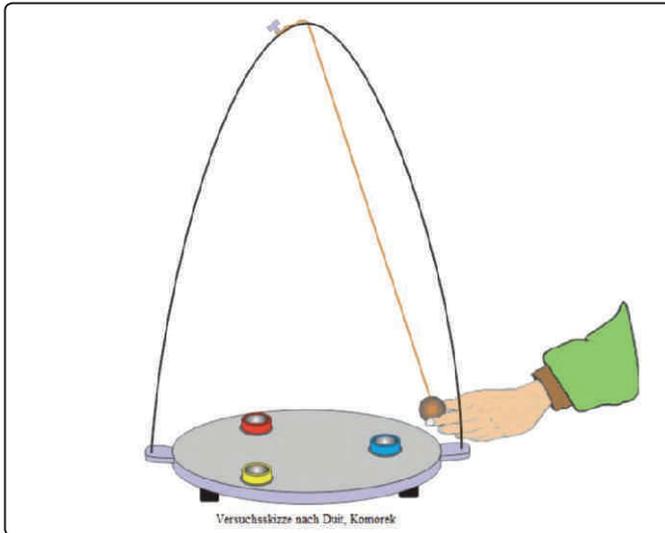


Abb. 1: Versuchsaufbau, siehe [1]

Die Bewegung der Metallkugel soll nun untersucht werden, wenn sie aus der Ruhe vom beliebigen Punkt $(x_0|y_0)$ startet und dabei folgende drei Kräfte auf sie wirken:

- Die Rückführkraft (Koeffizient c) auf den Nullpunkt ist proportional zur Auslenkung.
- Die Reibungskraft (Koeffizient ρ) ist proportional zur Geschwindigkeit.
- Die Anziehungskraft der Magnete (Koeffizient γ) ist umgekehrt proportional zum Abstandsquadrat.

Nach der Formulierung der Bewegungsgleichung wird im Programm **magnetpendel-ec()** numerisch nach der Euler-Cauchy Methode sowie im Programm **magnetpendel-rk()** nach dem genaueren Runge-Kutta Verfahren in kleinen Zeitabständen die momentane Position des Pendelkörpers berechnet und die Pendelbewegung in einem Streuplot aufgezeichnet.

Mit dieser Aufgabe können folgende Aspekte vertieft werden:

- Das Erstellen der Gleichung für die Bewegungskomponenten in x- und y-Richtung. Die Zerlegung einer Zentralkraft in ihre Komponenten wurde im Artikel «Planetenbahnen sind elliptisch» (TI-Nachrichten 2/08) beschrieben.
- Es besteht eine Verwandtschaft zum Dreikörperproblem der Himmelsmechanik (Poincaré), und man ahnt, dass in dieser Aufgabe chaotisches Verhalten versteckt ist.
- In der Tat sieht man zwar im Streuplot, dass die Pendelkugel über einem der drei Magnete zur Ruhe kommt. Allerdings kann kaum voraussagt werden, welchen Magneten es trifft. Zudem hängt der Endpunkt empfindlich vom Startpunkt ab. Dies kann durch kleine Veränderungen der Start-

koordinaten und der Teilkraft-Koeffizienten im Streuplot eindrücklich erprobt werden.

Die Rechenkapazität des TI-Nspire™ erlaubt es indessen nicht, alle Startpunkte in einem Quadrat rund um die Magnete zu testen und sie entsprechend den Endpunkten zu färben. Deshalb wird hier ein mit Mathematica erstelltes Bild eingefügt:

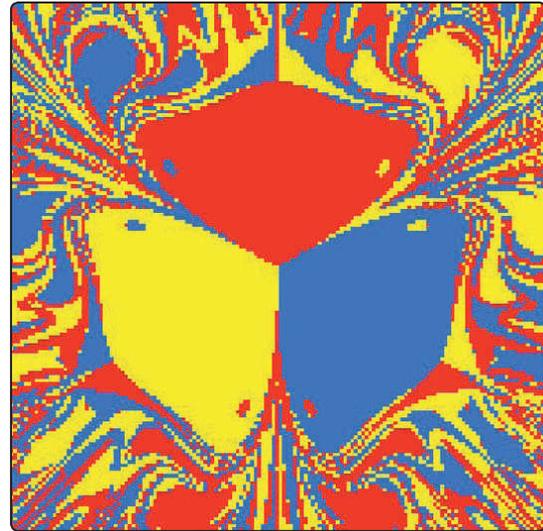


Abb. 2: Attraktionsgebiete; die Startpunkte des Pendels tragen die Farbe des Magneten, bei dem das Pendel zur Ruhe kommt.

Man erkennt auf einen Blick sehr schön den Chaos-Gehalt dieser physikalischen Konstellation.

Dieses Problem ist dem Buch «Chaos, Bausteine der Ordnung» von H.O. Peitgen, H.Jürgens, D.Saupe, Science Sachbuch roro, entnommen.

Simulation

Die Spur des Magnetpendels wird numerisch in Zeitschritten der Länge dt aus der Bewegungsgleichung berechnet und als Listen der Koordinaten x_k und y_k ausgegeben. Folgende Variablen werden in einer Notes-Seite definiert:

```
Eingaben
Magnetkoordinaten: Gleichseitiges Δ, Schwerpunkt im Ursprung, Abstand Ecke - Ursprung 0.5
xm1=0.5*cos(π/6)=0.433013   ym1=0.5*sin(π/6)=0.25
xm2=0   ym2=0.5   xm3=-xm1=-0.433013   ym3=-ym1=-0.25
Abstand Ebene - Magnete: d=0.2
Zeitschrittlänge: dt=0.01
Abbruch, wenn Pendelbeschleunigung kleiner als a_min=0.01
Programme:
magnetpendel_ec() Done
magnetpendel_rk() Done
```

Abb. 3

Im Programm werden zuerst die Beschleunigungen ax und ay in den Koordinatenrichtungen aus den drei Kräften definiert, wobei die Pendelmasse gleich 1 gesetzt ist. Danach werden in einer Schleife in Zeitschritten dt die Geschwindigkeiten und

Ortskoordinaten numerisch integriert, im hier abgebildeten Fall nach der Methode von Euler-Cauchy. Die Schlaufe bricht ab, wenn der Betrag der Beschleunigung unter die Grenze a_{min} fällt. Schliesslich wird die Pendelspur in den Listen xk und yk abgespeichert zur Verwendung im Streuplot.

```

Define magnetpendel_ec[]:=
Prgm
Local x,y,vx,vy,ax,ay
xk:=x0; yk:=y0; x:=x0; y:=y0; vx:=0; vy:=0; ax:=1; ay:=1
© In Zeitschritten d. Beschleunigungs-, Geschwindigkeits- und Ortskomponenten berechnen, solange Abbruchkriterium nicht erfüllt
While |ax²+ay²>a_min
ax:=c·x-p·vx+p
ay:=c·y-p·vy+p
vx:=vx+ax·dt; vy:=vy+ay·dt
x:=x+vx·dt+dt²/2·ax; y:=y+vy·dt+dt²/2·ay
© Koordinaten in Listen für Streuplot speichern
xk:=augment(xk{x}); yk:=augment(yk{y})
EndWhile
EndPrgm
    
```

Abb. 4 (vgl. Online-Version für größere Darstellung)

Die Verfahren der numerischen Integration sind aus der Taylor-entwicklung für $x(t+dt)$ bzw. $y(t+dt)$ sowie $vx(t+dt)$, $vy(t+dt)$ abgeleitet. Bei der Methode nach Euler-Cauchy (EC) werden die Glieder bis und mit zweiter Ableitung (Ordnung) behalten und der Fehler pro Schritt ist von der Grössenordnung dt^3 . Beim genaueren Verfahren nach Runge-Kutta (RK) wird bis zur vierten Ordnung gerechnet und der Fehler ist von der Grössenordnung dt^5 . Das Programm **magnetpendel_rk()** ist identisch zum oben vorgestellten Programm, verwendet aber rezeptartig das RK-Verfahren und erzeugt die Listen $xk1$ und $yk1$.

Ergebnis

In Abb. 4 sind, bei Eingaben wie oben beschrieben, die Kraftkoeffizienten und Startkoordinaten so eingestellt, dass das Pendel unabhängig vom Integrationsverfahren beim blauen Magneten zur Ruhe kommt. Rechenzeit ca. 10 Sekunden.

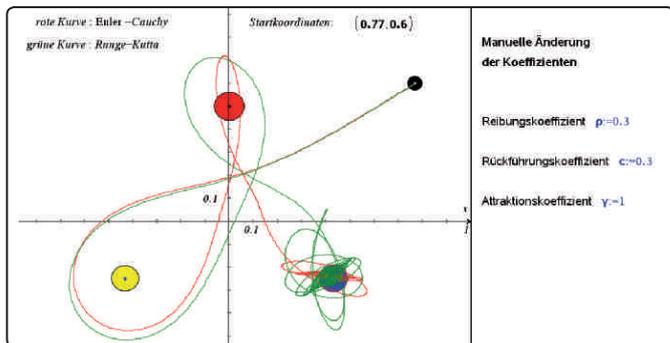


Abb. 4: Spur des Magnetpendels

In Abb. 5 wurden die Startkoordinaten um ca. 1 % verändert. Dadurch geschieht Folgendes:

- Beide Integrationsverfahren reagieren empfindlich und damit resultiert auch ein anderer Ruhepunkt für die Pendelkugel.
- Beim weniger genauen EC-Verfahren werden die Fehler so gross, dass das Pendel vom roten Magneten eingefangen wird. Richtig wäre jedoch als Ruhepunkt der gelbe Magnet, welcher mit dem genaueren RK-Verfahren auch erzielt wird.

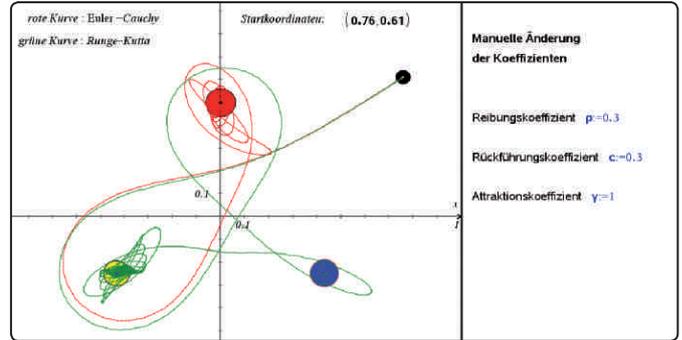


Abb. 5: Situation nach Änderung des Startpunkts um ca. 1 %

Bei gleichbleibenden Startkoordinaten kann auch mit einer minimen Änderung beispielsweise des Reibungskoeffizienten eine neue Endsituation resultieren. In Abb. 6 zeigt sich auch hier wiederum einerseits das chaotische Verhalten bei minimen Änderungen und andererseits nochmals der qualitative Unterschied der beiden Algorithmen.

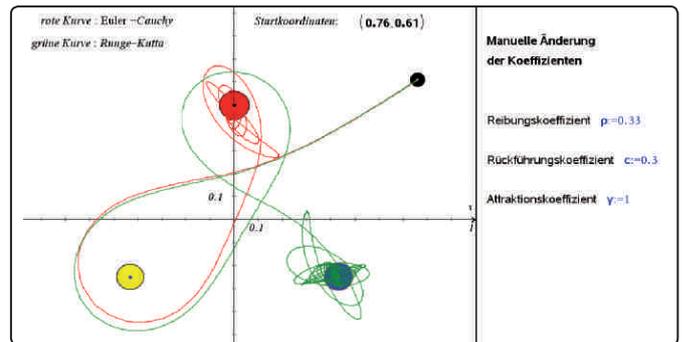


Abb. 6: Gegenüber Abb. 5 ist der Reibungskoeffizient 10 % grösser

Die TI-Materialdatenbank (www.ti-unterrichts-materialien.net) enthält auch das Dokument **lorenzwasserrad.tns**, welches ebenfalls ein mechanisches System beschreibt, das in Abhängigkeit von den Systemparametern chaotisches Verhalten zeigt.

Hinweis der Redaktion:

Die Datei magnetpendel.tns finden Sie zum Download in der Material-Datenbank. Dort ist auch eine Online-Version dieses Artikel abgelegt, in der die Abbildungen vergrößert dargestellt sind.

Quellen

[1] Abbildung 1 (Versuchsaufbau)
www.leifiphysik.de/web_ph10_g8/umwelt_technik/07kausalitaet/versuche/magnetpendel.htm
 [2] H.O. Peitgen, H.Jürgens, D.Saupe: Chaos, Bausteine der Ordnung; rororo Science Sachbuch

Autor:
 Dr. Alfred Roulier, Neuenegg (CH)
a.roulier@bluewin.ch

Von linearen zu kubischen Splines

Stefan Luislampe

Vorbemerkung

Schon seit längerem wird die Behandlung von Splines im Unterricht der Kursstufe vorgeschlagen. Dies sind stückweise definierte, meist kubische Polynome zur Interpolation vorgegebener Datenpunkte. Insbesondere seit der breiten Verfügbarkeit moderner Technologien findet man viele Vorschläge zur unterrichtspraktischen Umsetzung. In Niedersachsen ist die Modellierung von Biegelinien nunmehr im Kerncurriculum verbindlich vorgeschrieben, und zwar auch für das grundlegende Anforderungsniveau (Grundkurse).

Im Folgenden soll ein Unterrichtsgang in einem Kurs mit grundlegendem Anforderungsniveau vorgestellt werden, bei dem sich Schülerinnen und Schüler ausgehend von linearen Splines zentrale Aspekte der Interpolation mit kubischen Splines erarbeitet haben. Im Kurs wurden im Vorfeld klassische Interpolations-Probleme thematisiert (z.B. als Steckbriefaufgaben zu ganzrationalen Funktionen). Die Schülerinnen und Schüler haben dabei insbesondere die Andersartigkeit der Ansätze zur Interpolation bzw. Regression reflektiert. In der Auseinandersetzung mit Trassierungsproblemen wurde ein kontextbezogenes Verständnis von stetigen bzw. stetig differenzierbaren Übergängen erarbeitet (knickfrei, krümmungsruckfrei).

Im Zentrum der Überlegungen steht der klassische Kontext Schiffsbau (vgl. [1]). Bei der Konstruktion eines Schiffsrumpfs sind Längsspannten vorgegeben, die (Quer-) Beplankung durch biegsame Latten (engl. Splines) soll modelliert werden. Abbildung 1 zeigt den Querschnitt, aus Symmetriegründen werden nachfolgend die Datenpunkte aus Abbildung 2 betrachtet (Zahlenwerten nach [2]).

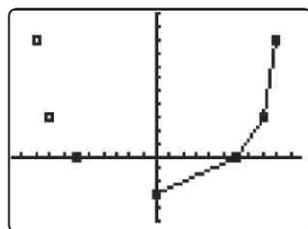


Abb. 1

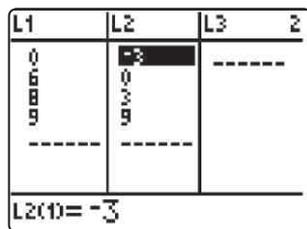


Abb. 2

Erste Modellierungsansätze

Für die Schülerinnen und Schüler ist aus dem Unterrichtszusammenhang naheliegend, bei der Modellierung von einem Interpolationspolynom dritten Grades auszugehen. Das Ergebnis ist unbefriedigend, wie in Abbildung 4 zu erkennen ist. Die Verwendung des Regressionsmoduls (Abb. 3) und die Lösung über das Aufstellen der Interpolationsbedingungen / des linearen Gleichungssystems führen in diesem Fall zum gleichen Resultat.

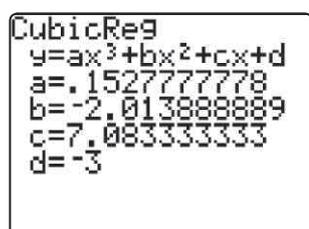


Abb. 3

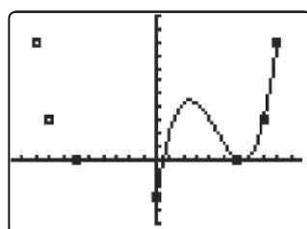


Abb. 4

Im Datenpot in Abbildung 1 wurde für die Datenpunkte mit $x \geq 0$ die Einstellung xyLine gewählt, bei dem die dargestellten Punkte (gerade) verbunden werden. Sichtbar sind 3 lineare Funktionen (lineare Splines) s_1 , s_2 und s_3 . Für diese lassen sich folgende Bedingungen angeben:

$$\begin{aligned} s_1(0) &= -3 \quad \text{und} \quad s_1(6) = 0 \quad \text{für} \quad s_1(x) = a_1 \cdot x + b_1 \\ s_2(6) &= 0 \quad \text{und} \quad s_2(8) = 3 \quad \text{für} \quad s_2(x) = a_2 \cdot x + b_2 \\ s_3(8) &= 3 \quad \text{und} \quad s_3(9) = 9 \quad \text{für} \quad s_3(x) = a_3 \cdot x + b_3 \end{aligned} \quad (1)$$

Aus den Bedingungen ergeben sich drei Gleichungssysteme mit jeweils zwei Gleichungen für zwei Unbekannte. Für die Schülerinnen und Schüler stellt die Berechnung der gesuchten Koeffizienten eine (einfache) wiederholende Übung dar, die ggf. arbeitsteilig auf die Lösung führt:

$$\begin{aligned} s_1(x) &= 0,5 \cdot x - 3 \\ s_2(x) &= 1,5 \cdot x - 9 \\ s_3(x) &= 6 \cdot x - 45 \end{aligned} \quad (*)$$

Die Gleichungssysteme können (und sollten) händisch gelöst werden. Dennoch greifen einige Schülerinnen und Schüler auf Lösungsroutinen des Rechners zurück und ermitteln oder prüfen dabei ihre Lösungen der linearen Gleichungssysteme. Statt drei Gleichungssysteme getrennt einzugeben, könnte man die Lösung auch in einem einzigen Schritt ermitteln! Dazu ist ein Perspektiv-Wechsel nötig: Eigentlich suchen wir 6 Unbekannte zu 6 Gleichungen. Das Gleichungssystem hat folgende Gestalt:

a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	
0	1	0	0	0	0	-3
6	1	0	0	0	0	0
0	0	6	1	0	0	0
0	0	8	1	0	0	3
0	0	0	0	8	1	3
0	0	0	0	9	1	9

Tabelle 1

Abbildung 5 zeigt die zugehörige Koeffizientenmatrix A, in der reduzierten Zeilen-Stufenform lässt sich die Lösung bzw. lassen sich die gesuchten Koeffizienten direkt ablesen.

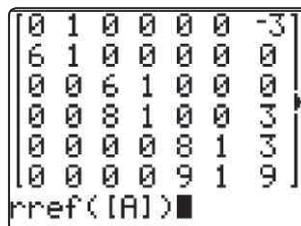


Abb. 5

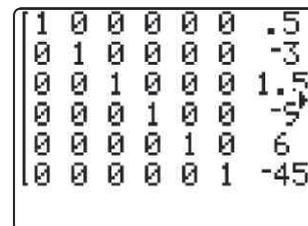


Abb. 6

Wir haben zwei unbefriedigende Modellierungs-Ansätze: Die Interpolation durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades liefert kein geeignetes Modell für die Beplankung (weil mit dem Krümmungswechsel des Graphen auch Extrempunkte auftreten). Auch die Idee, (andere) Regressionsmodule des Rechners zu nutzen, muss in der Diskussion verworfen werden. Bei der Interpolation durch lineare Splines sind die Übergänge stetig, aber die Steigungen der Splines stimmen in den Übergangsstellen nicht überein.

Quadratische Splines

Es wäre sinnvoll, zusätzlich auch identische Steigungen der Teilfunktionen in den Übergangstellen zu fordern. Ein Schüler schlägt vor, Parabeln zu nutzen. Formuliert mit der neuen Begrifflichkeit versuchen wir nun, Koeffizienten für drei quadratische Splines

$$\begin{aligned} s_1(x) &= a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1 \\ s_2(x) &= a_2 \cdot x^2 + b_2 \cdot x + c_2 \\ s_3(x) &= a_3 \cdot x^2 + b_3 \cdot x + c_3 \end{aligned}$$

zu bestimmen.

Von welchen Steigungsbedingungen wollen wir ausgehen? Dem Vorschlag einer Schülerin (Suheda) folgend, soll die Steigung des linearen Splines $s_1'(6)=0,5$ erhalten bleiben, die Steigungen von s_2 bzw. s_3 sollen im dritten Datenpunkt übereinstimmen. Zusätzlich zu den Interpolationsbedingungen in (1) fordern wir nun:

$$\begin{aligned} s_1'(6) &= 0,5 = s_2'(6) \\ s_2'(8) &= ? = s_3'(8) \end{aligned} \quad (2)$$

Wir haben neben den sechs Interpolationsbedingungen nun für den ersten und zweiten Teilspline je einen Steigungswert vorgegeben. Da die Steigung des dritten Teilsplines von der unbekanntem Steigung $s_2'(8)$ abhängt, können wir nicht arbeitsteilig weiterarbeiten, um die Teilfunktionen zu ermitteln. In der Diskussion wird zudem deutlich: An den Übergangstellen ergeben sich also zwei Bedingungen, $s_1'(6) = s_2'(6)$ und $s_2'(8) = s_3'(8)$, wir müssen aber mindestens einen Steigungswert vorgeben und haben dabei offenbar mehrere Möglichkeiten. Die Schülerinnen und Schüler wählen verschiedene Ansätze und gehen unterschiedlich vor, einige Resultate sind in Abb. 7 bis Abb. 10 dargestellt.

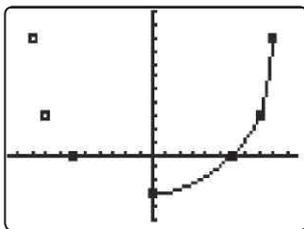


Abb. 7

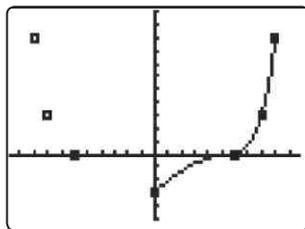


Abb. 8

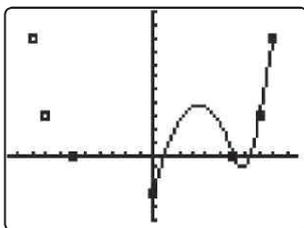


Abb. 9

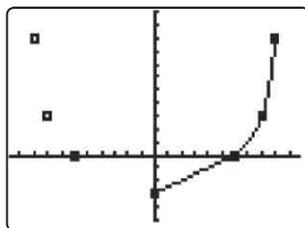


Abb. 10

Der Ansatz von Suheda führt (überraschenderweise) zu einem linearen Spline $s_1(x)$ gemäß (*), dabei ist es gleichgültig, ob $s_1(0) = 0,5$ oder $s_1(6) = s_2(6) = 0,5$ vorgegeben wird (Abb. 10). Eine andere Schülergruppe hat zu der Bedingung $s_3'(9) = 6$ ebenfalls einen linearen Teilspline $s_3(x)$ erhalten (vgl. Abb. 9), zudem sind die ersten beiden Teilfunktionen ungeeignet im Sinne des Modellierungskontextes. Offenbar ergibt es keinen Sinn, die Steigung des linearen Splines zwischen den beiden Interpolationspunkten auf den quadratischen Spline (im Übergangspunkt) zu übertragen.

Die Lösung aus Abbildung 7 folgt aus dem Ansatz $s_1'(0) = 0$ und geht dabei von einem waagerechten Rumpfboden aus. Eine weitere Schülerin (Jennifer) geht von der Forderung $s_1'(6) = 0$ aus und erhält eine Lösung gemäß Abb. 8.

Es ist hier möglich, die gesuchten Koeffizienten der Teilfunktionen schrittweise zu ermitteln – nicht alle Schülerinnen und Schüler wählen einen Ansatz gemäß Tabelle 1. Jennifer hat für den ersten bzw. zweiten Teilspline jeweils zwei Interpolations- und eine Steigungsbedingung:

$$\begin{aligned} s_1(0) &= -3, \quad s_1(6) = 0, \quad s_1'(6) = 0 \\ \Rightarrow s_1(x) &= -\frac{1}{12}x^2 + x - 3 \\ s_2(6) &= 0, \quad s_2(8) = 3, \quad s_2'(6) = 0 \\ \Rightarrow s_2(x) &= \frac{3}{4}x^2 - 9x + 27 \end{aligned}$$

Bevor wir den dritten Teilspline bestimmen können, müssen wir $s_2'(8)$ ermitteln, dann ergibt sich für die Koeffizienten des dritten Teilsplines ein Gleichungssystem aus:

$$\begin{aligned} s_3(8) &= 3, \quad s_3(9) = 9, \quad s_3'(8) = 3 = s_2'(8) \\ \Rightarrow s_3(x) &= 3x^2 - 45x + 171 \end{aligned}$$

Bei dieser Vorgehensweise müssen wir nacheinander drei Gleichungssysteme lösen. Eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern versucht, für die neun unbekanntem Parameter ein „gemeinsames“ Gleichungssystem aufzustellen. Dabei bereitet insbesondere die letzte Zeile einige Schwierigkeiten (die mit Hinweisen gemeistert wird).

a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2	a_3	b_3	c_3	
0	0	1	0	0	0	0	0	0	-3
36	6	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	36	6	1	0	0	0	0
0	0	0	64	8	1	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	64	8	1	3
0	0	0	0	0	0	81	9	1	9
12	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	12	1	0	0	0	0	0
0	0	0	16	1	0	-16	-1	0	0

Tabelle 2

Wir halten fest: Wieder wird erweist sich diese Vorgehensweise als Alternative zur Lösung in Teilschritten. Das resultierende Gleichungssystem ist komplex und erfordert Konzentration bei der Eingabe. Dafür ist aber ein zwischenzeitliches Ausrechnen der Steigung nicht erforderlich. Im Unterschied zur Tabelle 1 sind die Gleichungen zu den drei Teilsplines dabei nicht mehr unabhängig voneinander (vgl. letzte Zeile)!

Mit der Vorgabe unterschiedlicher Steigungswerte kommt man zu verschiedenen, aber nicht zwangsläufig sinnvollen Lösungen (ungeeigneter Verlauf des Modellgraphen) oder überraschenden Lösungen (keine quadratischen Splines). Um zu entscheiden, welche der Ansätze auf eine passenden Modellierung führt, brauchen wir Kriterien. Nachteilig bei der Interpolation mit quadratischen Splines ist in allen Lösungsvorschlägen, dass in den Übergangstellen Krümmungssprünge vorliegen.

Kubische Splines

Anknüpfend an den Unterrichtszusammenhang (Trassierung) gehen wir an eine Optimierung unserer Modellierung. Dabei ist klar: Krümmungssprungfreie Übergänge erhalten wir, wenn zusätzlich zur ersten Ableitung auch die zweite Ableitung der Teilsplines in den Übergangspunkten übereinstimmen.

Formuliert mit der neuen Begrifflichkeit versuchen wir nun, Koeffizienten für drei kubischen Splines

$$\begin{aligned} s_1(x) &= a_1 \cdot x^3 + b_1 \cdot x^2 + c_1 \cdot x + d_1 \\ s_2(x) &= a_2 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + c_2 \cdot x + d_2 \\ s_3(x) &= a_3 \cdot x^3 + b_3 \cdot x^2 + c_3 \cdot x + d_3 \end{aligned}$$

zu ermitteln. Wir haben neben den sechs Interpolationsbedingungen (1) und den zwei Steigungsbedingungen (2) nunmehr die Bedingungen

$$\begin{aligned} s_1''(6) &= s_2''(6) \\ s_2''(8) &= s_3''(8) \end{aligned} \tag{3}$$

zu erfüllen, dies sind 10 Gleichungen für 12 Unbekannte. Diese Situation kennen die Schülerinnen und Schüler im Prinzip schon – wir müssen zwei weitere Bedingungen angeben. Diese ergeben sich hier aus dem Kontext: Da wir ursprünglich von biegsamen Latten (Schiffsbau) ausgegangen sind, wird man für den ersten und letzten Datenpunkt einen krümmungsfreien Auslauf erwarten, also

$$\begin{aligned} s_1''(0) &= 0 \\ s_3''(0) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

ansetzen. Lassen sich die Koeffizienten der drei Teilfunktionen wieder schrittweise bestimmen? Für keinen Teilspline (4 gesuchte Koeffizienten) können wir genügend unabhängige Gleichungen angeben, immer müssen wir Bedingungen für andere Teilsplines berücksichtigen. Dies ist auch im Gleichungssystem für alle 12 Koeffizienten sichtbar, wie die nachfolgende Tabelle zeigt.

a_1	b_1	c_1	d_1	a_2	b_2	c_2	d_2	a_3	b_3	c_3	d_3	
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		-3
216	36	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	216	36	6	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	512	64	8	1	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0	0	512	64	8	1	3
0	0	0	0	0	0	0	0	729	81	9	1	9
108	12	1	0	-108	-12	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	192	16	1	0	-192	-16	1	0	0
36	2	0	0	-36	-2	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	48	2	0	0	-48	-2	0	0	0
0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	54	2	0	0	0

Tabelle 3

Als Lösung erhält man die in Abbildung 11 graphisch dargestellte Spline-Funktion, die Koeffizienten der Teilsplines ergeben sich, wenn wieder (vgl. Abb. 5 bzw. Abb. 6) mit Hilfe des TI-84 die reduzierte Zeilen-Stufen-Form der Matrix ermittelt wird. Die Teilsplines sind:

$$s_1(x) = -\frac{1}{184}x^3 + \frac{16}{23}x - 3$$

$$s_2(x) = \frac{73}{184}x^3 - \frac{333}{46}x^2 + \frac{1015}{23}x - \frac{2067}{23}$$

$$s_3(x) = -\frac{35}{46}x^3 + \frac{945}{46}x^2 - \frac{4097}{23}x - \frac{11565}{23}$$

Wir sind letztlich wieder bei der Verwendung ganzrationaler Funktionen angelangt, nutzen aber zur Interpolation der vier Datenpunkte drei Teilfunktionen (12 unbekannte Koeffizienten).

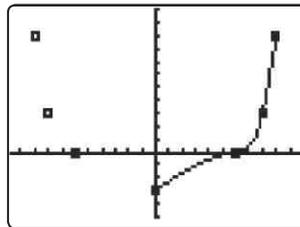


Abb. 11

So können wir die sechs Interpolationsbedingungen (1) und die zwei Steigungsbedingungen aus (2) erfüllen sowie mit den beiden Bedingungen in (3) krümmungsruckfreie Übergänge realisieren (10 Gleichungen). Zwei weitere Gleichungen (4) folgen aus der Forderung, im ersten und letzten Punkt einen krümmungsfreien, geraden Auslauf zu realisieren, wie es der Kontext der biegsamen Latten erfordert. Eine bloße Interpolation liefert lediglich 6 Gleichungen für lineare Splines, bei der Interpolation mit quadratischen Splines können (müssen) wir zusätzlich zu knickfreien Übergängen einen Steigungswert vorgeben.

Schlussbemerkung

Der vorgestellte Unterrichtsgang ergibt sich keinesfalls „von selbst“. An entscheidenden Stellen ist die Lehrkraft gefordert, den Schülerinnen und Schülern Argumentations-Strukturen anzubieten und Argumentationsebenen zu trennen. Eine Balance zwischen Instruktion und Konstruktion kann dennoch erreicht werden, da den Schülerinnen und Schülern wichtige Erfahrungen in der selbstständigen Erprobung der Ansätze eröffnet werden können. Als besonderes Merkmal dieses Vorgehens wäre hervorzuheben, dass mit der tieferen Durchdringung im Unterricht die Komplexität der Modellierung (etwa hinsichtlich des Gleichungssystems in Tabelle 3) schrittweise und für Schülerinnen und Schüler nachvollziehbar (mit-) wächst. Als nachteilig könnte man insbesondere dabei bemängeln, dass sich die Modellierung mit quadratischen Splines vom eigentlichen Modellierungskontext entfernt, diese folgt eher einem didaktischen Interesse.

Quellen:

- [1] Knechtel, H. (u.a.): mathe >open end<, Materialien für den Einsatz von Grafikrechnern und Computeralgebra, Teil 1: Differentialrechnung, Westermann, Braunschweig 2001
- [2] Griesel H. (u.a.)(Hrsg.): Elemente der Mathematik, Niedersachsen; Schroedel, Braunschweig 2009

Autor:

Stefan Luislampe, Hannover (D)
luislampe@googlemail.com

Tipps und Tricks

π im Reißverschluss

Günter Dreeßen-Meyer



Die Irrationalität ist in der 8. Klassenstufe angekommen. Kreise und Zylinder sollen berechnet werden, also wird die Kreiszahl π benötigt. Natürlich stellen aufgeweckte Schülerinnen und Schüler die Frage nach der besonderen Art dieser Zahl. Es kommt die Frage nach der Berechenbarkeit dieser Zahl. In vielen Schulbüchern, wie z. B. in Elementen der Mathematik 8 gibt es in diesem Zusammenhang Ausflüge in die Geschichte der Mathematik.

Die Einteilung der rationalen Zahlen in endliche und periodische Dezimalzahlbrüche ist für alle Schüler nachvollziehbar. Die notwendigen Umformungen sind verständlich und begreifbar. Schön ist es in diesem Zusammenhang mit dem Programm DERIVE sowohl z.B. den Bruch $\frac{1}{97}$ und die Zahl π auf 1000 Dezimalstellen darzustellen und zu projizieren. Die Periode des Bruches ist findbar, bei π haben die Schüler keinen Erfolg.

Aber kann man den Schülern dieser Klassenstufe eine Intervallschachtelung rationaler Zahlen mit π im Zentrum zumuten?

Ein Versuch lohnt sich

Die Leibniz'sche Reihe, sie verführte Leibniz zum Spruch „Gott freut sich über die ungeraden Zahlen.“ (Griesel, 2006), konvergiert: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$. Das Vierfache der Reihe konvergiert also gegen π .

Untersucht wird diese Reihe mit dem TI-Nspire™ CAS. Hierzu wird eine Tabellenkalkulation und eine Graphikseite geöffnet. Auf der Graphik-Seite wird einen Schieberegler n für die Länge der Partialsummen eingefügt: $n=0,1,2,0000,80$. In der Tabellenkalkulation wird dann die erste Spalte über den Befehl $seq(k,k,0,n)$ definiert und somit mit den natürlichen Zahlen von 0 bis n gefüllt. Für die zweite Spalte wird der

Befehl $seq\left((-1)^k \cdot \frac{4}{2k+1}, k, 0, n\right)$ verwendet. In der dritten Spalte

wird die kumulierte Summe der zweiten Spalte gebildet. Die erste und die dritte Spalte werden als Streudiagramm graphisch dargestellt. Wird jetzt der Wert des Schiebereglers erhöht, so aktualisiert sich die Tabellenkalkulation, in der Graphik kommt ein nächster Punkt hinzu. Die neuen Punkte mit rationalen Koordinaten springen rauf und runter, sie ziehen sich weiter zusammen, sie bilden eine rationale Schachtelung, sie verzahnen sich und greifen auf die Zahl π zu.

	A	B	C	D
	anz	leibniz	summe	
	$=seq(k,k,0,n)$	$=seq((-1)^k \cdot \frac{4}{2k+1}, k, 0, n)$	$=cumulativeSum(seq((-1)^k \cdot \frac{4}{2k+1}, k, 0, n))$	
1	0	4	4	
2	1	-4/3	8/3	
3	2	4/5	52/15	
4	3	-4/7	304/105	
5	4	4/9	1052/315	
6	5	-4/11	10312/3...	
7	6	4/13	147916/...	
8	7	-4/15	135904/...	
9				
C8	$= \frac{135904}{45045}$			

Abb. 1

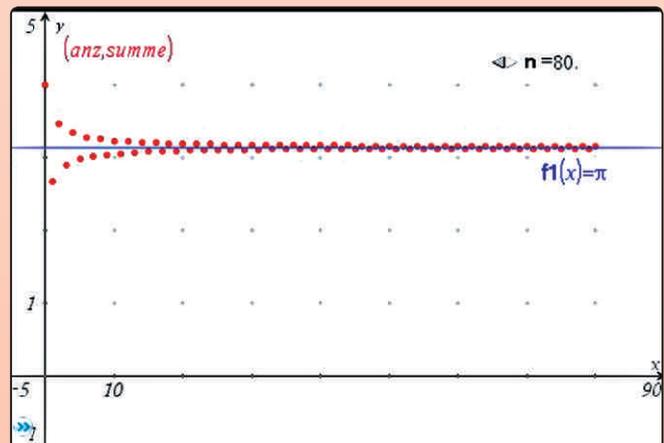


Abb. 2

Literatur:

[1] Griesel, H. u.a.: Elemente der Mathematik 8, Schroedel Verlag, Braunschweig, 2006.

Autor:

Günter Dreeßen-Meyer, Berlin (D)
G.Dreessen-Meyer@gmx.de

Service auf einen Blick

Innovative Technologie

Dank der Technologie unserer aktuellen Graphikrechner TI-84 Plus, TI-84 Plus Silver Edition, TI-89 Titanium, Voyage™ 200, TI-Nspire™ (mit Touchpad), TI-Nspire™ CAS (mit Touchpad) und den neuen TI-Nspire™ CX Modellen können Sie die bestehenden Fähigkeiten der Rechner durch Herunterladen zusätzlicher Applikationen und/oder Upgrades erweitern und Ihren persönlichen Wünschen anpassen. Damit halten Sie sich alle Optionen für die Zukunft offen.

Kostenlose Ausleihe

Sie möchten einen TI-Graphikrechner oder ein Computeralgebrasystem testen? – Kein Problem! Wir leihen Ihnen Einzel-exemplare oder Klassensätze bis zu vier Wochen – kostenlos und unverbindlich!

Unterrichtsmaterialien

Neben den „TI-Nachrichten“ gibt es eine Fülle von begleitenden Unterrichtsmaterialien zum Einsatz unserer Produkte – insbesondere auch von Schulbuchverlagen, hier eine Auswahl von TI und T³:

- **CuBaLibra**: Einfache, gut strukturierte Aufgaben: Stoff für eine Unterrichtsstunde.
- **MMM**: Kurze Beispiele für alltäglich benötigte Veranschaulichungen, die Umsetzung wird mittels Kurzvideos erklärt.
- **T³ Akzente**: Aufgaben mittlerer Komplexität mit Schülerarbeitsblättern und didaktischen Hinweisen.

Mehr Informationen, kostenlose Downloads sowie die Anmelde-möglichkeit zum E-Newsletter „TI-Materialien“ finden Sie auf den TI-Webseiten oder unter: www.ti-unterrichtsmaterialien.net

Lehrerfortbildungen

Graphikrechner und CAS sind für viele Kolleginnen und Kollegen neu und unbekannt. Wir helfen Ihnen mit Fortbildungen an Ihrer Schule oder auf Veranstaltungen! Wenden Sie sich direkt an T³. Mehr Informationen zu T³ finden Sie im Internet:

T³ Deutschland: www.t3deutschland.de

T³ Österreich: www.t3oesterreich.at

T³ Schweiz: www.t3schweiz.ch

Oder kontaktieren Sie Ihren TI-Schulberater sowie unser Customer Service Team.

Praktische Präsentationsmöglichkeiten

Projizieren Sie das Display der Lehrerversion Ihres TI-Graphikrechners mit ViewScreen™, Overheadprojektor, Beamer oder auch am Whiteboard.

Flexible Verbindungsmöglichkeiten

Die Verbindungskabel zu den TI-Graphikrechnern und Computeralgebrasystemen ermöglichen eine schnelle und stabile Verbindung zum PC oder Mac.

Unkomplizierte Messwerterfassung

Portable, universell einsetzbare Messwerterfassungssysteme für den naturwissenschaftlichen Unterricht. Verschiedene Sensoren erhältlich.

Allgemeine Informationen

Nehmen Sie mit unserem Customer Service Center Kontakt auf, wenn Sie technische Auskünfte benötigen oder Fragen zum Gebrauch unserer Rechner oder bezüglich einer Lehrerfortbildung haben. Auch zum Ausleihen der Rechner ist das CSC die erste Adresse:

Wir sind für Sie da:



Texas Instruments

Customer Service Center

Tel: 00 800 - 48 42 27 37 (Anruf kostenlos)

Fax: 00 420 - 2 26 22 17 99

Allgemeine Informationen:

ti-cares@ti.com

Kostenlose Ausleihe von Graphikrechnern und Computeralgebrasystemen:

ti-loan@ti.com

Kostenloses Abonnement der TI-Nachrichten:

ti-nachrichten@ti.com

Garantie

Auf alle Graphikrechner und Computeralgebrasysteme von Texas Instruments bietet Texas Instruments 3 Jahre Herstellergarantie. Sollte doch einmal etwas defekt sein, rufen Sie bitte zunächst unser Customer Service Center an. Oft kann das Problem bereits am Telefon behoben werden.

education.ti.com/deutschland • education.ti.com/oesterreich • education.ti.com/schweiz
ti-cares@ti.com