

TI-Nachrichten

Ausgabe 1/11

Inhaltsverzeichnis

Dr. A. Pallack:

Mathematisches Daumenkino 1

B. Grabinger:

Interaktivität mit Notes..... 4

H. Körner:

Iteratives Lösen von Gleichungen 8

W. Beer:

Protokoll einer Rollerfahrt..... 10

V. Berger:

Statische und dynamische
Untersuchungen an einer Schraubenfeder..... 13

W. Pröpfer:

Über biquadratische
Gleichungen und Kegelschnitte 16

S. Weiß:

Konfidenzintervalle verstehen 19

Dr. A. Roulier:

Gasmoleküle in Bewegung 23

Dr. K.-H. Keunecke, A. Reiß:

Von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung ... 26

J. Enders:

Messungen mit TI-Nspire™ und EasyLink®:
Der Maximum-Power-Point (MPP) einer Solarzelle... 29

Tipps und Tricks:

K. Eilers:

Press-to-Test für den TI-84 Plus..... 31



Visualisieren Sie mathematische Sachverhalte interaktiv und in Farbe - jederzeit und überall.

Mathematisches Daumenkino

Dr. Andreas Pallack



Filme erstellen mit TI-Nspire™ CAS / TI-Nspire™ CX CAS

Mit Funktionen Bilder zu gestalten ist ein kreativer und effektiver Weg den Wechsel zwischen verschiedenen Repräsentationen von Funktionen zu vertiefen. TI-Nspire™ bietet die Möglichkeit mehrere Seiten in einem Dokument zu speichern. Durch Blättern entsteht eine Bildfolge – eine Art Film wie bei einem Daumenkino. TI-Nspire™ CX Handhelds bieten neue Optionen, die zur Erstellung solcher Filme verwendet werden können. Hervorzuheben ist, dass Bilder und Graphiken (es können auch Fotos und andere digitalen Bilder eingebunden werden) nun auch auf dem Handheld farbig dargestellt werden.

Das didaktische Potenzial solcher Filme ist groß, da die Lernenden weniger probieren und mehr planen – Filme brauchen ein Drehbuch. In diesem Beitrag werden zwei verschiedene Beispiele vorgestellt, die entweder zum Ende der Sekundarstufe I oder zu Beginn der Sekundarstufe II eingesetzt werden können.

Trifft der Ball den Korb?

Das Beispiel selbst ist nicht neu – aber bewährt. Bisher wurden den Lernenden meist sogenannte „Stroboskopbilder“ vorgelegt. Abgebildet ist dann ein Gesamtbild, in das mehrere Bälle montiert wurden. Hier wird nun ein anderer Weg beschrritten, der den Schülerinnen und Schülern zwar mehr abverlangt, jedoch auch die Chance birgt Modellierungsschritte bewusster und authentischer durchzuführen.

In einem Dokument wurden drei Bilder vom ersten Teil eines Korbwurfs einer Filmaufnahme (in der Applikation Graphs bzw. in Graphs&Geometry) eingepflegt (siehe auch Link am Ende dieses Beitrags – dort können auch die TI-Nspire™ Dateien geladen werden). Im ersten Schritt muss das Koordinatensystem so platziert werden, dass es die reale Situation angemessen erfasst. Dabei kann z. B. die normierte Korzhöhe (3,05 m) zur Orientierung verwendet werden. Schnell hintereinander abgespielt erhält man einen Eindruck von der Bahn des Balls und kann Vermutungen anstellen, ob er den Korb trifft oder nicht. Nun können die Lernenden verschiedene Wege gehen: Sie können z. B. die Positionen der Bälle bestimmen und anschließend rechnerisch nach einer Lösung suchen – es ist jedoch auch möglich eine Parabel von Hand anzupassen oder automa-

tisiert berechnen zu lassen – z. B. mit Hilfe der quadratischen Regression, die bei drei Punkten passgenau ist – d. h. alle Punkte liegen auf der vorgeschlagenen Parabel (Abb. 1).

Analyse der Flugbahn mit Data&Statistics mit Hilfe von drei Punkten

Für diese Analyse wurden im ersten Schritt drei Punkte in Lists&Spreadsheet durch ihre Koordinaten festgelegt und in den Listen xx und yy gespeichert. Diese wurden dann in den drei Data&Statistics Fenstern angezeigt. Die Punkte können von Hand auf die Positionen der Bälle verschoben werden; eine durch Regression berechnete Parabel passt sich automatisch an. Das Ergebnis ist hier, dass der Ball den Korb nicht trifft.

Zeichenerklärung:



Computeralgebrasystem
TI-89 Titanium, Voyage™ 200



TI-Nspire™ Technologie



Graphische Taschenrechner
TI-82 STATS, TI-83 Plus,
TI-84 Plus, TI-84 Plus Silver Edition



Messwertaufzeichnungssystem
CBL 2™, CBR 2™

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

im Rahmen einer Sonderstudie der Initiative D21 ⁽¹⁾ zum (N)Onliner Atlas 2011 wurde die Verbreitung und Nutzung digitaler Medien im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht untersucht. Texas Instruments und der Cornelsen Verlag haben diese Studie unterstützt. Laut Studie erwarten zwei Drittel der von TNS Infratest befragten Lehrkräfte von fachspezifischen elektronischen Hilfsmitteln einen positiven Beitrag zur Erreichung der Unterrichtsziele. 50% der Lehrkräfte schätzen die Investitionsbereitschaft der Eltern auf weniger als 100 Euro; nur ein Viertel erwartet, dass Eltern bereit sind, mehr als 120 Euro auszugeben. Als gewünschte Unterstützung wird weiterhin die Lehrerfortbildung genannt. Die Ergebnisse der Studie sind uns Bestätigung und Ansporn zugleich. Bestätigung, weil unsere Produkte und Services bereits heute sehr gut zur tatsächlichen Bedürfnislage der Schulen passen. Ansporn, Sie auch weiterhin bestmöglich zu unterstützen.

Ein deutlich angestiegenes Interesse an Computeralgebrasystemen können wir aktuell aus dem Bundesland Thüringen vermelden. Das dortige Kultusministerium hat kürzlich entschieden, dass Computeralgebrasysteme wie z.B. der TI-Nspire™ CAS verbindlich zur Abiturprüfung 2014 zu verwenden seien. Thüringen folgt damit einer Empfehlung der Kultusministerkonferenz und auch entsprechenden Stellungnahmen der Verbände MNU, GDM und DMV. In einer Rahmenvereinbarung zwischen dem Thüringer Kultusministerium und Texas Instruments wurde u.a. festgehalten, dass alle Thüringer Schülerinnen und Schüler aus finanziell schwachen Familien im Rahmen des TI Förderprogramms Mathe^{Klasse!} einen kostenlosen Rechners bekommen können.

Die Version 3.0 der TI-Nspire™ Familie stellt einen weiteren Meilenstein in der Geschichte der Werkzeuge für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht dar. Neu sind die Handhelds mit Farbdisplay und eine optimale Einbindung von Messwertaufzeichnung und –auswertung. Mit dem integrierten „PublishView“ können z.B. Videos in Arbeitsblätter integriert und im HTML-Format im Web dargestellt gestellt werden. Zudem lassen sich die Handhelds mit dem TI-Navigator™ System drahtlos miteinander verbinden. Damit bietet Ihnen die TI-Nspire™ Technologie eine umfassende Lösung für Ihren Unterricht. Die Integration aller Werkzeuge unter einer einheitlichen Oberfläche spart Einarbeitungszeit und man bleibt trotzdem flexibel.. Der Lernerfolg verbessert sich, da man sich stärker auf die Inhalte konzentrieren kann.

Lassen auch Sie sich von der TI-Nspire™ Technologie begeistern.

Ihr TI-Team

⁽¹⁾ www.initiaved21.de

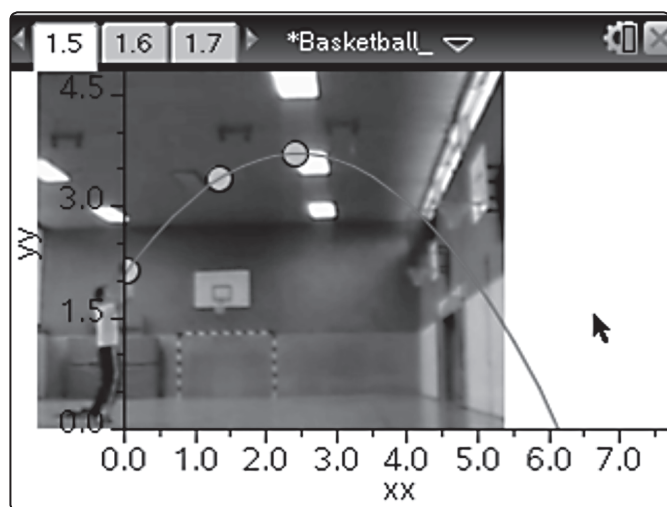


Abb. 1

Mit diesem Beispiel sollte man noch einen Schritt weitergehen: Es bietet sich an die Genauigkeit der Prognose zu reflektieren, z. B. indem man nur zwei Bilder betrachtet und versucht, die beiden Flugbahnen im ersten Teil vergleichbar verlaufen zu lassen. Kleine Abweichungen haben mit Blick auf die Frage – trifft der Ball den Korb oder nicht? – große Auswirkungen. Abb. 2 zeigt eine solche Analyse. In einem Fall (roter Graph) landet der Ball unterhalb des Korbes – im anderen (grüner Graph) trifft er das Brett. Bei der Anpassung der Punkte ist deswegen genaues Arbeiten wichtig.

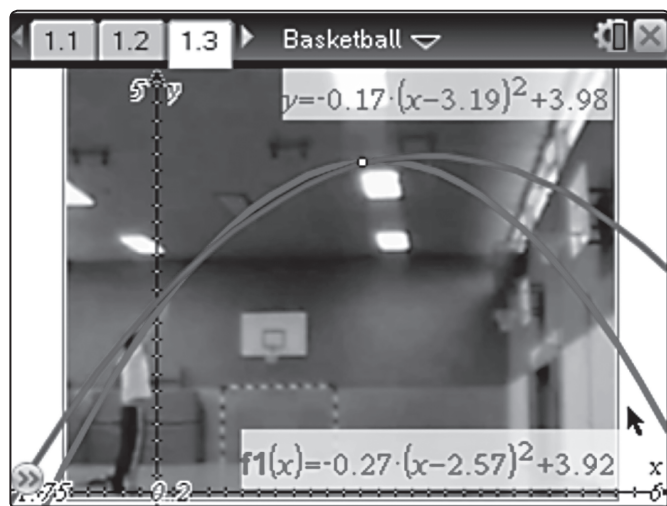


Abb. 2

Für Schülerinnen und Schüler besonders spannend ist es Filme zu analysieren, bei denen der Lehrer selbst oder einige Schüler aus der Klasse den Wurf durchführen. Im Idealfall kann man zum Ende der Analyse den vollständigen Film zeigen (siehe auch den Link am Ende dieses Beitrags).

Geisterstunde

Schülerinnen und Schüler experimentieren erfahrungsgemäß gerne mit Funktionenplottern. Sie verleihen Funktionen ein

Gesicht. Im Beispiel *Geisterstunde* wird den Lernenden zu Beginn ein Film (den Link zu dem Film im Flash-Format finden Sie ebenfalls am Ende dieses Beitrags) vorgespielt, in dem ein Geist, dessen Silhouette aus einem Funktionsgraphen besteht, vor einem Schloss spukt. In diesem Film werden mehrere Einzelbilder verwendet.

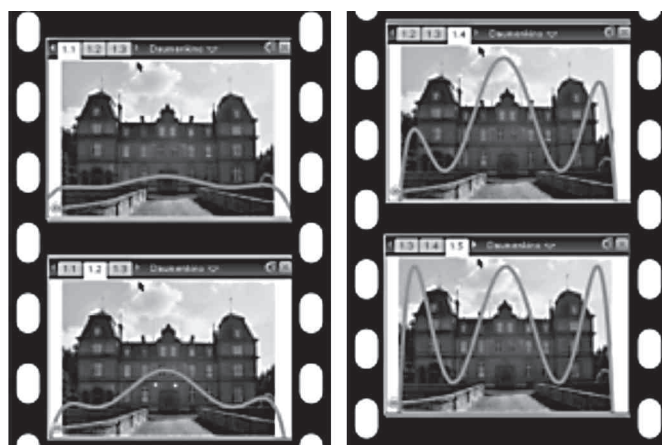


Abb. 3

Aufgabe für die Schülerinnen und Schüler ist es nun ebenfalls einen Geisterfilm zu erstellen. Ein Hintergrundbild – evtl. von der eigenen Schule oder einer altertümlichen Sehenswürdigkeit aus der näheren Umgebung – kann die Motivation und die Freude am Umgang bei der Erarbeitung zusätzlich verstärken.

Fachlich kann das Ziel verfolgt werden, den Umgang mit Polynomfunktionen zu vertiefen; insbesondere den Zusammenhang von Term und Graph. Die Form des Geistes kann man z.B. gut kontrollieren, wenn man von vollständig faktorisierten Termen ausgeht. Geister wie im Beispiel erstellt man z. B. durch Funktionen der Art:

$$f(x) = -a \cdot (x+10) \cdot (x+8)^2 \cdot (x-7)^2 \cdot (x-10)$$

Der Faktor a und die Nullstellen sind dabei so zu wählen, dass die lokalen Extrema vom Koordinatensystem erfasst werden. Es bietet sich an, gemeinsam mit den Lernenden einen Rahmen abzustecken (Anzahl der Bilder, Funktionenklassen, ...), um die abgesteckten Lernziele zu fokussieren. Der Film wird im Unterricht – ggf. untermalt von Musik – durch Blättern im Dokument live präsentiert. Die Nutzung der Lehrersoftware in Verbindung mit einem Beamer hat sich dabei bewährt.

Ist das nicht zu zeitaufwändig?

Ich hatte mittlerweile Gelegenheit die hier präsentierten Beispiele selbst zu testen und in Vorträgen und Fortbildungen vorzustellen. Häufig wird dabei die Frage nach dem Zeitumfang für die Durchführung im Unterricht gestellt. Die Behandlung der Beispiele nahm jeweils nicht mehr als ein Doppelstunde in Anspruch. Hilfreich – und bei Verwendung von Hintergrundbildern sogar notwendig – ist es, wenn ein vorbereitetes Dokument verwendet wird, das man auf die Schülerrechner überspielt. Dabei kann gerade so viel vorgegeben werden, dass der

intendierte Lernzuwachs betont wird und technisches Arbeiten das inhaltliche Lernen nicht überlagert. Zahlreiche Dateien für verschiedenste Lernsituationen finden Sie auf der Materialdatenbank (www.ti-unterrichtsmaterialien.net, Projekte MMM und CuBaLibra).

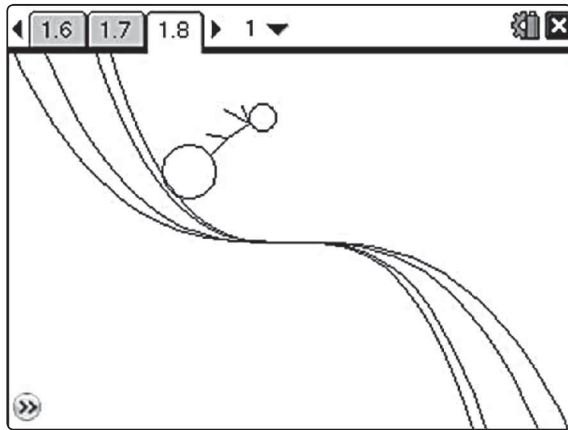


Abb. 4: Ausschnitt aus einem Graphentanz-Film

Ein gut dokumentiertes Beispiel für mathematische Daumenkinos, das allerdings noch mit der Version 2.1 erstellt wurde, ist der Graphentanz (siehe Link am Ende dieses Beitrags und Abb. 4).

Die Filme zeigen, dass die Lernenden viel zusätzliche Zeit investierten – auch hier wurden lediglich 1,5 Stunden Unterrichtszeit verwendet.

Dies sind natürlich nur erste Erfahrungen. Für weitere Rückmeldungen aus der schulischen Praxis – zur Weiterentwicklung des vorgestellten Konzepts – bin ich dankbar.

Link

Verweise zu Filmen, Dateien und Arbeitsblättern finden Sie unter: www.ti-unterrichtsmaterialien.net (Tanzende Graphen).

Autor:

Dr. Andreas Pallack, Soest (D)
andreas@pallack.de

Interaktivität mit Notes

Benno Grabinger



Kurze Einführung

Die Populationsdynamik untersucht Veränderungen, die innerhalb einer Population ablaufen. Ändern können sich dabei der Altersaufbau, das Geschlechterverhältnis, die Sozialstruktur, die Erbanlagen, die Vermehrungsfähigkeit und als augenscheinlichstes Merkmal, die Individuenanzahl. Zur mathematischen Beschreibung dieser dynamischen Prozesse verwendet man neben Differentialgleichungen auch Methoden der linearen Algebra. Zur Beschreibung des Wachstums einer Population mit Hilfe von Matrizen benutzt man als mathematisches Modell die Leslie-Matrix, benannt nach dem englischen Ökologen P.H. Leslie (1900-1974). Für den Mathematikunterricht erschließt sich hier ein Anwendungsgebiet neben der traditionellen räumlichen Geometrie, das auch fachübergreifende Aspekte, z.B. zur Biologie bietet. Das folgende, fiktive Beispiel demonstriert dieses Modell. Ein umfangreicheres Beispiel findet sich in [1, S. 69].

Die Käferpopulation

In einer Population von Käfern lassen sich 3 Alterszustände unterscheiden, einmonatige, zweimonatige und dreimonatige Käfer. Die Hälfte der einmonatigen Käfer überlebt den 1. Monat. Von den Käfern die 2 Monate alt sind überleben 40% den 2. Lebensmonat. Alle Käfer die 3 Monate alt sind sterben nach dem 3. Lebensmonat. Im Schnitt hat ein zweimonatiger Käfer einen Nachkommen, ein dreimonatiger Käfer hat durchschnittlich 3 Nachkommen. Zu Beginn der Beobachtung befinden sich

in jedem Alterszustand 100 Käfer. Wie entwickelt sich die Population weiter?

Ein Zustandsdiagramm kann dieses Regelwerk übersichtlicher machen. Die Namen der Zustandsknoten sind selbsterklärend.

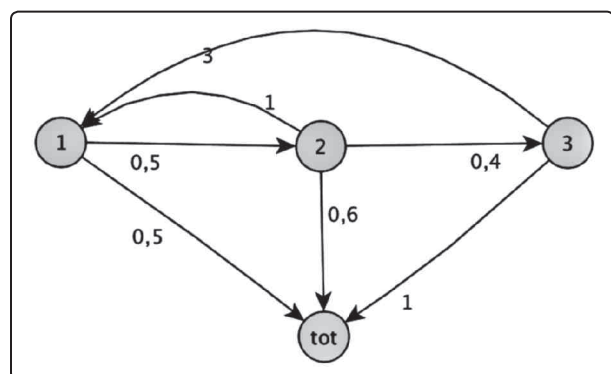


Abb. 1

Zu Beginn (Monat Nr. 0) befinden sich 100 Käfer im Zustand 1, d.h. $x_1^0 = 100$. Entsprechend gilt: $x_2^0 = 100 = x_3^0$. Die Käferanzahlen nach dem (n+1)-ten Monat lassen sich aus den Zahlen des n. Monats berechnen:

$$\begin{aligned} x_1^{n+1} &= 0 \cdot x_1^n + 1 \cdot x_2^n + 3 \cdot x_3^n \\ x_2^{n+1} &= 0,5 \cdot x_1^n + 0 \cdot x_2^n + 0 \cdot x_3^n \\ x_3^{n+1} &= 0 \cdot x_1^n + 0,4 \cdot x_2^n + 0 \cdot x_3^n \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann unter Berücksichtigung der Matrix-Vektor-Multiplikation zu einer Matrixgleichung zusammengefasst werden:

$$\begin{pmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+2} \\ x_3^{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ x_3^n \end{pmatrix}$$

Umsetzung mit dem TI-Nspire™ CAS

Die folgende Abbildung zeigt die Umsetzung mit dem TI-Nspire™ CAS.

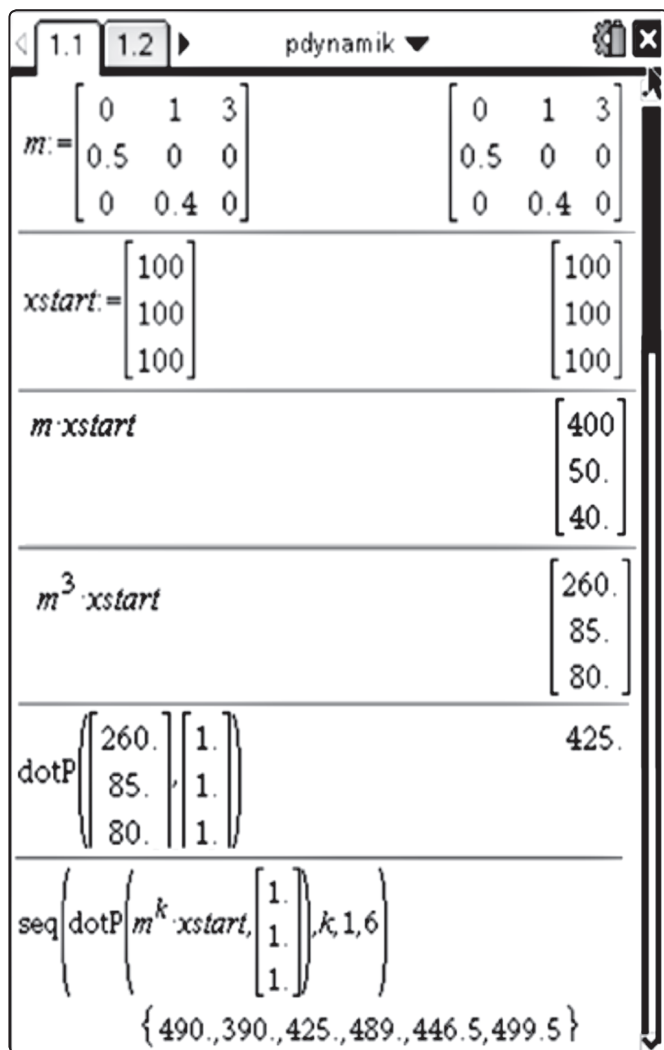


Abb. 2

In Zeile 1 und 2 einer Calculator-Seite werden Matrix und Startvektor definiert. In Zeile 3 wird die Altersverteilung in der nächsten Generation berechnet. Zeile 4 zeigt, wie durch ein Matrizenprodukt aus dem Startvektor direkt die Altersverteilung einer beliebigen Generation (hier die 3.) berechnet werden kann.

Interessiert man sich für die Gesamtzahl der Käfer einer Generation, dann müssen die Komponenten des Ergebnisvektors

addiert werden. Das lässt sich vorteilhaft durch die Bildung des Skalarprodukts (dotP) mit dem Vektor $(1 \ 1 \ 1)^T$ bewerkstelligen. Die letzte Zeile zeigt, wie sich die Gesamtzahlen für die Generationen 1 bis 6 in einer Folge berechnen lassen.

Das funktioniert auf der Calculator-Seite schön und erzeugt auch ein Protokoll mit dem sich die einzelnen Eingaben nachvollziehen lassen. Was aber, wenn in der Matrix ein Parameter geändert werden soll, z.B. die Überlebensrate vom Zustand 2 zum Zustand 3? Wie lässt sich der Einfluss dieses Parameters auf die Entwicklung der Population untersuchen?

Auf der Calculator-Seite kann dies nur durch wiederholte Eingabe sämtlicher Zeilen geschehen, nachdem die Matrix M verändert wurde. Das ist der Preis dafür, dass das Protokoll der Eingaben erhalten bleibt. Interessiert man sich dagegen weniger für das Protokoll, sondern für die Dynamik des Vorgangs, dann bietet sich die Notes-Applikation an.

Mit der Notes-Applikation können Text, aber auch sogenannte Math-Boxen eingegeben werden, in denen sich die Berechnung durchführen lassen, die auch auf der Calculator-Seite möglich sind. Der wesentliche Unterschied zur Calculator-Seite ist, dass sich sämtliche Math-Boxen einer Seite bei Änderung eines Parameters aktualisieren. Dazu zunächst ein einfaches Beispiel. Auf der Notes-Seite (Abb 3) sind in den Zeilen 2, 4 und 6 je eine Math-Box eingegeben. In Zeile 2 wird die Funktion f(x) definiert. In den Zeilen 4 und 6 werden 1. und 2. Ableitung von f(x) berechnet. Ändert man in Zeile 2 den Term der Funktionsvorschrift (Abb 4), dann aktualisieren sich ohne weitere Eingaben auch die Zeilen 4 und 6.

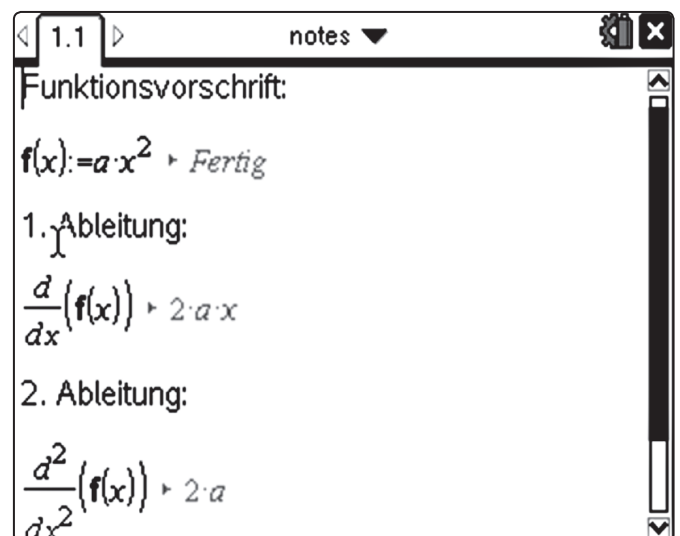


Abb. 3

Die Notes-Applikation behält die eben beschriebene Eigenschaft auch dann, wenn die Änderung der Parameter auf einer anderen Seite stattfindet. Das kann benutzt werden, um das zuvor gestellt Problem zu lösen.

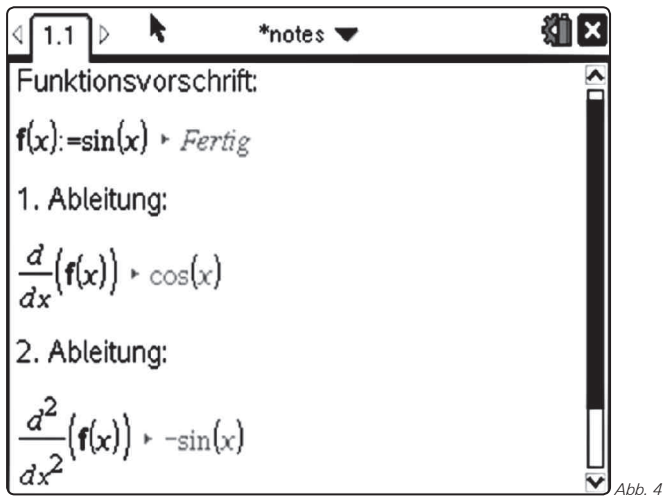


Abb. 4

Lösung des Problems

Wie wirkt sich eine Veränderung des Parameters v in der Matrix M auf die Entwicklung der Individuenzahl aus, wenn als Startvektor x_{start} verwendet wird?

$$x_{start} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} \text{ und } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix}$$

Dazu wird der Nspire™-Bildschirm zweigeteilt, links eine Notes-Applikation und rechts eine Grafik-Seite eingefügt. (Zur übersichtlichen Darstellung wird in der Abbildung die Computer-Ansicht verwendet, die beiden Bildschirme werden hier nacheinander abgebildet)

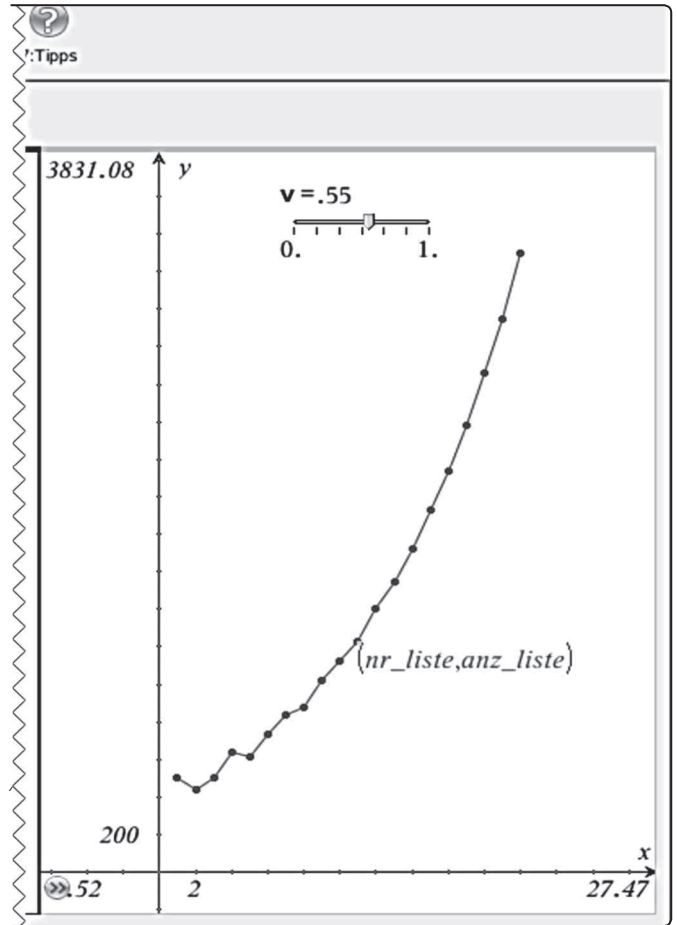


Abb. 6

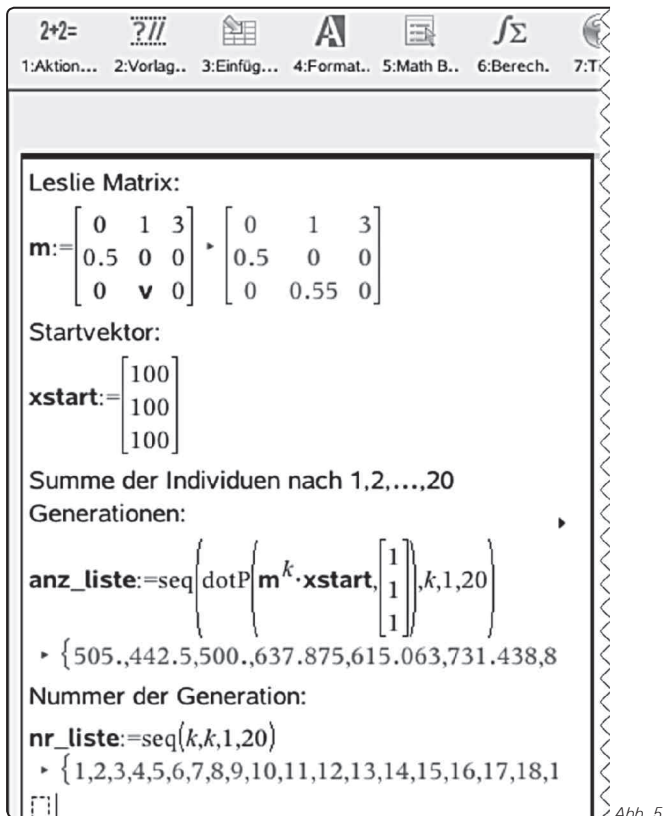


Abb. 5

Mit dem Schieberegler auf der Grafik-Seite wird die Variable v und damit die Matrix auf der Notes-Seite geändert. Die Veränderung des Schiebereglers wirkt sich sofort auf die Berechnung der Gesamtanzahl in der jeweiligen Generation aus (Variable anz_liste). In der Variablen nr_liste werden die Nummern der einzelnen Generationen gespeichert. Auf der Grafikseite wird in einem Streudiagramm die Liste anz_liste über den Nummern der Generationen dargestellt. Die Veränderung des Schiebereglers wirkt sich unmittelbar auf das Streudiagramm aus, so dass der Einfluss der Variablen v sichtbar wird.

Literatur

Neue Technologien - Neue Wege im Mathematikunterricht, Pädagogisches Institut Niederösterreich Hollabrunn, 1999

Nützliche Materialien zur Messwerterfassung finden Sie auch auf der Materialdatenbank unter:

www.ti-unterrichtsmaterialien.net

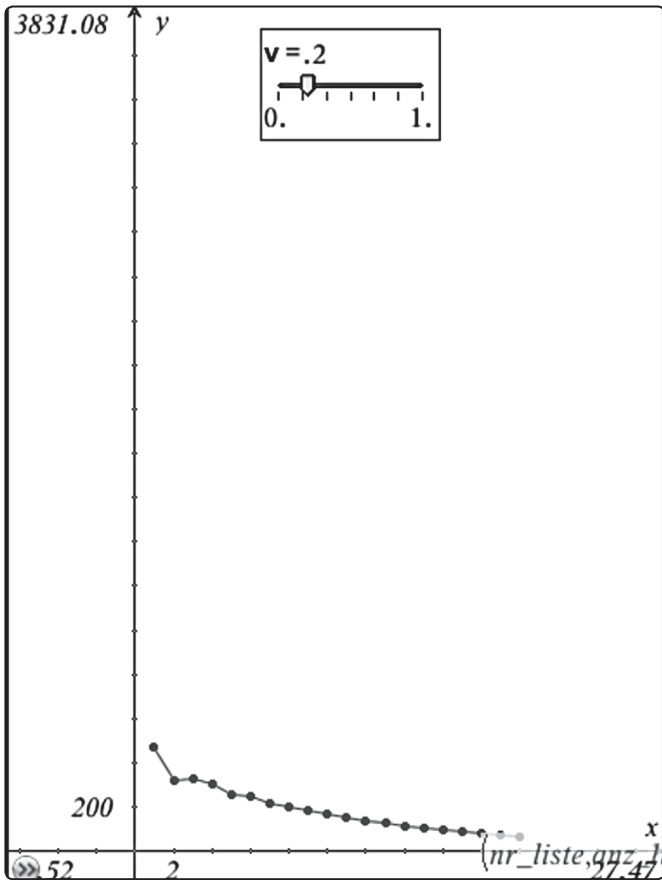


Abb. 7

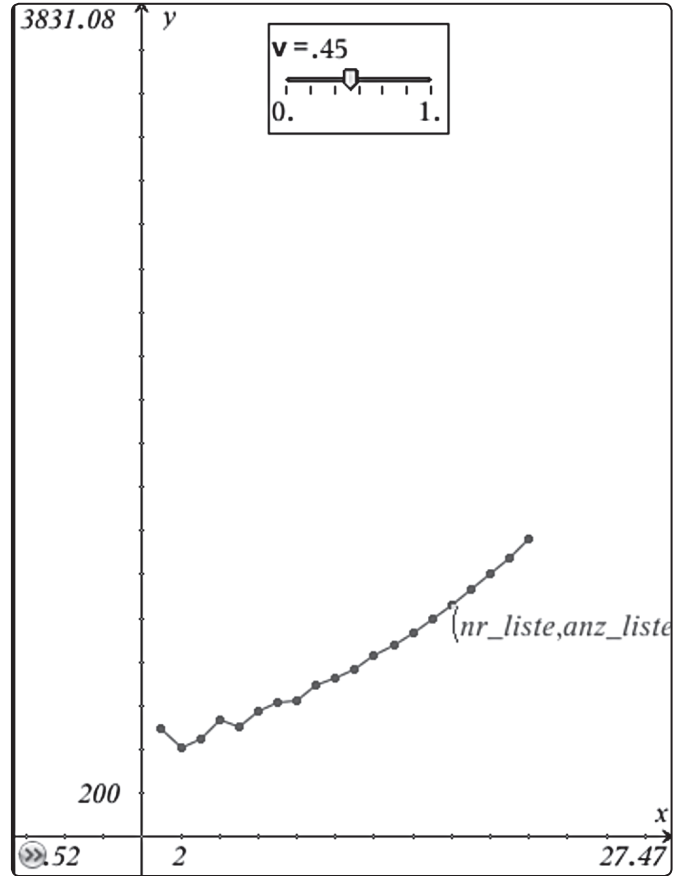


Abb. 9

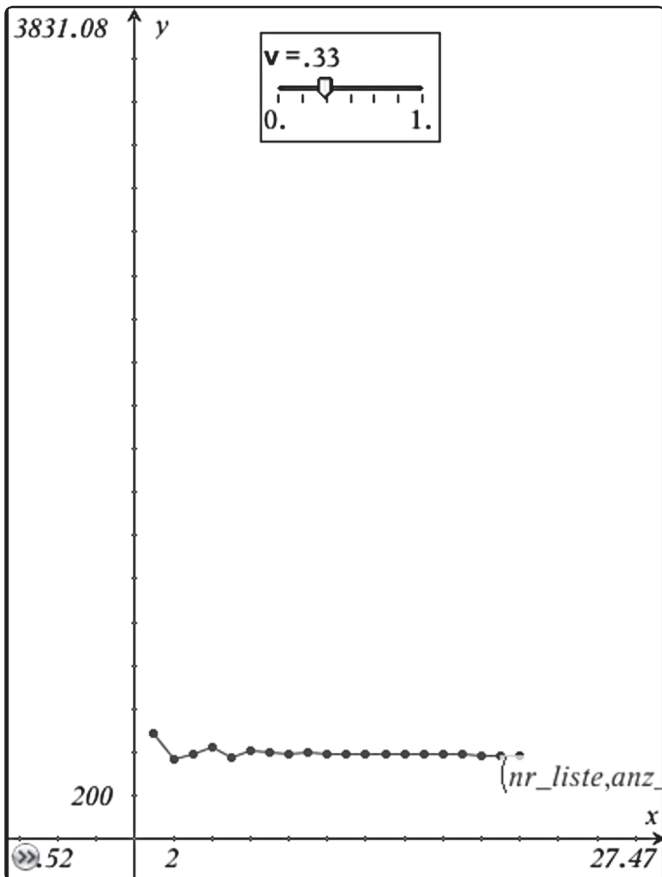


Abb. 8

Autor:

Benno Grabinger, Neustadt / Weinstraße (D)
bennograbinger@t-online.de

Autoren willkommen! Kritik erwünscht!

Ihr Beitrag zu den TI-Nachrichten ist herzlich willkommen, besonders natürlich Beispiele aus dem Unterricht. Ihre Kritik hilft uns, Ihren Wünschen besser gerecht zu werden.
 Ihr Lob spornt uns an.

Senden Sie Ihre Beiträge bitte per E-Mail an unsere TI-Nachrichten Redaktion:
ti-nachrichten@ti.com

oder per Post an
 Texas Instruments, Education Technology, TI-Nachrichten,
 Haggertystraße1, 85356 Freising, Deutschland

Bitte beachten Sie die Hinweise für Autoren auf unserer Website.

Eine Formel zur Berechnung von $\sqrt[n]{a}$ oder: Iteratives Lösen von $x^n = a$

Henning Körner

GTR Fragestellung:

Wie kann man die Zahl finden, deren dritte Potenz 273 ist, also $\sqrt[3]{273}$ berechnen?

Den Schülerinnen und Schülern bieten sich aufgrund ihrer Vorkenntnisse zunächst (u.a.) die beiden folgenden Möglichkeiten, sich der Fragestellung zu nähern.

(1) Intervallhalbierung:

$$\begin{aligned} 6 < \sqrt[3]{273} < 7 & \text{ weil } 6^3 < 273 < 7^3 \\ 6 < \sqrt[3]{273} < 6,5 & \text{ weil } 6^3 < 273 < 6,5^3 \\ 6,25^3 < \sqrt[3]{273} < 6,5 & \text{ weil } 6,25^3 < 273 < 6,5^3 \\ 6,375^3 < \sqrt[3]{273} < 6,5 & \text{ weil } 6,375^3 < 273 < 6,5^3 \end{aligned}$$

(2) Graphisch:

Die Schülerinnen und Schüler suchen nach dem Schnittpunkt von $y = x^3$ und $y = 273$. Zoomen ist hier nichts anderes als eine graphisch aufbereitete Intervallschachtelung.

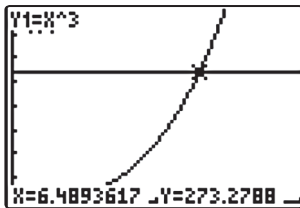


Abb. 1

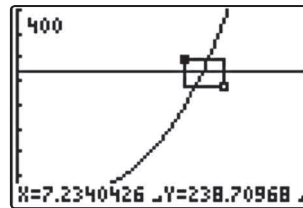


Abb. 2

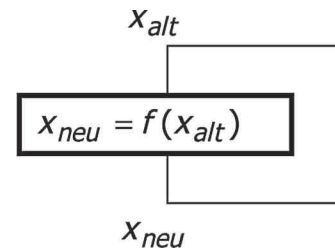
Der Unterricht sollte die Möglichkeit eröffnen, die Ansätze zu bewerten sowie die Herangehensweise als solche zu reflektieren. Ein Nachteil bei beiden Verfahren ist, dass man immer wieder hinschauen muss, wo man weitermacht, außerdem ist die Näherung nur sehr langsam; nach 4 Schritten wissen wir bei der Intervallhalbierung immer noch nicht wie die erste Stelle hinter dem Komma lautet.

Iteration über Heronverfahren

Die gleiche Situation hatten wir aber schon einmal. Als wir z.B. $\sqrt{12}$ berechnen wollten, ist es uns mit Hilfe geometrischer Überlegungen (Quadrat durch Rechtecke annähern) gelungen, eine Formel zu entwickeln, mit der sehr schnell und komfortabel die Wurzel berechnet werden kann (Heronverfahren). Diese Formel lautet für \sqrt{a} :

$$x_{\text{neu}} = \frac{1}{2} \left(x_{\text{alt}} + \frac{a}{x_{\text{alt}}} \right) \quad (*)$$

Wir müssen einen Startwert wählen, dann muss man mit der Formel den neuen x -Wert bestimmen, diesen dann zum alten x -Wert machen, dann mit der Formel den neuen x -Wert bestimmen, diesen dann zum alten x -Wert machen, dann mit der ...



Der Taschenrechner berechnet auf diese Weise Wurzeln! Schüler stellen nun von selbst die Frage: Gibt es für $\sqrt[3]{a}$ auch so eine Formel?

Wir überlegen:

- \sqrt{a} ist ja die Zahl deren Quadrat a ist, also Lösung der Gleichung $x^2 = a$ (diese Gleichung hat übrigens noch eine Lösung).
- Mit der Formel erhalten wir eine Näherungslösung der Gleichung. Auf dem GTR erhalten wir irgendwann (meist ziemlich schnell) immer wieder den gleichen Wert, aber das liegt ja am Runden, wir wissen ja, dass die Dezimaldarstellung oft nicht endlich ist. Wann würden wir beim exakten Rechnen immer wieder denselben Wert erhalten? Wenn $x_{\text{neu}} = x_{\text{alt}}$ ist, ändert sich nichts mehr, alles bleibt fest (fix), also:

$$x_{\text{neu}} = \frac{1}{2} \left(x_{\text{neu}} + \frac{a}{x_{\text{neu}}} \right) \text{ also: } x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) \quad (\#)$$

Wir formen jetzt die letzte Gleichung ein wenig um, wir spielen mit ihr:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) \Leftrightarrow 2x = x + \frac{a}{x} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{a}{x} \Leftrightarrow x^2 = a \end{aligned}$$

Oh! Die Formel für das Heronverfahren ist also nichts anderes als die umgeformte Ausgangsgleichung $x^2 = a$!

Wenn wir also jetzt unsere neue Ausgangsgleichung $x^3 = a$ auf ähnliche Weise umformen, haben wir (vielleicht) eine Formel. Wir müssen so umformen, dass links „ x “ alleine steht und rechts etwas „mit x “ steht. Hier muss also genau das gemacht werden, was sonst nicht gemacht werden durfte! Wenn wir eine solche Formel haben, dann gilt wieder:

Wir wählen einen Startwert, dann mit der Formel den neuen x -Wert bestimmen, diesen dann zum alten x -Wert machen, ...

Es gibt natürlich mehrere Möglichkeiten für solche Umformungen. Die Schülerinnen und Schüler versuchen einfach einige, wir wählen $a = 273$ und iterieren („Enter“ wiederholt den letzten Befehl):

Wir suchen eine „Heron“-Formel

1) Naheliegender ist folgende Umformung:

$$x^3 = 273 \Leftrightarrow x = \frac{273}{x^2} \quad (1)$$

Eine Formel zur Berechnung von $\sqrt[n]{a}$ oder: Iteratives Lösen von $x^n = a$

Henning Körner

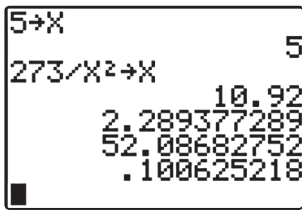


Abb. 3

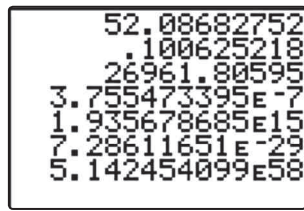


Abb. 4

Die Werte springen zwischen ganz kleinen und ganz großen Werten hin und her, sie scheinen sich 0 und ∞ zu nähern, nicht einem festen Wert.

2) Diese Umformung ist weniger naheliegend:

$$x^3 = 273 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 273 + x \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{273 + x}{x^2 + 1}$$

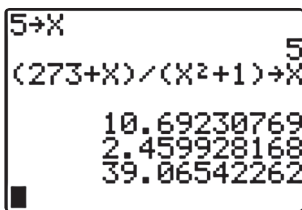


Abb. 5

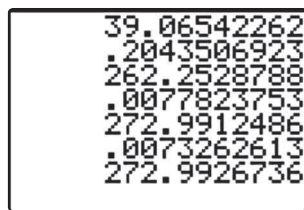


Abb. 6

Hier stabilisieren sich zwar die Werte, aber nicht bei einem Wert sondern abwechselnd bei zwei Werten und beide passen überhaupt nicht.

3) Carina orientiert sich an der Heron-Formel und baut:

$$x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{273}{x^2} \right) \quad (3)$$

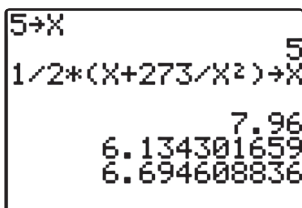


Abb. 7

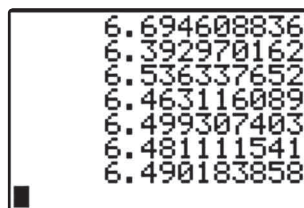


Abb. 8

Die Werte stabilisieren sich anscheinend, wenn man noch weiter iteriert, bleiben sie irgendwann einmal fest. Dies geschieht zwar erst nach 33 Schritten, aber Carina hat das Problem mit einer produktiven Analogiebildung gelöst!

4) Herr Körner lässt diese Umformung vom Himmel fallen:

$$x^3 = 273 \Leftrightarrow 3x^3 = 2x^3 + 273 \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2x^3 + 273}{3x^2}$$

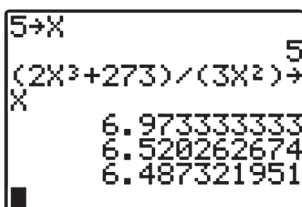


Abb. 9

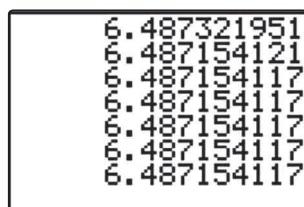


Abb. 10

Die Werte stabilisieren sich wie beim Heronverfahren sehr schnell, sie konvergieren gegen die gesuchte Zahl.

Die Formel zu (4) liefert genau das, was wir wollten! Selbst wenn wir mit anderen Startwerten beginnen, stabilisieren sich die Werte schnell. Wir verallgemeinern von 273 auf a und erhalten folgende Formel:

$$x = \frac{2x^3 + a}{3x^2} \quad (##)$$

Mit dieser Formel berechnet auch der Taschenrechner $\sqrt[3]{a}$.

Als nächstes suchen wir jetzt eine Formel für $\sqrt[4]{a}$. Suchen brauchen wir eigentlich nicht mehr, denn wir können ja Carinas Ansatz auf die neue Gleichung übertragen und erhalten:

$$x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x^3} \right)$$

Eine Überprüfung zeigt, dass die Werte sich auch hier einem bestimmten Wert nähern und sich stabilisieren, aber wieder langsam. Vielleicht besteht ja auch ein Zusammenhang zwischen der Körnerformel (4) und der Heronformel?! Versuchen wir doch mal die Heronformel umzuformen („auf einen Bruch...“):

$$x = \frac{x}{2} + \frac{a}{2x} = \frac{x^2 + a}{2x} = \frac{1x^2 + a}{2x^1}$$

Ein Vergleich mit (##) lässt die Vermutung aufkommen, dass

$$x = \frac{3x^4 + a}{4x^3} \quad (###)$$

eine geeignete Formel für $\sqrt[4]{a}$ ist. Wir überprüfen zunächst, ob wir von $x^4 = a$ zu (###) kommen:

$$x = \frac{3x^4 + a}{4x^3} \Leftrightarrow 4x^4 = 3x^4 + a \Leftrightarrow x^4 = a$$

So weit, so gut; jetzt iterieren und hoffen wir (und wählen $a = 362$):

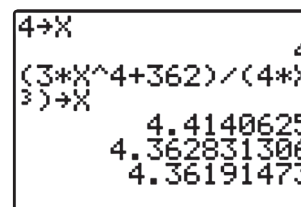


Abb. 11

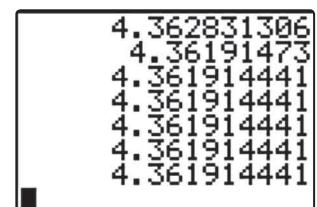


Abb. 12

Es klappt! Carinas Idee, sich auf die Heron-Formel zu beziehen, war richtig, nur gibt es da eben auch verschiedene Möglichkeiten.

Damit haben wir eine Formel zur Berechnung von $\sqrt[n]{a}$ gefunden. Wir können das auch anders ausdrücken: Wir haben die Gleichung $x^n = a$ iterativ gelöst, zusammengefasst: Mit der Iterationsformel

$$x_{\text{neu}} = \frac{(n-1) \cdot x_{\text{alt}}^n + a}{n \cdot x_{\text{alt}}^{n-1}}$$

Henning Körner

erhält man iterativ, näherungsweise, die positive Lösung der Gleichung $x^n = a$, also einen Näherungswert für $\sqrt[n]{a}$.

Gibt es noch Fragen? Natürlich.

- Für gerade Werte von n gibt es manchmal keine Lösung (a) und manchmal zwei Lösungen (b). Was passiert dann bei (a), wenn man die Iterationsformel anwendet? Wie bekommt man bei (b) die zweite Lösung iterativ, also wie findet man eine Iterationsformel dafür?
- Beim Heronverfahren haben uns geometrische Überlegungen geholfen, die Formel zu finden. Gibt es etwas Entspre-

chendes auch für $x^n = a$? Wenn nicht Herr Körner die Umformung 4) mit der Formel (##) gefunden hätte, was dann?

- Warum stabilisieren sich die Werte nur manchmal? Wie kommt es zu diesem seltsamen Pendeln zwischen zwei Werten oder dem Streben ins Unendliche?

Autor:

Henning Körner, Oldenburg (D)
Studienseminar Oldenburg f.d. Lehramt an Gymnasien
hen.koerner@t-online.de

Protokoll einer Rollerfahrt

Wolfgang Beer



Es ist kein Geheimnis, dass sich Inhalte des Physikunterrichts in der Schule zu selten an für Schüler greifbaren praktischen Beispielen orientieren. Oft fehlt der Platz für die Entfaltung von Eigenkreativität oder das spielerische Entdecken von fachübergreifenden Zusammenhängen. Wenn in der Sekundarstufe II die Grundlagen der Mechanik wiederholt und die Beziehungen zwischen Kinematik und Dynamik geklärt werden, bietet sich mit Roller, Fahrrad oder Moped ein einfacher, aber erstaunlicher Schülerversuch an, der vom Lehrer eigentlich nur noch moderiert werden muss.

Aufgabenstellung

Die Aufgabenstellung klingt zunächst sehr einfach: Nehmen Sie das ta-, tv- und ts-Diagramm für eine Rollerfahrt auf. Etwas komplizierter wird die Zusatzbedingung: *Demonstrieren Sie die Ergebnisse unmittelbar nach der Rollerfahrt.*

Erleichternd und verwirrend zugleich sagen wir: Ihnen steht für die Messungen nur ein Beschleunigungssensor zur Verfügung. Es ist natürlich ratsam, wenn die Schülerinnen und Schüler mit den Geräten bereits vertraut sind und die Möglichkeiten der heutigen Taschenrechnergenerationen wenigstens in Ansätzen kennen. Dann ist es nicht undenkbar, dass der eine oder andere Schüler die Versuchsplanung selbst entwickeln kann, denn die ist in wenigen Worten formuliert.

Mit einem Messwernerfassungssystem wird vom Starten bis zum Anhalten einer Rollerfahrt die wirksame Linearbeschleunigung in kleinen Messintervallen aufgenommen. Durch ein- bzw. zweimalige Integration über den gesamten Messzeitraum erhält man das Zeit-Geschwindigkeits- und das Zeit-Weg-Diagramm für den Bewegungsvorgang.

Geräteauswahl leicht gemacht...

CAS – Rechner

Für den hier dargestellten Versuch ist beispielsweise der *Voyage™ 200* optimal geeignet. Wir benötigen einen programmierbaren Grafikrechner mit Listenverarbeitung und Applikation

zur Aufnahme von physikalischen Messgrößen (hier: DataMate). Alternativ kann auch der TI-89 Titanium verwendet werden.

Erfassungssystem

Es eignen sich alle TI-kompatiblen Geräte, also das *CBL 2™*, *Vernier LabPro®* oder *Vernier EasyLink®*. Letzteres bietet sich an, wenn der Versuch mit dem Ein-Achs- Beschleunigungssensor LGA-BTA an einer Version des TI-84 oder mit dem TI-Nspire™ durchgeführt wird. Das Erfassungssystem ist klein, handlich und bedarf keiner eigenen Stromversorgung. Es überträgt Messwerte von einem analogen Sensor (BTA-Stecker) an einen TI-Rechner mit Mini-USB-Schnittstelle.



Abb. 1

Prinzipiell eignet sich jeder kompatible Beschleunigungssensor. Ausreichend ist der LGA-BTA (eine Messachse), es kann aber auch der 3D-BTA (drei Messachsen) verwendet werden.

Roller

An seiner Stelle kann natürlich auch ein Fahrrad, ein Moped oder ein Auto verwendet werden. Mit dem Roller lässt sich der Versuch jedoch sogar im Unterrichtsraum durchführen. Bedingt durch die eher „untypische“ Art der Zeit-Weg - Analyse über die Messung der Beschleunigung und einer Minimierung des mathematischen Aufwandes sollte die Bewegung möglichst perfekt linear erfolgen.

Versuchsdurchführung

Der kleine Beschleunigungssensor (27x45x20 mm) ist mit einem sehr flexiblen Anschlusskabel (2,40m) versehen. Er sollte auf der Lenkerachse des Rollers mit Gummibändern befestigt werden. Das bringt die notwendige Stabilität und hinterlässt an

den Geräten keine unschönen Spuren. Außerdem kann man auf diese Weise den Sensor für die Verwendung ausjustieren. Befestigen Sie den Sensor so, dass die positive x-Achse in Fahrtrichtung zeigt und die Auflageebene des Sensors parallel zur Fahrbahn ist. Der Aufdruck auf dem Sensorgehäuse ist selbsterklärend. Bei Benutzung des Ein-Achs-Sensors „LGA-BTA“ geschieht das Justieren per gutem Augenmaß.

Bei Benutzung des Drei-Achs-Sensors „3D-BTA“ geschieht das Justieren beispielsweise so:

- Sensor an das Erfassungsgerät anschließen, Erfassungsgerät mit dem CAS-Rechner verbinden
- Starten der Applikation „DataMate“
- Kontrollieren der Zahlenwerte für die x- und die y-Achse. Bei senkrecht stehendem Roller wird nun der Sensor so justiert, dass a_x und a_y näherungsweise den Wert Null annehmen.

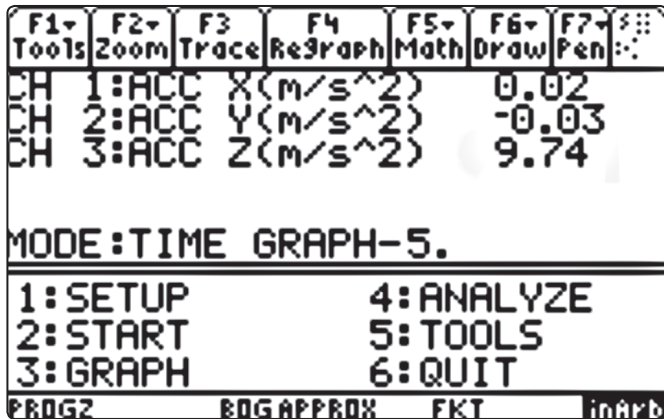


Abb. 2

Nun ist es an der Zeit, eine Probefahrt durchzuführen. Wählen Sie eine hinreichend freie Strecke, auf der Sie aus der Ruhe heraus in mehreren Schüben beschleunigen und anschließend bis auf Null wieder abbremsen können. Messen Sie mit einer Stoppuhr oder durch Zählen die dafür erforderliche Zeit. Je nach freier Wegstrecke ergeben sich 5 bis 10 Sekunden. Es sollte möglich sein, während der Rollerfahrt sowohl das Erfassungsgerät als auch den TI-Rechner gefahrlos mitzunehmen. Achten Sie auf das Anschlusskabel für den Sensor.

Im Programm DATA MATE nehmen Sie nun einige Einstellungen vor: $\text{[1]} \text{[ENTER]} \text{[2]} \text{[2]} \text{[.] } \text{[0]} \text{[2]} \text{[ENTER]} \text{[5]} \text{[0]} \text{[0]} \text{[ENTER]} \text{[1]} \text{[1]}$. Damit weisen wir das Erfassungsgerät an, im Intervall 0,02s über eine Dauer von 10s Beschleunigungswerte für alle belegten Kanäle aufzunehmen.

Stellen Sie oder Ihr Assistent sich in Startposition (alle Geräte fest? a_x -Kabel an CH1?). Mit [2] wird die Messung gestartet, sie endet automatisch. Fahren Sie sofort los und versuchen Sie erst kurz vor Ende der Messung den Stillstand zu erreichen! (ggf. sind mehrere Durchläufe notwendig). Nach Beendigung der Messung verlassen Sie das Programm DATA MATE mit der Taste [6] (Speicherorte: Zeiten in L1, a_x in L2). Übernehmen Sie folgende Einstellungen im y-Editor für den Plot 1:

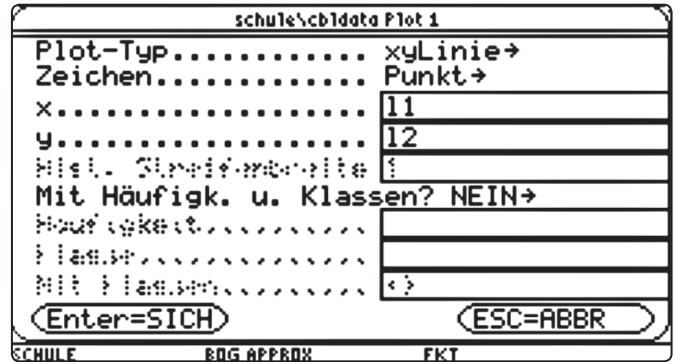


Abb. 3

Aus dieser Situation heraus lassen sich nach Drücken von [ENTER] die Messwerte darstellen. Dazu betätigt man $\text{[F2]} \text{[9]}$, um das Koordinatensystem an die Messwerte automatisch anzupassen. Mit Entsetzen registrieren Sie nichts als Mulm, der sich um die Abszissenachse windet:

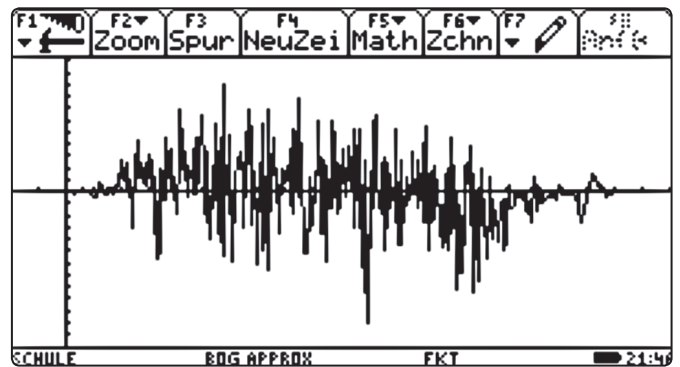


Abb. 4

Doch dieser Mulm zeigt die Wirklichkeit!

Und nun?

Bis hierher hatten wir alle Spaß. Ein verkabelter Wissenschaftler fährt mit dem Roller und hält wieder an. Dann kontrolliert er die Messwerte und führt eine erste Auswertung durch. Wegen

$$v = \frac{ds}{dt} \quad \text{und} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

- erhält man aus den Messwerten der Beschleunigung a_x
- durch einmalige Integration die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von t .
 - durch zweimalige Integration den Weg s in Abhängigkeit von t .

Der Taschenrechner bietet jedoch ohne weiteres keine Möglichkeit, zugehörige Integralfunktionen zu zeichnen, wenn die Funktion nicht bekannt ist. „Leider“ haben wir nichts anderes als eine gigantische Wertetabelle.

Die Idee

Das Plotten der Integralfunktion ist in unserem Fall nichts anderes als die grafische Darstellung der Beträge von Flächeninhalten schmaler Rechtecke und deren Aufaddierung. Das ist doch kein Problem!

- Unsere Zeitintervalle haben die gleiche Länge.
- Wir bilden den Mittelwert aus dem linksseitigen und rechtsseitigen Messwert am Intervall.
- Wir berechnen mit diesem Mittelwert für dieses Intervall hinreichend genau die Fläche unter der Kurve.
- So verfahren wir mit jedem Teilintervall, wobei das vorherige Ergebnis immer mit addiert wird. Dann gehört zu jedem Intervall eine bestimmte Fläche. Wir integrieren quasi grafisch.

Es ist an der Zeit, den Programm-Editor des Rechners zu verwenden, denn diese Prozedur können wir ja kaum einem menschlichen Rechenknecht zumuten. Das nachfolgende Programm können Sie direkt in den Programm-Editor übernehmen.

Listing Programm integral()

```

integral()
PrgmClrIO
Disp "Es sei L eine Messgröße, deren Werte"
Disp "in der Liste L11 stehen."
Disp "Zugehörige Zeiten bitte in L1."
Disp "Neue Zeitliste: L10"
Disp "In L12 speichere ich die Werte dL*dt"
Disp ""
Disp "--> Weiter."
Pause
ClrIO
Disp "Der Datengraph von L11 sollte"
Disp "VOR Ausführung symmetrisch zur"
Disp "x-Achse verlaufen!"
Disp ""
Disp "Starten mit Enter."
Disp "Abbruch mit ON"
Pause
Dim(11)→n
DelVar l10,l12
l1[2]-l1[1]→dt
0→s
0→l12[1]
l1[1]→l10[1]
For k,2,n
l1[k]→l10[k]
1/2*(l11[k-1]+l11[k])*dt→h
h+l12[k-1]→l12[k]
s+h→s
EndFor
DelVar k,dt,h
ClrIO
Disp "Fläche (Näherungswert):",s
Disp ""
Disp "Programm-Ende. Press F5."
EndPrgm
    
```

Versuchsabschluss

Die Zeitpunkte der Messung stehen derzeit noch in L1, die Messwerte in L2. Um die Originaldaten nicht zu überschreiben, kopieren wir die Liste L2 mit „L2 [STO] L11“ in Liste 11. Nach Durchlaufen des Programms integral() wird eine Liste L12 erzeugt, in der die zugehörigen Integrale stehen, in unserem Fall also die Geschwindigkeit. Die grafische Darstellung der Geschwindigkeit erfolgt durch die Definition von Plot 2 in ähnlicher Weise wie weiter oben beschrieben (x: L1; y: L12). Erzeugen Sie ggf. von L12 eine Sicherungskopie in L3.

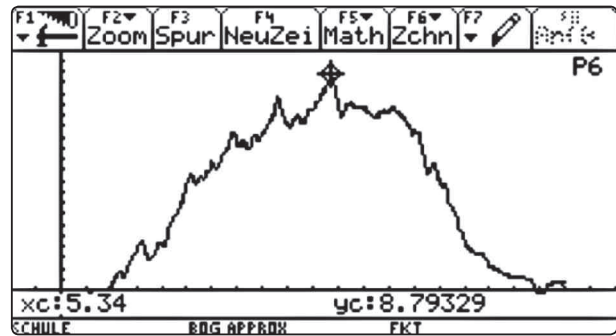


Abb. 5

Aus dem rauschenden Wollknäuel der eigentlichen Messwerte ist nun eine tv-Kurve geworden, in der man sogar das Anschieben mit dem Bein (und v_{max}) deutlich erkennen kann.



Abb. 6

Ein weiterer Durchlauf des Programms nach dem Befehl L12 [STO] L11 erzeugt uns den Zeit-Weg - Zusammenhang, dessen Grafik dann so aussieht:

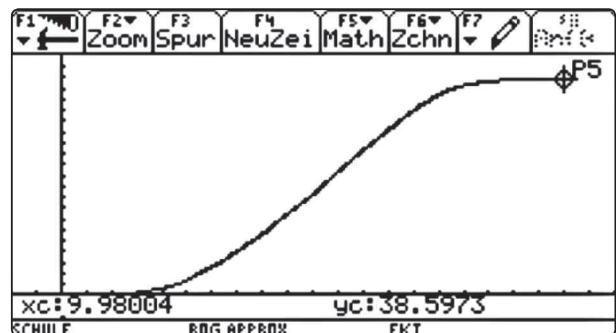


Abb. 7

Aus dem Schrecken von einst ist nun ein Staunen geworden. Das ts-Diagramm entspricht den Erwartungen. Im dargestellten Fall wurde eine Fahrstrecke von 38,60 m gemessen, tatsächlich waren es 38,10 m. Ich glaube, da kann man auch ohne Fehlerbetrachtung und Fehlerberechnung zufrieden sein.

Eine überarbeitete Fassung dieses Artikels mit dem TI-Nspire™ CAS wird in Kürze in der T³ Akzente Reihe erscheinen: „Integralrechnung verstehensorientiert unterrichten“.

Autor:

Wolfgang Beer, Gera (D)
 Goethe-Gymnasium-Rutheneum seit 1608, Gera
info@wolfgangbeer.de

Noch mehr Möglichkeiten für Physik, Biologie und Chemie bieten Ihnen das neue TI-Nspire™ LabCradle und die Vernier DataQuest App. Multifunktionale Datenerfassung leicht gemacht.

Statische und dynamische Untersuchungen an einer Schraubenfeder

Veit Berger

1. Vorbemerkung

Im Beitrag von S. Griebel in den TI Nachrichten 1/10 zur Nutzung fachoptimierter Werkzeuge wird deutlich, dass Medienkompetenz auch Werkzeugkompetenz einschließt. Die Schülerinnen und Schüler sollen zunehmend befähigt werden, zu konkreten Problemsituationen das optimale Lösungswerkzeug auszuwählen. Allerdings sollte der Begriff „Werkzeug“ nicht nur an speziellen Gerätekonfigurationen festgemacht werden. Auch die „universelle Werkzeugkiste“ PC (einschl. Note- oder Netbook) bietet die Möglichkeit, sehr fachspezifische Werkzeuge als Softwarelösungen anzubieten. Im nachfolgenden Beitrag sollen derartige „Insellösungen“ für die Sekundarstufe II vorgestellt werden.

2. Statische Untersuchungen an einer Schraubenfeder

Zunächst soll das Hooke'sche Gesetz an einer vertikalen Schraubenfeder überprüft werden. Die Schraubenfeder wird am Kraftsensor befestigt, mit dem die dehnende Kraft elektronisch erfasst werden kann. Die Dehnung wird mit dem Ultraschallsensor ermittelt. Im günstigsten Fall steht noch ein Wägesatz aus einem älteren Lehrmittelbestand zu Verfügung, der nicht nur die schnelle Variation der Masse zulässt, sondern auch ein geeignetes Reflexionshindernis für den Ultraschall darstellt.



Abbildung 1: Experimentieranordnung

Auf Knopfdruck werden nun Kraft und Dehnung vom CBL 2™ bzw. Vernier LapPro® erfasst, mit einem Silver-Link-Kabel an einen Computer gesendet und direkt in eine Kalkulationstabelle eingetragen. Neben der Tabellenkalkulation MS Excel® müssen

auf dem Computer lediglich die Programme TI Connect™ und TalkTI™ von Texas Instruments installiert sein. Die eigentliche „Insellösung“ besteht in geeigneten Visual-Basic-Makros, mit denen die Messwerterfassung gesteuert wird (Abb. 2).

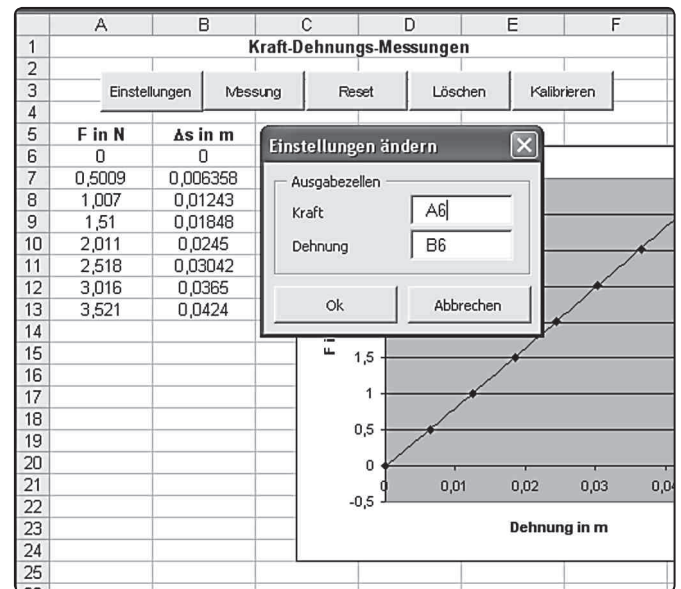


Abbildung 2: Benutzeroberfläche einer Tabellenkalkulation

Grundlegende Kenntnisse im Umgang mit der Tabellenkalkulation vorausgesetzt, kann es den Schülerinnen und Schülern weitestgehend frei gestellt werden, in welcher Form die Messwerte zur Ermittlung der Federkonstante auszuwerten sind (z.B. Quotienten- und anschließende Mittelwertbildung bzw. Bestimmung des Anstiegs im $F(\Delta s)$ -Diagramm).

Die effiziente Messwerterfassung lässt den Vergleich mit der Dehnung eines dünnen Gummifadens zu (vgl. Abb. 3 und Abb. 4). Insbesondere unter der Aufgabenstellung, die Spannarbeit in beiden Fällen zu bestimmen, können vielfältige Lösungsstrategien entwickelt werden.

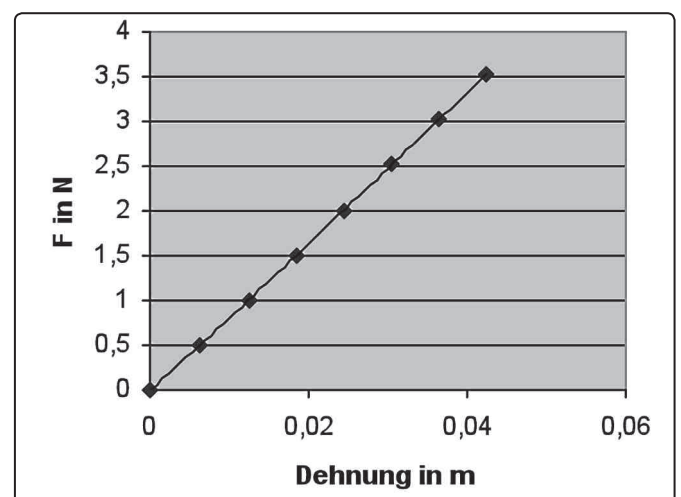


Abbildung 3: Dehnung einer Schraubenfeder

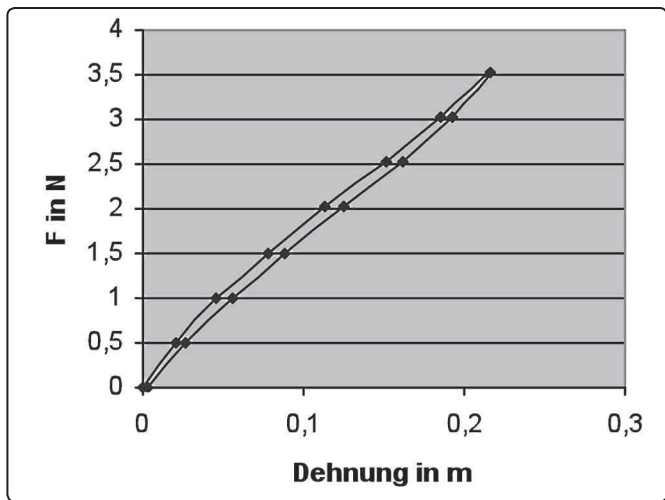


Abbildung 4: Dehnung eines Gummifadens

3. Dynamische Untersuchungen an einer Schraubenfeder

3.1 Freie Schwingungen

Die Versuchsanordnung lässt es zu, sofort von statischen zu dynamischen Untersuchungen überzugehen. Dazu wird das mechanische System nun bei konstanter Masse in Schwingungen versetzt.

Der Ultraschallsensor (CBR 2™ bzw. Vernier Go!Motion) ermöglicht die Messung von Auslenkung, Geschwindigkeit und Beschleunigung (Abb. 5). Mit dem Blick auf die statischen Untersuchungen bietet sich an dieser Stelle durchaus die Begriffsbildung der harmonischen Schwingung an.

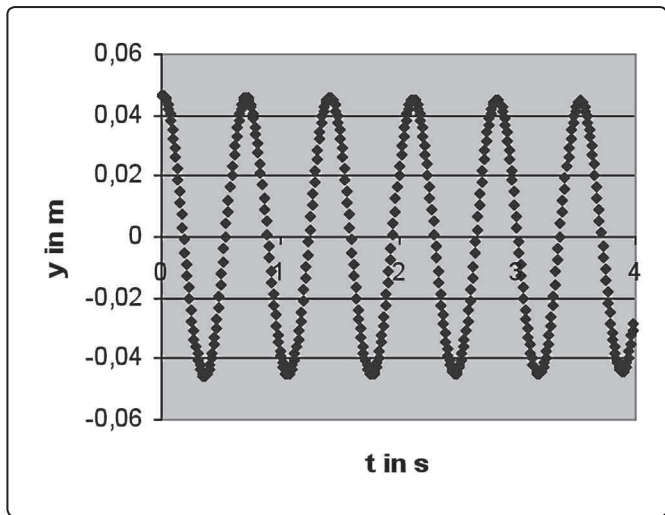


Abbildung 5: freie Schwingung der Schraubenfeder

Daran kann die Fragestellung geknüpft werden, welches Kraft-Dehnungs-Diagramm nun für den schwingenden Federschwinger erwartet werden kann. Interessanterweise ist eine schwache Hysterese im $F(\Delta s)$ -Diagramm zu beobachten (Abb. 6). Dies ließe sich mit einem speziellen Tabellenkalkulations-Modul überprüfen (s. Anmerkung).

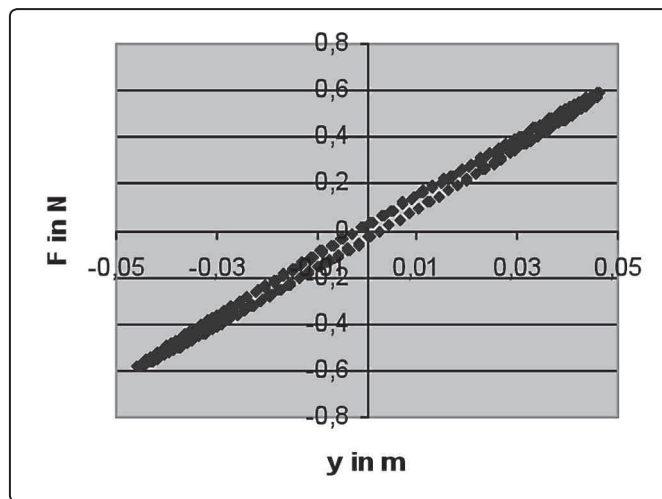


Abbildung 6: Hysterese der Schraubenfeder

Es ist schon eine anspruchsvolle Herausforderung, für dieses Verhalten eine physikalische Erklärung zu finden. Ausgangspunkt ist der lineare Kraftansatz, der unmittelbar aus dem Hooke'schen Gesetz folgt:

$$F = -D \cdot y \tag{1}$$

Bei kleiner Relativgeschwindigkeit soll der Federschwinger einer Stokes'schen Reibung ausgesetzt sein, d.h. der lineare Kraftansatz (1) muss um einen geschwindigkeitsabhängigen Reibungsterm ergänzt werden:

$$F = -D \cdot y - B \cdot v \tag{2}$$

Darin beschreibt B einen konstanten Reibungsfaktor. Da der Federschwinger beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage ($y = 0$) seine maximale Geschwindigkeit annimmt, verschwindet nun die Kraft nicht mehr. Diese ist zudem richtungsabhängig, so dass für $y = 0$ eine von Null verschiedene Kraft mit negativem bzw. positivem Vorzeichen auftritt. Die so entstehende Hysterese ist also reibungsbedingt.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass es durchaus Analogien zur bekannten Hysteresekurve eines Weicheisenkerns im Magnetfeld ergibt. Auch am Federschwinger kann die von der Hysterese eingeschlossene Fläche als „Energieverlust“ interpretiert werden, der am mechanischen System durch Umwandlung in thermische Energie entsteht.

3.2 Erzwungene Schwingungen mit Dämpfungen

Zur Erzeugung erzwungener Schwingungen mit Dämpfung ist es zunächst notwendig, den Federschwinger mit starken Permanentmagneten (z.B. Neodym-Magnete) zu ergänzen. Mit einer (möglichst ringförmigen) Spule, die an einem Funktionsgenerator mit Leistungsendstufe angeschlossen ist, kann nun die Schraubenfeder zu Schwingungen angeregt werden. Sorgt man noch dafür, dass der Permanentmagnet zusätzlich durch ein kurzes Kupfer- oder Aluminiumrohr schwingt, lassen sich sehr schöne Untersuchungen zur Resonanz und zu Schwebungen durchführen (Abb. 7).

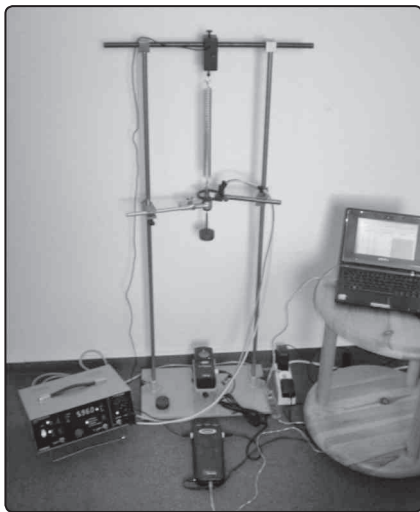


Abbildung 7: Erzwungene Schwingungen mit Dämpfung

Während Wirbelströme im geschlossenen Kupferrohr die gewünschte Dämpfung bewirken (Abb. 8), darf die Dämpfung zur Demonstration erzwungener Schwingungen nur sehr klein sein. Das kann beispielsweise durch ein Rohstück mit einem größeren Durchmesser erreicht werden (Abb. 9).

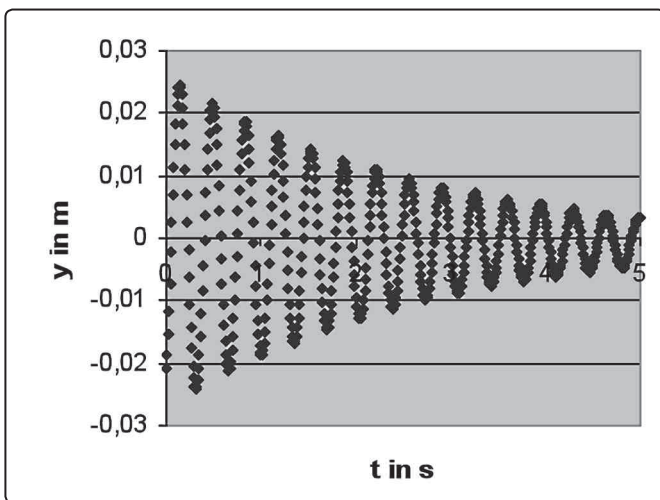


Abbildung 8: gedämpfte Schwingung der Schraubenfeder

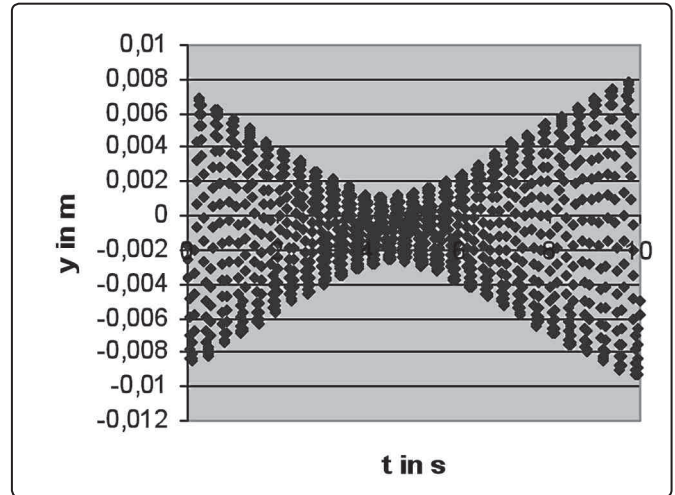


Abbildung 9: Schwebung bei erzwungenen Schwingungen

Für eine weitergehende Betrachtung muss der Kraftansatz in Gleichung (2) durch einen entsprechenden Term ergänzt werden:

$$F = -D \cdot y - B \cdot v + F_{E_{max}} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_E \cdot t + \phi_E) \tag{3}$$

4. Zusammenfassung

Die Untersuchung spezieller Phänomene erfordert in den Naturwissenschaften den Einsatz von Spezialwerkzeugen. Diese Werkzeuge nehmen keineswegs das Denken ab - im Gegenteil! Ihre gezielte Auswahl und ihr Einsatz setzen Fach- und Medienkompetenz voraus, die mit Weitsicht und Augenmaß bei Schülern entwickelt werden müssen, unabhängig von einer speziellen Hard- oder Softwarelösung.

Anmerkung:

Die Excel-Dateien zur Messwerterfassung können Sie zusammen mit einer ungekürzten Version dieses Artikels aus der Materialdatenbank herunterladen. Informationen zum Programm TalkTI™ SDK finden Sie auf der TI-Webseite.

Literatur:

- [1] Griebel, S.: Fachoptimierte Werkzeuge als Technologie im Klassenzimmer der Zukunft, Download unter: www.ti-unterrichtsmaterialien.net
- [1] Mikelskis, H.F. (Hrsg.): *Physik Didaktik – Praxisbuch für die Sekundarstufe I und II*, Cornelsen Scriptor GmbH & Co. KG, Berlin 2006

Autor:

Veit Berger
 Geschwister-Scholl-Gymnasium, Löbau (D)
v.berger@gmx.de

Über biquadratische Gleichungen und Kegelschnitte

Wolfgang Pröpper



Kegelschnitte sind heute fast ganz aus den Lehrplänen verschwunden. Diese Entscheidung lässt sich wohl vertreten, denn der Aufwand unsere Schülerinnen und Schüler mit der Materie vertraut zu machen ist groß und es gibt wichtigere Inhalte für die Oberstufe des Gymnasiums. Dennoch kann es lohnenswert sein, dieses Thema in ergänzenden Kursen, Mathe-Zirkeln o.ä. zu behandeln.

TI-Nspire™ CAS verfügt über eine Bibliothek zur Untersuchung von Kegelschnitten (conics.tns) sowie über eine Sammlung von Beispielen (Plot Kegelschn CAS.tns). Wir werden auf diese Dokumente in diesem Beitrag Bezug nehmen.

Zu diesem Beitrag gibt es ein umfangreiches TI-Nspire Dokument namens *UeberKegelschnitte.tns*, das von der TI-Website herunter geladen werden kann. Wenn in diesem Beitrag darauf Bezug genommen wird, wird es mit [KS, P.S] gekennzeichnet, wobei P.S eine Abkürzung von Problem.Seite darstellt.

Dieses Dokument sollte nur in der TI-Nspire™ Software in der Ansicht Computer-Modus geöffnet werden. Zu den Abschnitten [KS, 4-6] liegen eigene Dokumente für den Handheld-Modus vor

Biquadratische Gleichungen

Wenn man den geraden Kreiskegel im \mathbb{R}^3 mit der Gleichung $z^2 = x^2 + y^2$ und die Ebene $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z = \varepsilon$ zum Schnitt bringt, so erhält man, nach Eliminieren von z , eine sog. biquadratische Gleichung, die nur Glieder mit x^2 , y^2 , $x \cdot y$, x , y und ein konstantes Glied enthält¹. Sie hat die Form

$$a \cdot x^2 + 2b \cdot x \cdot y + c \cdot y^2 + 2d \cdot x + 2e \cdot y + f = 0. \quad (1)$$

Auf Grund seiner Entstehung nennt man den Graph ihrer Erfüllungsmenge einen Kegelschnitt. Mit der symmetrischen Matrix M und dem Vektor W

$$M = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

lässt sich die linke Seite dieser Gleichung elegant durch $W^T \cdot M \cdot W$ ausdrücken. Dies erklärt auch die Faktoren 2 bei den Koeffizienten der linearen und gemischten Glieder [KS, 2.2].

1. Klassifizierung der Kegelschnitte

Wir betrachten zunächst den Fall $b = d = e = 0$, d.h. Gleichung (1) reduziert sich zu

$$a \cdot x^2 + c \cdot y^2 + f = 0 \quad (2)$$

Falls $a \cdot c \cdot f \neq 0$ ist, kann die Klassifizierung einfach durch Untersuchen der Vorzeichen dieser Koeffizienten erfolgen: Haben a , c und f gleiche Vorzeichen, so ist die Lösungsmenge leer. Sonst liegen hier reale Ellipsen oder Hyperbeln vor, sog. zentrale Kurven, deren Mittelpunkt der Koordinatenursprung ist und deren Haupt- und Nebenachsen auf den Koordinatenachsen liegen.

a	c	f	Art
±	±	∓	Ellipse
±	∓	±	Hyperbel, symm. y-Achse
∓	±	±	Hyperbel, symm. x-Achse
±	±	±	Leere Menge

Tabelle 1

Ist dagegen $a \cdot c \cdot f = 0$, dass also mindestens einer dieser Koeffizienten verschwindet, sind 3 Fälle zu unterscheiden:

- Geradenpaar** (genau ein Koeffizient ist Null): Ist $f = 0$ und sind die Vorzeichen von a und c unterschiedlich, so zerfällt die linke Seite von (2) in zwei Linearfaktoren. Dabei entstehen zwei Ursprungsgeraden mit betragsmäßig gleicher Steigung. Ist jedoch $a = 0$ bzw. $c = 0$ so entsteht, wenn die Vorzeichen von c bzw. a und f unterschiedlich sind, ein Parallelenpaar zur y - bzw. zur x -Achse.
- Doppelgerade** (genau zwei Koeffizienten Null): Verschwinden a und f bzw. c und f , so bilden die x -Achse bzw. die y -Achse die einzige Lösung der entsprechenden Gleichung.
- Punkt**: Ist $f = 0$ und haben a und c gleiche Vorzeichen, so wird die obige Gleichung nur vom Koordinatenursprung erfüllt.

In allen übrigen Fällen entsteht keine reale Schnittfigur mehr, d.h. die Erfüllungsmenge ist leer. Ausgenommen ist $a = c = f = 0$. Dann wird die oben stehende Gleichung von der gesamten Zeichenebene erfüllt. Die nachstehende Tabelle zeigt dies in übersichtlicher Form:

a	c	f	Art
±	∓	0	Geradenpaar durch Ursprung
0	±	∓	Parallelenpaar bzgl. x-Achse
±	0	∓	Parallelenpaar bzgl. y-Achse
±	0	0	Doppelgerade, die x-Achse
0	±	0	Doppelgerade, die y-Achse
±	±	0	Punkt, der Ursprung
±	0	±	leere Menge
0	±	±	leere Menge
0	0	±	leere Menge
0	0	0	gesamte Zeichenebene

Tabelle 2

Die Rolle der Koeffizienten b, d und e [KS, 2.3 und 2.4]

Ist nur $b \neq 0$ (bei weiterhin $d = e = 0$) so kann durch eine Drehung, bei der x durch $x \cdot \cos(\theta) - y \cdot \sin(\theta)$ und y durch $x \cdot \sin(\theta) + y \cdot \cos(\theta)$ ersetzt wird, der Koeffizient des gemischten Glieds in (1) zum Verschwinden gebracht werden und weitere lineare Glieder in x oder y treten nicht auf. D.h. wir befinden uns wieder bei einem der vorher aufgeführten Fälle. Bedingung für das Verschwinden des gemischten Gliedes ist

$$\tan(2\theta) = \frac{2b}{a-c}.$$

(Wenn $a = c$ ist der Kegelschnitt ein Kreis. Und der ist invariant gegenüber Drehungen um seinen Mittelpunkt.)

Ebenso kann (bei beliebigem b) und $d, e \neq 0$ die Verschiebung $x := x + u$ und $y := y + v$ die Koeffizienten der linearen Glieder in x und y zum Verschwinden bringen. Die Bedingungen sind

$$u = \frac{b \cdot e - c \cdot d}{a \cdot c - b^2} \quad \text{und} \quad v = \frac{b \cdot d - a \cdot e}{a \cdot c - b^2}$$

Dabei bleiben die Koeffizienten von $x^2, x \cdot y$ und y^2 unverändert. Wie man leicht sieht, gelten diese Bedingungen nur wenn $a \cdot c - b^2 \neq 0$ ist. Dieser Fall ist bisher noch nicht enthalten, da es sich hier um Parabeln handelt, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

Der Fall der Parabeln [KS, 2.5]

Wenn nun $a \cdot c - b^2 = 0$ und $a \neq 0$ ist, so reduziert sich die Gleichung (1) auf

$$a \cdot x^2 + 2b \cdot x \cdot y + \frac{b^2}{a} \cdot y^2 + 2d \cdot x + 2e \cdot y + f = 0 \quad (1')$$

Diese Gleichung lässt sich auf die Form

$$a' \cdot x^2 + 2e' \cdot y = 0 \quad (3)$$

bringen, wobei a' und e' nur von den Koeffizienten der Gleichung (1') abhängen. (Falls in (1') das Glied mit x^2 zum Verschwinden gebracht werden soll, nimmt (3) die Form $c' \cdot y^2 + 2d' \cdot x = 0$ an. An der Berechnung ändert sich im Prinzip nichts.)

In diesen beiden Fällen liegen Parabeln, sog. nicht-zentrale Kurven, vor. Sie sind symmetrisch zur y - bzw. zur x -Achse und gehen durch den Ursprung. Ist in (1) die Parabelbedingung $a \cdot c - b^2 = 0$ erfüllt, so lässt eine Drehung um den Winkel θ , die der Bedingung

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}$$

genügt, das gemischte sowie das in y quadratische Glied verschwinden. Die Gleichung nimmt also die Form $a' \cdot x^2 + 2d' \cdot x + 2e' \cdot y + f' = 0$ an. Diese können wir durch eine Verschiebung $x := x + u$ und $y := y + v$ bei der

$$u = -\frac{d'}{a'} \quad \text{und} \quad v = \frac{d'^2 - a' \cdot f'}{2a' \cdot e'}$$

ist in den ersten Fall der Beziehung (3) überführen.

Zusammenfassung

Bei der Untersuchung der Gleichung (1) können wir uns auf zwei Fälle beschränken: Es reicht, dass entweder $b = d = e = 0$ ist oder, dass $b = c = d = f = 0$ (bzw. $a = b = e = f = 0$) ist. Der erste Fall liefert Ellipsen und Hyperbeln sowie ihre Entartungen (Geraden oder einen Punkt). Im anderen Fall ist der Kegelschnitt eine Parabel.

2. Klassifizierung anhand der Matrix M

Die Matrix M gemäß (*) kann mit den Operationen $H^T \cdot M \cdot H$, wobei die Matrix H entweder die Rotationsmatrix R oder die Translationsmatrix T gemäß

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist, auf folgende Form gebracht werden [KS, 3.1-3].

$$\begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & c' & 0 \\ 0 & 0 & f' \end{pmatrix} \quad \text{und falls } a \cdot c - b^2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e' \\ 0 & e' & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{bzw. } \begin{pmatrix} 0 & 0 & d' \\ 0 & c' & 0 \\ d' & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

Da die Art des Kegelschnitts weder durch Rotation noch durch Translation verändert wird, können wir die oben vorgenommene Klassifizierung anhand der Matrixkomponenten vornehmen. Dazu führen wir folgende neue Größen ein:

$$\Delta = \det(M), \quad \delta = \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = a + c.$$

Sie sind invariant gegenüber den o.g. Drehungen und Translationen.

δ	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
> 0	$\Delta \cdot S < 0$: Ellipse leere Menge	Punkt
< 0	Hyperbel	schneidendes Geradenpaar
$= 0$	Parabel	paralleles Geradenpaar

Tabelle 3

3. Untersuchungen von Kegelschnitten mit der Bibliothek conics.tns

Die Bibliotheksfunktion **conics.tns** hält eine Reihe von Routinen zum Studium von Kegelschnitten bereit. Hier wird auf einige dieser Routinen verwiesen:

study_conic(glch) berechnet aus *glch*, einem Polynom 2. Grades in x und y , die Art und die charakteristischen Größen des entsprechenden Kegelschnitts. Gleichzeitig wird eine Parameterdarstellung des Graphen vorbereitet. Wenn beim Aufruf von *study_conic* gleichzeitig ein G&G Fenster (sinnvoller Weise im geteilten Bildschirm) im Plot-Modus parametrisch geöffnet ist, wird der Graph sofort mit gezeichnet.

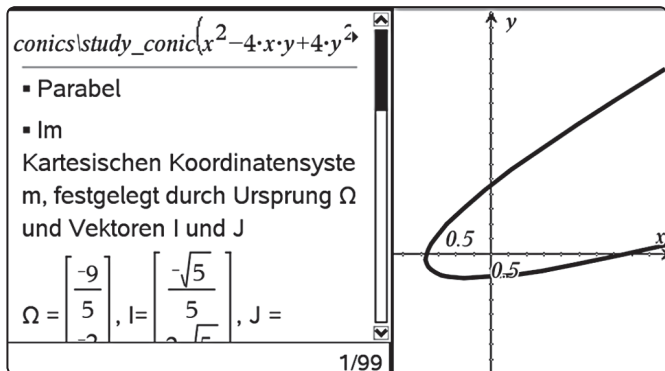


Abb 1

Im Programm **demo_study()** ist ein ganzes Sortiment aller Typen von Kegelschnitten vordefiniert. Nach jedem neuen Aufruf greift es mit einer anderen Gleichung auf **study_conic** zu.

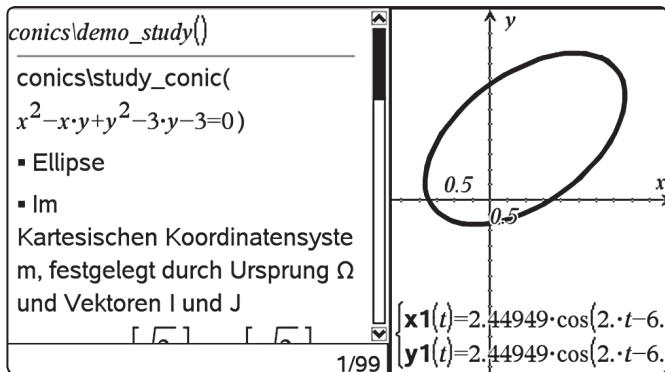


Abb 2

Die Funktion **eq_conic_fde(fokus, dir_pkt, dir_vek, e)** berechnet die Gleichung eines Kegelschnitts bei dem der Brennpunkt **fokus**, ein Punkt **dir_pkt** und die Richtung **dir_vek** der Leitlinie sowie die Exzentrizität **e** gegeben sind.

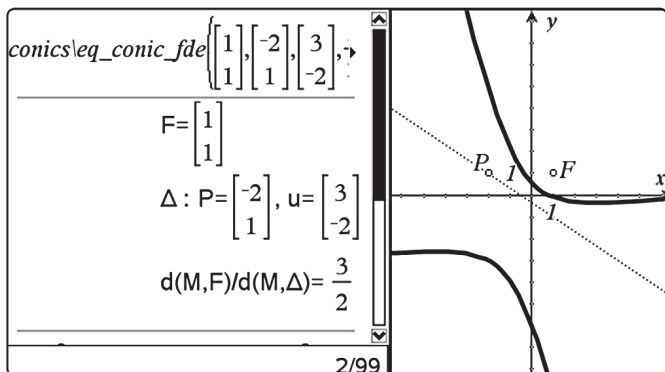


Abb 3

Und **eq_ellipse_bif(F1, F2, a)** berechnet die Gleichung der Ellipse, die durch die Brennpunkteigenschaft definiert ist: $d(M, F_1) + d(M, F_2) = a$.

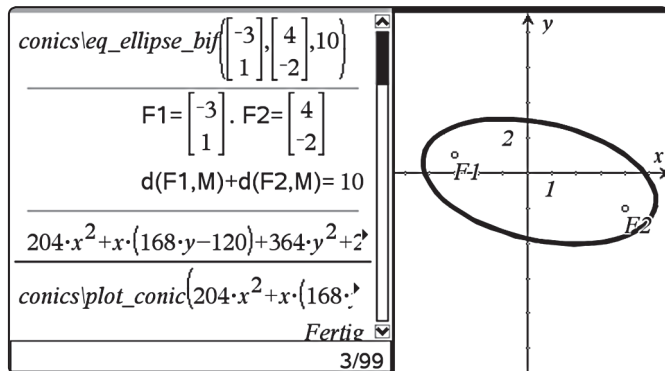


Abb 4

Im Dokument **Plot Kegelschn CAS.tns** wird einerseits der Umgang mit der Bibliothek **conics.tns** erläutert und auch als integriertes Prozedurenpaket vorgestellt. Andererseits wird gezeigt, wie die Funktion **zeros** zum Zeichnen von Kegelschnitten (und noch allgemeiner, von Kurven, die durch Polynome in x und y definiert sind) genutzt werden kann. Darauf werden wir im nächsten Abschnitt genauer eingehen.

4. Darstellungsformen von Kegelschnitten

In diesem Abschnitt wird auf einige Konstruktionsverfahren für Kegelschnitte eingegangen. Ihnen allen gemeinsam ist, dass sie die **zeros** Anweisung von TI-Nspire™ CAS nutzen. Ist $p(x, y)$ ein Polynom 2. Grades in x und y , so liefert **zeros(p(x, y), y)** eine maximal 2-elementige Liste mit (Wurzel-) Termen in x . Diese Liste kann als Kurvenschar interpretiert und gezeichnet werden.

Der Kegelschnittgenerator [KS, 4]

Mit dem Kegelschnittgenerator (KSG) kann die Klassifikation von Kegelschnitten aus den Abschnitten 1 und 2 gut studiert werden. Der Arbeitsbereich ist in zwei G&G Fenster geteilt. Im linken Fenster sind 6 Schieberegler für die Variablen a bis f eingetragen. Ihre Laufweite ist von -10 bis 10 eingestellt. Die Schrittweite von a , b und c ist $0,1$, die von d , e und f ist $0,5$. Das rechte Fenster enthält, im Modus Funktion, die Anweisung **zeros(a*x^2 + 2b*x*y + c*y^2 + 2d*x + 2e*y + f = 0, y)**, mit deren Hilfe zwei Komponenten des Kegelschnitts gezeichnet werden. Zusätzlich werden links oben noch die im Abschnitt 2 angeführten Determinanten

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}, \delta = \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

und die Summe $S = a + c$ angezeigt. Rechts oben wird der errechnete Neigungswinkel der Hauptachse gegen die x -Achse sichtbar. Durch Verändern der Variablen a bis f können nun Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln und Geradenpaare erzeugt und mit den Übersichten in Tab. 1 bis 3 verglichen werden.

Die Brennpunkteigenschaft [KS, 5]

Für Ellipsen gilt, dass die Summe der beiden Brennstrecken, d.h. die Verbindungsstrecken von einem Ellipsenpunkt zu den

beiden Brennpunkten konstant ist, d.h. $d(F_1X) + d(F_2X) = k$. Bei der Hyperbel gilt: $|d(F_1X) - d(F_2X)| = k$. Das Zusammenfassen jeder dieser Gleichungen so, dass die Wurzelausdrücke entfallen, führt auf die gleiche quadratische Gleichung in x und y , mit Koeffizienten, die von den Brennpunktskoordinaten $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ und der Konstanten k abhängen. Der Wert von k wird über einen Schieberegler realisiert. Die anderen Werte werden durch Speichern der Koordinaten zweier Punkte unter den entsprechenden Namen erzeugt. Nun kann, wieder mit Hilfe der **zeros** Funktion, der Graph gezeichnet werden. Durch Ziehen der Brennpunkte bzw. Verändern des Schiebereglers lassen sich nun Ellipsen und Hyperbeln erzeugen.

Es ist zwar grundsätzlich auch möglich, die Brennpunktsbedingung direkt in G&G einzusetzen, d.h.

$f1(x) = \text{zeros}(\text{norm}([x;y]-[f11;f12])-\text{norm}([x;y]-[f21;f22])-k,y)$ zu deklarieren. Wenn vorher die Koordinaten und k wie oben beschrieben erzeugt wurden, so liefert diese Anweisung auch sofort den Graph eines Kegelschnitts. Allerdings führt dies, sobald ein Parameter geändert werden soll zu einer mehrere Minuten (abhängig von der Performance des Rechners) andauernden Blockade des Systems, sodass die eigentliche Dynamik verloren geht.

Die Fünfpunkte Form [KS, 6]

Die biquadratische Gleichung aus (1) in x und y enthält 6 Koeffizienten. Mit fünf verschiedenen Punkten erhält man, bis auf einen Normierungsfaktor, eine eindeutige Lösung dieses Systems. Wählt man noch beispielsweise $a + 2b + c = 1$ (um das gleichzeitige Verschwinden dieser Koeffizienten zu vermeiden) so wird auch der Normierungsfaktor festgelegt.

Zur Realisierung wird eine Funktion `fuenfpunkt(p1,p2,p3,p4,p5)` deklariert, bei der die Eingabeparameter $p1 \dots p5$ die Koordinaten der gegebenen Punkte als 2-dimensionale Spaltenvektoren sind. `fuenfpunkt` berechnet die Lösung des Systems und gibt das entsprechende Polynom zurück. Um das Ganze dynamisch zu machen, werden wieder die Koordinaten der Punkte in G&G an Variable $p1 \dots p5$ bzw. $q1 \dots q5$ zugewiesen. So können die Punkte bewegt und damit die Form des Kegelschnitts verändert werden. Hier ist es durchaus auch möglich Parabeln oder Geradenpaare zu erzeugen.

- ¹ Der gerade Kreiskegel ist keine *conditio sine qua non*. Hier wird er nur deshalb erwähnt, weil er der mit der einfachsten Gleichung ist.

Autor:

Wolfgang Pröpper, Nürnberg (D)

w.proepper@franken-online.de

Konfidenzintervalle verstehen

Siegfried Weiß



Bestimmung von Konfidenzintervallen

Im Stochastikunterricht wird in weiten Teilen von der Gesamtheit auf die Stichprobe geschlossen. Ein Beispiel dafür ist die vielen bekannte Aufgabenstellung, aus der gegebenen Wahrscheinlichkeit p für eine Knabengeburt solle die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass ein Paar mit drei Kindern zwei Söhne hat.

Eine Wahlvorhersage ist ein Beispiel für den umgekehrten Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit. Eine repräsentative Stichprobe von Wählern wird nach ihrem beabsichtigten Abstimmungsverhalten gefragt und die Ergebnisse werden benutzt, um eine Prognose zu formulieren. Vor der letzten Bundestagswahl wurde auf den Internetseiten des Bremer Weser-Kuriers eine Prognose von Schülern des Bremer Kippenberg-Gymnasiums veröffentlicht. Nachzulesen war, dass 565 Befragungen durchgeführt worden waren. Aus den angegebenen Daten lässt sich das Rechenverfahren konstruieren. Auf den Zweitstimmenanteil von 28,0% für die SPD kamen die Schüler offensichtlich, da 158 der Befragten angegeben hatten, die SPD wählen zu wollen. Die Schüler haben, wie für solche Prognosen üblich, eine Punktschätzung veröffentlicht. Die Punktschätzung ist prägnant, ihr Nachteil liegt darin, dass man mit ihr selten

Recht hat. In der Tat wurde keine der Vorhersagen bei der Bundestagswahl bestätigt. Hätten die Schüler dagegen ausgehend von ihren Befragungen Intervallschätzungen für eine Vertrauenswahrscheinlichkeit von 95% bestimmt, so hätten sie bei vier der fünf Parteien Recht gehabt.

Das Ergebnis einer mit bestimmten Rechenverfahren gewonnenen Intervallschätzung wird *Vertrauensintervall* oder *Konfidenzintervall* genannt. Im Folgenden soll ein für Schülerinnen und Schüler anschaulicher Weg für unterrichtliche Beschäftigung mit Konfidenzintervallen beschrieben werden.

Aus dem vorhergehenden Unterricht müssen (sofern man nicht direkt die Normalverteilung heranziehen will) die Sigma-Regeln für binomialverteilte Zufallsgrößen bekannt sein. Eine der Regeln besagt, dass für eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern n und p und der Standardabweichung $\sigma > 3$ ein Stichprobenergebnis k mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% in der $1,96\sigma$ -Umgebung des Erwartungswertes μ liegt. Ausgehend von dieser Tatsache wird ein Intervall bestimmt für Erfolgswahrscheinlichkeiten p , die mit dem Stichprobenergebnis k verträglich sind.

In Schulbüchern sind gelegentlich Herleitungen der folgenden Art zu finden:

$$\mu - c \cdot \sigma \leq k \leq \mu + c \cdot \sigma$$

$$n \cdot p - c \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \leq k \leq n \cdot p + c \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \quad | :n$$

$$p - c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \leq \frac{k}{n} = h \leq p + c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

$$|h - p| \leq c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

Für das 95%-Konfidenzintervall ist $c=1,96$ einzusetzen. Die beiden Lösungen der Betragsungleichung sind die Grenzen p_{\min} und p_{\max} des Vertrauensintervalls. Die Betragsungleichung findet man in dieser oder ähnlicher Form zuweilen auch in Formelsammlungen. Ihr Nachteil liegt darin, dass mit jedem Umformungsschritt, der zur Betragsungleichung führt, das Verständnis der Schüler sinkt.

Die untenstehende sich aus der Betragsungleichung ergebende grafische Darstellung (Abb. 1), die zur Bestimmung der Intervallgrenzen benutzt werden könnte, steht nicht in anschaulichem Zusammenhang mit dem Sachverhalt.

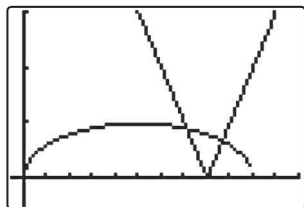


Abb. 1

Konfidenzellipse

Der im Folgenden beschriebene Weg erfordert lediglich das Verständnis der grundlegenden Formel und fördert es zugleich. Er ermöglicht eine grafische Lösung mithilfe einer Darstellung, welche die Grundideen des Bestimmungsverfahrens repräsentiert.

Das Verfahren wird ausgehend von folgendem Sachkontext entwickelt:

Um die Wirksamkeit eines neuen Medikaments zu testen, wurde eine Studie durchgeführt. Dabei gaben 80 (60, 40) von 100 Testpersonen an, dass der gewünschte Erfolg eingetreten ist. Bestimmen Sie Wahrscheinlichkeiten p , die mit dem Stichprobenergebnis $k=80$ verträglich sind (bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95%).¹

Vom Stichprobenergebnis soll auf die Gesamtheit geschlossen werden: Was kann aus der Tatsache, dass das Medikament bei 80% der Befragten wirkte, für die Wirksamkeit in der Gesamtbevölkerung gefolgert werden? Für die Entwicklung eines Verfahrens für einen derartigen Schluss von der Stichprobe auf die

Gesamtheit, muss zunächst vorbereitend für verschiedene Werte von p der umgekehrte Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe vollzogen werden. So ist zu untersuchen, ob das Stichprobenergebnis z. B. mit der Wahrscheinlichkeit $p=0,5$ verträglich ist.

Zur Prüfung werden der Erwartungswert und die Standardabweichung (für $p=0,5$) berechnet sowie (wegen der beabsichtigten Visualisierung auf eine Nachkommastelle genau) die Grenzen der $1,96\sigma$ -Umgebung (Abb. 2). Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% treten in einer Stichprobe vom Umfang $n=100$ zwischen 40 und 60 Treffer auf. Das Stichprobenergebnis (80 Treffer) liegt nicht in der $1,96\sigma$ -Umgebung des Erwartungswertes. $p=0,5$ ist mit dem Stichprobenergebnis also nicht verträglich.

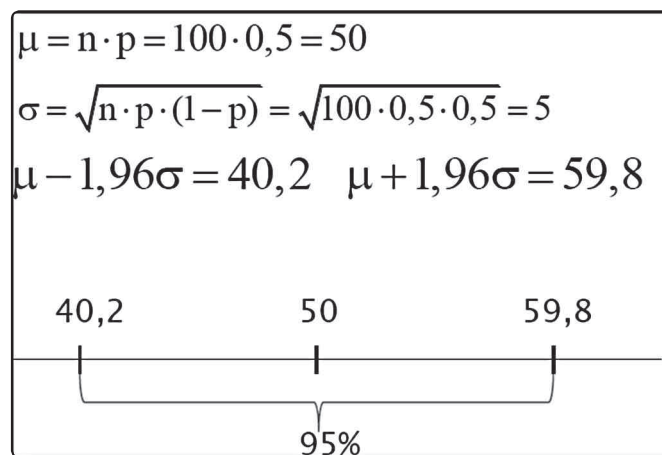


Abb. 2

Die Umsetzung im Unterricht

Für das unten abgebildete Plakat (Abb. 3) wurden arbeitsteilig die entsprechenden Berechnungen für $p=2\%$, $p=4\%$, $p=6\%$, ... $p=98\%$ durchgeführt. Die Schülerinnen und Schüler markierten auf (gelben) Papierlinealen aus dem Baumarkt jeweils μ und schnitten die Lineale millimetergenau an den Grenzen der Sigmaumgebung durch. Dabei wurden die cm-Angaben auf dem 1m langen Papierlineal als Trefferzahlen interpretiert. Enthielt die Sigmaumgebung die Trefferzahl 80, so wurde dies durch einen grünen Klebepunkt auf der 80 des Papierabschnitts markiert. Die so visualisierten Sigmaumgebungen wurden passend auf einen vorbereiteten Papierbogen geklebt. (Beschriftung der x-Achse: p in der Grundgesamtheit, Beschriftung der y-Achse: Treffer in der Stichprobe). Die senkrechten gelben Streifen, die die Sigmaumgebungen repräsentieren, erzeugen ein erstes Bild einer „Konfidenzellipse“. Das waagrecht gespannte rote Gummiband markiert die Trefferzahl in der Stichprobe. Die grünen Punkte auf dem Plakat markieren eine Reihe von Wahrscheinlichkeiten (nämlich 72%, 74%, 76%, ..., 86%), die mit dem Stichprobenergebnis verträglich sind und die eine erste Annäherung für das Vertrauensintervall ermöglichen. Über die „Unvollständigkeit“ der dargestellten Konfidenzellipse, die sich aus der beschränkten Anzahl von Streifen bzw. Wahrscheinlichkeiten ergibt, wird die Herleitung eines genaueren Rechenverfahrens motiviert. Die Schüler können im Rahmen einer

Gruppenarbeit (u.U. mit vorbereiteten Hilfestellungen) eine Darstellung für die Randkurven der Ellipse finden und mit ihnen die genaueren Grenzen des Intervalls bestimmen.

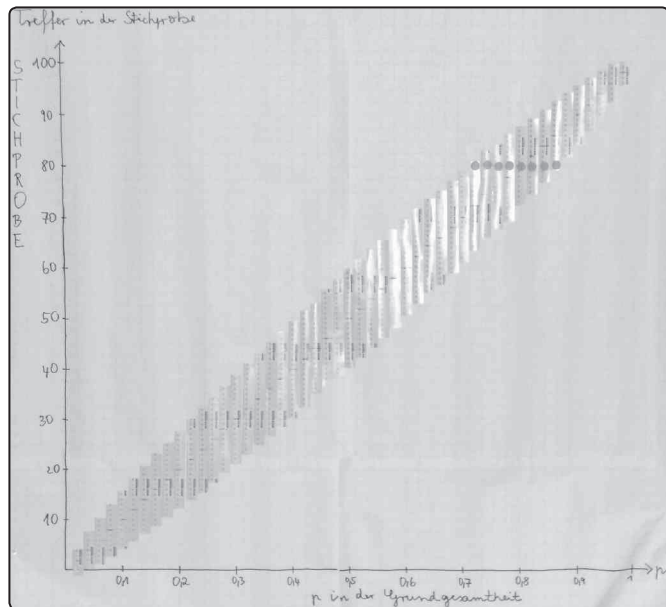


Abb. 3

Tipp: Nachdem die genaueren Grenzen des Konfidenzintervalls berechnet wurden, sollte das Intervall durch einen entsprechend langen waagrecht aufgeklebten grünen Papierstreifen visualisiert werden.

Die Umsetzung mit dem TI-84-Plus

Die Gleichungen für die obere und die untere Randkurve ergeben sich aus dem Rechenweg, der für die Bestimmung der rechten und linken Grenze der Sigmaumgebungen benutzt wurde. Für die Darstellung der beiden Randkurven der Konfidenzellipse mit dem GTR ist in den Gleichungen die Variable p durch x ersetzt worden.

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=100*X+1.96*sqrt(
100*X*(1-X))
\Y2=100*X-1.96*sqrt(
100*X*(1-X))
\Y3=80
\Y4=
\Y5=
    
```

Abb. 4

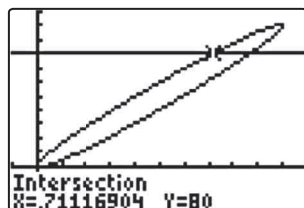


Abb. 5

Das Bild im GTR zeigt die vom Plakat bekannte Konfidenzellipse. Die Grafik kann von den Schülerinnen und Schülern interpretiert werden. Die Schnittstellen der Randkurven mit der waagerechten Linie sind die Grenzen des gesuchten Konfidenzintervalls.

Um das Grundverständnis zu festigen, sollte man die Grenzen vor allem bei den ersten Bestimmungen von Konfidenzintervallen grafisch ermitteln lassen und die Grafiken interpretieren lassen. Durch die Arbeit mit den Randkurven und deren Inter-

pretation wird sichergestellt, dass die Schülerinnen und Schüler die Gleichung(en) $\mu \pm c \cdot \sigma = k$ bzw. $n \cdot p \pm c \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = k$ für die numerische Bestimmung der Grenzen des Konfidenzintervalls nicht nur kennen sondern auch verstehen.

Konfidenzintervalle interpretieren

Wie muss ein berechnetes Konfidenzintervall interpretiert werden? Eine gelegentlich auftretende Fehlvorstellung besteht darin, der unbekannte Wert p liege in der Mitte des Konfidenzintervalls. Der im Folgenden beschriebene Unterrichtsgang ermöglicht den Schülern die Erfahrung, dass dies nicht der Fall ist. Sie erfahren weiter, dass das Konfidenzintervall die unbekannte aber feste Wahrscheinlichkeit p nicht überdecken muss und es wird der bisher nicht nachgewiesene Sachverhalt deutlich, dass das 95% Vertrauensintervall die Wahrscheinlichkeit p mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% überdeckt.

„Simulation“ einer Wahlumfrage

Gegeben ist eine 1kg-Packung Gummibärchen. Wer einen anschaulichen Kontext mag, könnte die Bärchen als Wähler interpretieren. Die politische Überzeugung der Bärchen wird dann durch ihre Farbe widergespiegelt. Es soll aufgrund von Stichproben auf den Anteil der roten Bärchen (der „Roten“) in der Grundgesamtheit geschlossen werden. Die Gummibärchen in der Tüte bilden die Grundgesamtheit.

Die 1kg-Packung von Haribo enthält ca. 440 Bärchen mit 6 verschiedenen Farben. Damit die Laplace-Bedingung ($\sigma > 3$) erfüllt ist, die die Anwendung der Sigmaeregeln erlaubt, darf n nicht zu klein sein und p sollte möglichst im Bereich von 0,3 bis 0,7 liegen. Daher werden tendenziell eher große Stichproben gebildet und es wird der Anteil der roten Bärchen geschätzt, wobei bei der Auswertung zwischen himbeerrot und erdbeerrot nicht differenziert wird.

Die Bärchen in der Tüte werden nach Augenmaß auf 8 bis 10 Teller verteilt. Jeweils zwei oder drei Schüler werten eine Stichprobe aus, indem Sie die Anzahl der roten Bärchen und den Umfang der Stichprobe bestimmen und aus diesen Angaben das sich ergebende Konfidenzintervall (zu der Vertrauenswahrscheinlichkeit 95%) bestimmen. Zur Visualisierung der Konfidenzintervalle erhält jede Gruppe einen grünen Papierstreifen. Aus den passend gekürzten Streifen der einzelnen Gruppen entsteht ein Plakat der abgebildeten Art. Anders als bei vielen realen Untersuchungen kann hier aus der Summe der Stichprobenumfänge und der Summe der Anzahlen der roten Bärchen der Anteil p der roten Bärchen in der Tüte bestimmt werden. 140 von 441 Bärchen = 31,7% waren rot. Dieser Anteil wird durch das senkrecht gespannte rote Gummiband markiert. Zu sehen ist, dass sich die Konfidenzintervalle deutlich unterscheiden und dass p gleichermaßen in der Mitte wie auch am Rande des Intervalls liegen kann. Die anfangs unbekannte Wahrscheinlichkeit p , dass ein zufällig aus der Tüte gewähltes Gummibärchen rot ist, wird hier allerdings von allen Konfidenzintervallen überdeckt.



Abb. 6

Simulation weiterer Stichprobenziehungen

Natürlich könnte die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeit p auch außerhalb des Konfidenzintervalles liegen. Um dies erfahrbar zu machen und um zu zeigen, dass dieser Fall mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% auftritt, bieten sich Simulationen von Stichprobenziehungen an.

Die Funktion `randbin` liefert binomialverteilte Zufallszahlen. Hier wurde in Anlehnung an die vorausgegangene Untersuchung von Gummibärchenstichproben als Stichprobengröße 50 und als Trefferwahrscheinlichkeit $p=0,317$ gewählt. In der letzten Zeile sieht man die Anzahl der Treffer bei den simulierten fünf Stichprobenziehungen. Enthält eine Stichprobe wie hier 8 Treffer, so ist $[8,3\%;28,5\%]$ das sich ergebende Konfidenzintervall. Es enthält nicht den „wirklichen“ Wert $p=31,7\%$.

```
randBin(50,.317,
5)
(8 16 22 19 20)
```

Abb. 7

Komfortabel wird die Auswertung mit Tabellenkalkulationsprogrammen. Unten ist das Ergebnis von 5 Simulationen mit der Applikation `Cellsheat` des `Voyage™ 200` zu sehen. Die Grenzen `pmin` und `pmax` des sich aus der Trefferzahl in der Stichprobe ergebenden Konfidenzintervalls wurden automatisch berechnet. In Spalte E wird angezeigt, ob die tatsächliche Wahrscheinlichkeit p in der Grundgesamtheit vom Konfidenzintervall überdeckt wird.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8
File	Plot	Edit	Format	Window	Funcs	Stat	ReCalc
kon	A	B	C	D	E	F	
1	p=	H	pmin	pmax	p in []		
2	.317	13.	.159	.396	ja		
3		20.	.276	.538	ja		
4		23.	.33	.596	nein		
5		22.	.312	.577	ja		
6		19.	.259	.518	ja		
7							

B2: =randbin(50,\$A\$2)

WEISS RAD AUTO FUNC

Abb. 8

Alternativ oder ergänzend können Simulationsprogramme eingesetzt werden. Gut geeignet ist das Programm `VU-Statistik²`. Es stellt die sich aus simulierten Stichprobenziehungen ergebenden Konfidenzintervalle wie auf dem obigen Plakat durch waagerechte Streifen dar. Ein grüner Streifen zeigt dabei an, dass die für die Simulation benutzte Wahrscheinlichkeit p vom Intervall überdeckt wird. Ein roter Streifen zeigt an, dass p nicht im Konfidenzintervall liegt. Zusätzlich wird angezeigt, welcher Anteil der Konfidenzintervalle die Wahrscheinlichkeit p enthält.

Die anfänglichen Bedenken, das zweifache Arbeiten mit Streifen könne die Schüler verwirren, haben sich weder im Kurs auf grundlegendem noch im Kurs auf erhöhtem Niveau bestätigt. Die beiden unterschiedlichen Streifen boten fruchtbare Gesprächsanlässe, die unterschiedliche Lage und Farbe (Sigmaumgebungen: stets gelb, senkrecht, Konfidenzintervalle: stets grün, waagerecht) erleichterte die Unterscheidung und das Gespräch über die Zusammenhänge.

- 1 vgl. Zentralabitur Mathematik, Niedersachsen 2009, gA-Kurs, Nachschreibetermin
- 2 Das Programm ist auf der CD zu finden, die dem Buch „Elemente der Mathematik –Niedersachsen Klasse 10“ des Schroedel-Verlags beiliegt.

Autor:
Siegfried Weiß, Marienschule Hildesheim (D)
siegfried.weiss@gmx.de

Viele weitere Materialien finden Sie auf der Materialdatenbank unter:
www.ti-unterrichtsmaterialien.net

Gasmoleküle in Bewegung

Dr. Alfred Roulier



Das Verhalten eines idealen Gases soll mit einem einfachen, 2-dimensionalen kinetischen Modell untersucht werden. Ausgangspunkt dazu ist ein Artikel von A.K. DEWDNEY in der Rubrik «Computer Recreations» im Magazin «Scientific American» vom März 1988. Das dort beschriebene Konzept wird ergänzt mit einer physikalisch exakteren Behandlung des elastischen Stosses zwischen den Molekülen und der druckgebenden Wand, sowie mit der physikalischen Auswertung der Simulation, d.h. mit dem Zusammenhang zwischen den Größen Druck, Volumen und Temperatur.

Modell

In einem durch 3 fixe Wände und einem beweglichen Kolben (Masse $mkolb$) definierten Volumen, befinden sich $nball$ Moleküle der Masse $mball$ in Bewegung. Diese kollidieren mit den fixen Wänden und dem beweglichen Kolben nach dem Gesetz des elastischen Stosses.

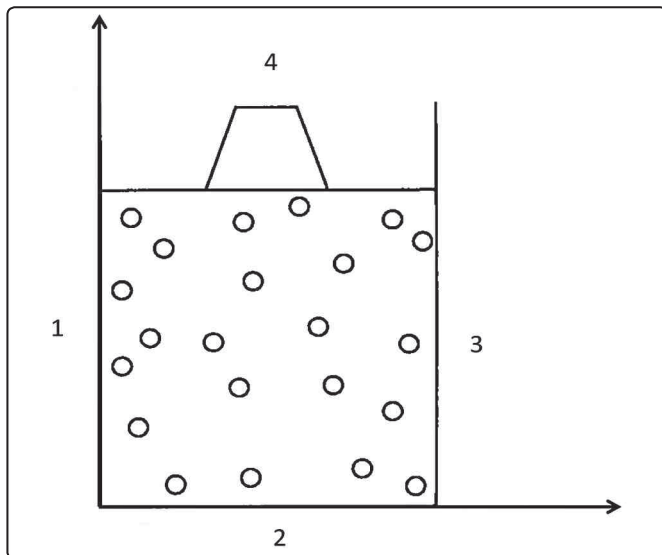


Abb.1

Weitere Vereinfachungen sind:

- Beschränkung auf 2 Dimensionen,
- Keine Wechselwirkung zwischen den Molekülen,
- Zu Beginn gleiche Geschwindigkeitsbeträge für alle Moleküle.

Der Nullpunkt des Koordinatensystems wird in der linken unteren Ecke angenommen.

Simulation

Das Programm **gasgesetz(vball, mkolb, nball, nstoss)** im Dokument **kingas.tns** simuliert die Bewegung von $nball$ Molekülen mit der Anfangsgeschwindigkeit $vball$ unter einem Kolben der Masse $mkolb$ während $nstoss$ Ereignissen. Das Programm ist Ereignis-gesteuert. Dabei ist ein Ereignis der elastische Stoss eines Moleküls mit einer der 3 Wände oder dem Kolben. Das Programm hat folgende Struktur:

Zufällige Wahl der Anfangskoordinaten der $nball$ Moleküle. Zufällige Aufteilung der Anfangsgeschwindigkeiten und Vorzeichen auf die x- und y-Komponenten
Beginn einer Schleife über $nstoss$ Ereignisse
Mit einer Schleife über alle Moleküle wird ermittelt, welches Molekül (Index $ball$) als nächstes auf welche Wand (Index $wand$) nach welcher Zeit ($zeit$) trifft.
Nun werden die Stöße ausgeführt. Falls $wand = 1$ oder $= 3$ ist, wechselt nur das Vorzeichen der x-Geschwindigkeitskomponente des Teilchens $ball$. Falls $wand = 2$ ist, wechselt das Vorzeichen der y-Komponente. Falls $wand = 4$ ist, erfolgt ein Impuls- und Energieübertrag zwischen Kolben und Teilchen auf der Höhe $hkolb$. Beide Geschwindigkeiten ändern.
Nachführen der Teilchenkoordinaten
Ende der Schleife über $nstoss$ Ereignisse
Ausgabe der Ergebnisse

Das Programm **gasgesetz(vball, mkolb, nball, nstoss)** wird im Anhang detailliert beschrieben. Zum Verständnis der Berechnungen in dieser Simulation werden folgende Kenntnisse vorausgesetzt:

- Der freie Fall zur Berechnung von Lage und Geschwindigkeit des Kolbens vor dem Stoss,
- Energie- und Impulserhaltung zur Berechnung der Geschwindigkeitsänderung des Moleküls und des Kolbens nach dem elastischen Stoss.

Ausgangslage

Wir setzen die festen Parameter wie folgt fest:

Breite der Box: $box = 1$; Masse der Moleküle: $mball = 0.1$; «Erdbeschleunigung»: $g = 1$;

Höhe des Kolbens am Anfang: $hkolb = 1$; Geschwindigkeit des Kolbens: $vkolb = 0$.

In einem ersten Programmlauf werden die weiteren Parameter wie folgt gewählt: $vball = 2$; $mkolb = 5$; $nball = 50$; $nstoss = 1000$; Die Temperatur eines Gases ist definiert durch die mittlere kinetische Energie der Moleküle. Zu Beginn ist sie:

$$T = k \cdot E_{kin} = k \cdot \frac{m_{ball} \cdot v_{ball}^2}{2} = 0,2 \cdot k$$

Die Konstante k bestimmt die Temperaturskala in unserem Modell, sie kann gleich 1 gesetzt werden. Der Druck p_g des Gases ist nach dem idealen Gasgesetz:

$$p_g = n_{ball} \cdot \frac{T}{V} = 10 \quad 5$$

Der Kolbendruck p_k hingegen ist:

$$p_k = m_{kolb} \cdot \frac{g}{box} = 5$$

Weil $p_k < p_g$ ist, wird der Kolben anfänglich steigen.

Endlage

Wir betrachten den Verlauf der Simulation in einem Streuplot der Energiewerte (Abb.2).

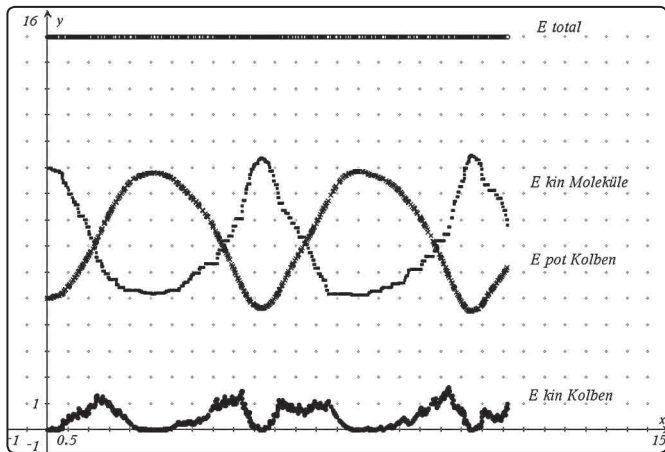


Abb.2

Abgebildet sind die *nstoss* Werte der kinetischen Energie des Kolbens, der potentiellen Energie des Kolbens (gleichzeitig ein Mass für die Höhe) und der kinetischen Energie der Moleküle. Zuoberst ist, als Kontrolle, die Summe der 3 Energien, d.h. die Gesamtenergie des Systems aufgetragen, und sie bleibt, wie es sein soll, konstant – das Modell funktioniert richtig.

Wie erwartet steigt der Kolben anfänglich und das Volumen nimmt zu. Gleichzeitig verlieren die Moleküle kinetische Energie, d.h. das Gas kühlt sich ab. Betrachtet man die ganze Simulation, sieht man, dass der Kolben um einen Mittelwert oszilliert, ebenso die kinetische Energie des Gases, d.h. die Temperatur. Das Programm berechnet die Mittelwerte von Volumen und Temperatur :

<i>gasgesetz</i> (2,5,50,1000)	
Beginn	: V = 1. T = 0.2 p = 10. pV/T = 50
Ende	: V = 1.411 T = 0.148 p = 5. pV/T = 47.5209
Fertig	

Abb.3

Das Gesetz des idealen Gases, $(p \cdot V) / T = \text{konstant}$, wird durch unser einfaches Modell mit nur 50 Molekülen erstaunlich gut simuliert. Die Laufzeit auf dem PC beträgt bei 50 Teilchen und 1000 Stößen ca 1.5 Minuten. Auf dem Handheld erzielt man mit 30 Teilchen und 150 Stößen in 2.5 Minuten ein hinreichend aussagekräftiges Ergebnis.

Beilagen:

Das TI-Nspire™ CAS Dokument kingas.tns finden Sie zusammen mit diesem Artikel in der TI-Materialdatenbank.

Autor:

Dr. Alfred Roulier, Neuenegg (CH)
a.roulier@bluewin.ch

Anhang

Detailbeschreibung des Programms *gasgesetz(vball, mkolb, nball,nstoss)*:

Programmschritte	Bemerkungen
Define <i>gasgesetz</i> (vball,mkolb,nball,nstoss)= Prgm DelVar xk,yk,vx,vy,etot,epotkolb,ekinkolb,ekinball,kumzeit Local box,hh,i,mball,g,thit,tt,wand,w,ball,zeit,kolt,druck, vol,temp,hkolb,vkolb,diskr,down	vball : Betrag der Teilchengeschwindigkeit mkolb : Kolbenmasse nball : Anzahl Teilchen nstoss : Simulationsdauer in Anzahl Stößen
hkolb:=1:box:=1:vkolb:=0:mball:=0.1:g:=1:hkolbstart:=hkolb	Parameter zuordnen, Anfangswerte festlegen, Listen initiieren. hkolb: Kolbenhöhe; vkolb: Kolbengeschwindigkeit; mball: Masse der Teilchen; g : „Erdbeschleunigung“
etot:=newList(nstoss):epotkolb:=newList(nstoss) ekinkolb:=newList(nstoss):ekinball:=newList(nstoss) epotkolb[1]:=mkolb*g*hkolb:ekinkolb[1]:=0 ekinball[1]:=0 etot[1]:=epotkolb[1]+ekinkolb[1]+ekinball[1] kumzeit:=newList(nstoss):kumzeit[1]:=0 down:=newList(nball)	Die folgenden Variablen sind Listen, die am Schluss als Spotdiagramm ausgegeben werden ekinkolb : kinetische Energie des Kolbens epotkolb : potentielle Energie des Kolbens ekinball : Summe der kin. Energie aller Teilchen etot : Systemenergie kumzeit : kumulierte Zeit down : true, wenn y-Komponente der Teilchengeschwindigkeit negativ ist, false, wenn positiv.
For i,1,nball xk[i]:=rand()*box : yk[i]:=rand()*hkolb vx[i]:=rand()*vball : vy[i]:=0 hh:=randInt(1,4)	Anfangswerte für Ort xk, yk und Geschwindigkeit vx, vy der Teilchen berechnen. Mit der Zufalls-Hilfsvariablen hh die Vorzeichen der Geschwindigkeitskomponenten festlegen. Liste down bilden.

Gasmoleküle in Bewegung

Dr. Alfred Roulier

<pre>If hh=4 Then vx[i]:=-vx[i] : vy[i]:=-vy[i] Elseif hh=3 Then vx[i]=-vx[i] Elseif hh=2 Then vy[i]:=-vy[i] EndIf down[i]:=vy[i]<0 EndFor</pre>	
<pre>For j,2,nstoss</pre>	Gasdynamik starten
<pre>zeit:=5000 For i,1,nball</pre>	unter allen Teilchen die kürzeste Zeit bis zur nächsten Wandkollision suchen
<pre>If not down[i] Then disk:= If disk>0 Then kolt:= EndIf EndIf thit:= For k,1,4 If thit[k]>0 and thit[k]<zeit Then zeit:=thit[k] : wand:=k : ball:=i EndIf EndFor EndFor</pre>	Bei Teilchen i, die nach oben fliegen, zuerst den Zeitpunkt der Kollision mit dem Kolben berechnen thit ist die Liste der Kollisionszeiten mit den Wänden 1 bis 4 Wenn eine kürzere Zeit gefunden wird, die Variablen zeit, wand und ball speichern.
<pre>For i,1,nball xk[i]:=xk[i]+zeit*vx[i] : yk[i]:=yk[i]+zeit*vy[i] EndFor</pre>	Koordinaten aller Teilchen aufdatieren
<pre>hkolb:= vkolb:=vkolb-g*zeit</pre>	Geschwindigkeit und Höhe des Kolben vor dem Stoss berechnen
<pre>kumzeit[j]:=kumzeit[j-1]+zeit ekinball[j]:=ekinball[j-1] If wand=1 Then vx[ball]:=-vx[ball]:xk[ball]:=0 Elseif wand=2 Then vy[ball]:=-vy[ball]:yk[ball]:=0 Elseif wand=3 Then vx[ball]:=-vx[ball]:xk[ball]:=box</pre>	Zeit nachführen ekinball ändert nicht, wenn wand = 1,2 oder 3 Reflexion an Fixwänden durchführen
<pre>Elseif wand=4 Then ekinball[j]:= vkolb1:=vkolb vkolb:= vy[ball]:= yk[ball]:=hkolb ekinball[j]:= down[ball]:=true EndIf epotkolb[j]:=mkolb*g*hkolb ekinkolb[j]:= etot[j]:=epotkolb[j]+ekinkolb[j]+ekinball[j]</pre>	Elastischer Stoss Teilchen – Kolben rechnen
<pre>EndFor</pre>	Schleife über alle Stösse beenden
<pre>Disp "Beginn : V = ",round(box*hkolbstart,3), " T = ",round(, " P = ",round(, " PV/T= ",nball Disp "Ende : V = ",round(, " T = ",round(,3), " P = ",round(" PV/T = ",(</pre>	Ausgabe
<pre>EndPrgm</pre>	

Von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung

Dr. Karl-Heinz Keunecke, Angelika Reiß



Kann der TI-Nspire™ durch Null teilen?

Die Steigung der Tangente eines Funktionsgraphen an einer Stelle wird häufig mithilfe der Sekantensteigung hergeleitet. Häufig geschieht dies an der Normalparabel und mit der Frage nach der Steigung im Punkt (1|1). Dieses Beispiel wird hier ebenfalls wegen seiner Bekanntheit genutzt.

Computeralgebra-Systeme, die zusätzlich über ein dynamisches Geometrie-System verfügen, lassen grafisch-anschauliche Zugänge bei der Visualisierung von Sekanten- und Tangentensteigungen zu.

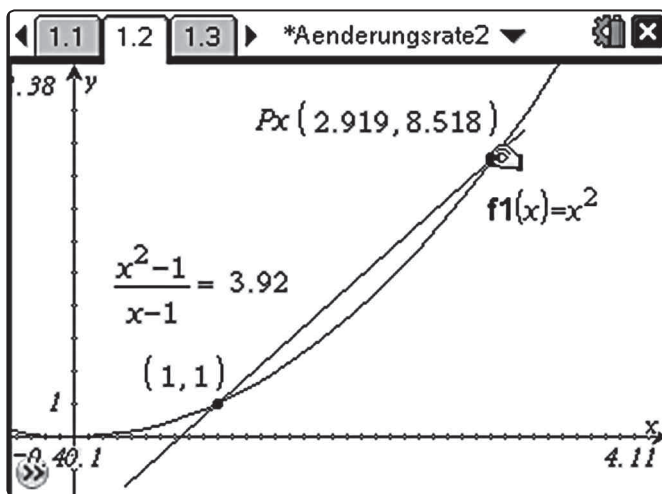


Abb.1: Konstruktion einer Sekante und Berechnung der Steigung

In Abb.1 ist die Normalparabel und eine Sekante durch den festen Punkt P1(1|1) und einen variablen Punkt P2(x | x²) gezeichnet. Die Steigung der Sekante durch die Punkte P1 und P2 kann aus deren Koordinaten berechnet werden.

Verschiebt man mit der Greifhand den Punkt P2 auf der Parabel, so ändert sich durch die dynamische Verknüpfung von Algebra und Geometrie auch die Sekante und deren (berechnete) Steigung. Mit dieser Konstruktion kann der Grenzprozess $x \rightarrow 1$ veranschaulicht werden. Wird der Punkt P2 auf den Punkt P1 gezogen wäre zu erwarten, dass die Steigung nicht mehr berechnet werden kann, weil der Nenner null wird. Enttäuschender Weise zeigt der Rechner, wie in Abb.2 zusehen ist, für diesen Fall (Standardeinstellungen) scheinbar bereits die Tangente und deren Steigung im Punkt P1 an.

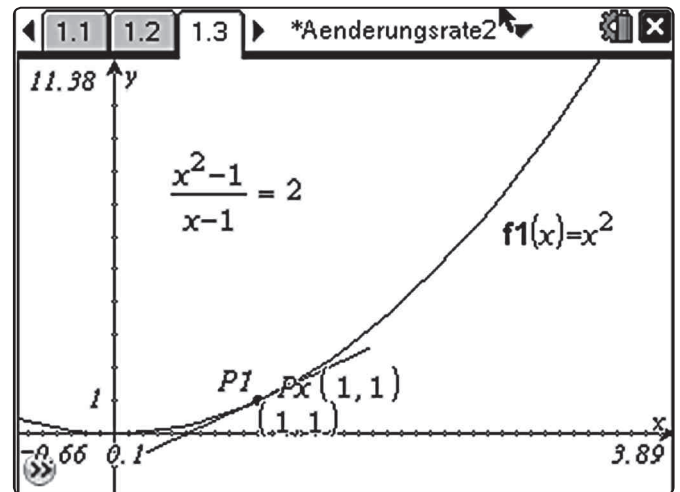


Abb.2: Ziehen des Punktes P2 auf Punkt P1

Damit wird den Schülerinnen und Schülern ein Ergebnis vorgegaukelt und dem Unterricht ein Spannungsmoment genommen. In einer leistungsstarken Lerngruppe könnte hier die Anzeige des Rechners und damit die vermeintliche Division durch Null problematisiert werden. Gemeinsam mit den Lernenden sollte dies - wie unten beschrieben - näher untersucht werden.

Untersucht man diesen Vorgang nämlich etwas genauer, so ist dem Rechner allerdings „kein Vorwurf zu machen“. Für Abb.3 wurde die Zahl der Nachkommastellen um zwei erhöht, außerdem werden die Koordinaten des variablen Punktes P2 angezeigt. Nun ist zu erkennen, dass die Punkte zwar sehr dicht und beieinander liegen, aber nicht gleiche Koordinaten haben. Weiterhin ist zu sehen, dass der berechnete Differenzenquotient doch von der Tangentensteigung an der Stelle $x = 1$ abweicht.

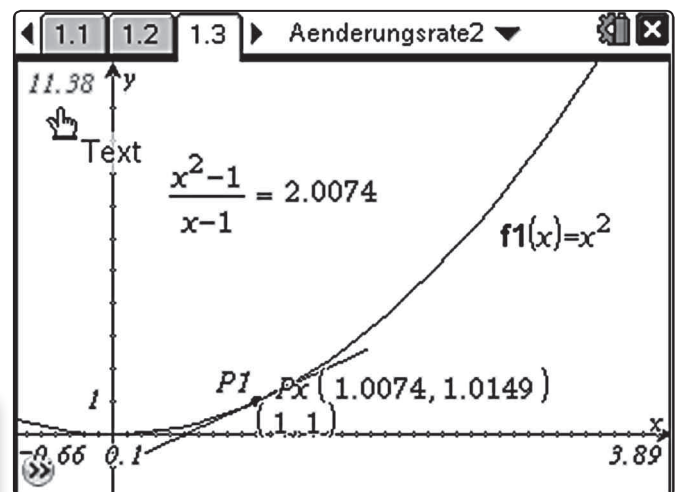


Abb.3: Erhöhung der Anzeigegenauigkeit

Es gelingt auch bei wiederholten Versuchen nicht, die Punkte zur Deckung zu bringen. Der Grund dafür liegt darin, dass die Koordinaten eines Punktes aufgrund der vorgegebenen Pixelzahl des Bildschirms sich nicht kontinuierlich, sondern nur um

Informationen zum Lehrerfortbildungsprojekt T³ finden Sie unter:

www.t3deutschland.de
www.t3oesterreich.at
www.t3schweiz.ch

Von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung

Dr. Karl-Heinz Keunecke, Angelika Reiß

bestimmte Inkremente verändern lassen. Somit kann man die Koordinaten eines vorgegebenen Punktes - z.B. $P_1(1|1)$ - durch Ziehen im Allgemeinen nicht erreichen.

Also kann auf diesem Wege das Problem der Steigung eines Graphen in einem Punkt nicht verdeutlicht werden. Dadurch verliert diese grafische Veranschaulichung ihren Wert im Unterricht, insbesondere bei einer Einführung des allgemeinen Steigungsbegriffs. Aber mithilfe eines Schiebereglers können die beiden Sekantenpunkte P_1 und P_x zur Deckung gebracht und das Verhalten des Differenzenquotienten beobachtet werden. Eine Möglichkeit zur Einrichtung eines Schiebereglers und die Nutzung dieses Werkzeuges im Unterricht wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

Von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung

In Abb.4 wird die Einrichtung des Schiebereglers illustriert. Es ist wiederum die Normalparabel mit dem Punkt $P_1(1|1)$ und zusätzlich der Punkt $(1|0)$ auf der x-Achse dargestellt.

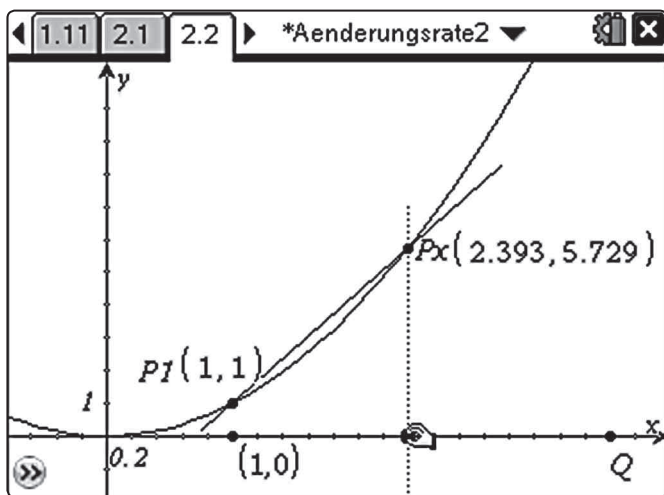


Abb.4: Einrichten eines Schiebereglers auf der x-Achse

Von diesem Punkt aus wird auf der x-Achse eine Strecke mit dem Endpunkt Q gezeichnet. Auf dieser Strecke wird an beliebiger Stelle (aber nicht auf einer der Skalenmarkierungen) ein weiterer Punkt eingetragen, der sich zwischen den Endpunkten der Strecke verschieben lässt. Er wird nun mit dem Parabelpunkt P_x verknüpft, indem die Senkrechte bzgl. der x-Achse durch diesen Punkt konstruiert und deren Schnittpunkt mit der Parabel gezeichnet wird.

Der Punkt auf der x-Achse kann zwischen den Endpunkten der Strecke mit der Greifhand verschoben werden. Mit diesem Schieberegler besteht nun die Möglichkeit P_x auf den Punkt P_1 zu ziehen. Die Einrichtung des Schiebereglers kann von den Schülerinnen und Schülern selbst vorgenommen werden oder eine vorbereitete tns-Datei kann auf die Rechner übertragen werden.

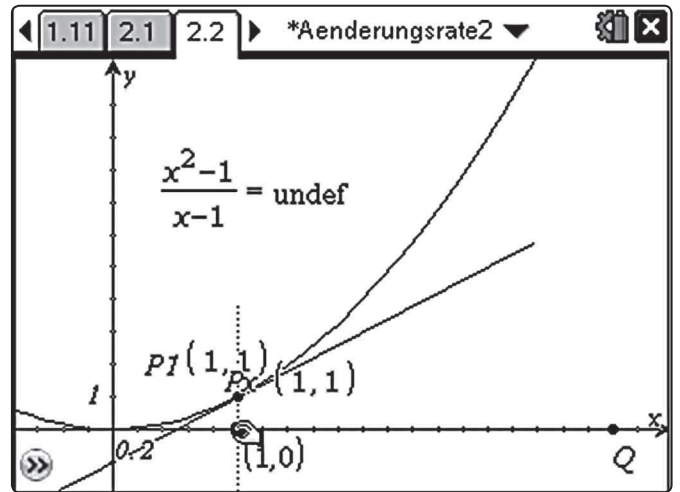


Abb.5: Ziehen von P_x auf P_1

Es ist nun noch erforderlich, die Steigung der Sekante zu bestimmen. Dazu wird der Term für die Steigung zunächst als Text eingegeben. Nach Aufruf des Befehls *Berechnen* wird nach dem Wert von x gefragt. Wenn man den Zeiger auf die x-Koordinate von P_x führt, so wird diese in den Term für x eingesetzt und der Wert der Steigung angezeigt. In Abb. 5 ist der Schieber ganz nach links gezogen worden, so dass $P_1=P_x$ gilt. Nun steht wie zu erwarten ist als Ergebnis hinter dem Differenzenquotienten *undef*, wodurch - wie gewünscht - angezeigt wird, dass der Term für $x=1$ nicht berechnet werden kann.

Jetzt kann das Verhalten der Sekantensteigung in der Nähe des Punktes P_1 genauer untersucht werden. Vergrößert man die Umgebung von P_1 durch Zoomen (Abb.6) und nähert man sich mit P_x soweit wie möglich an, so sind Parabel und Sekante in der Nähe von P_1 nicht mehr zu unterscheiden. Die Sekante ist schon fast zur Tangente geworden und ihre Steigung nähert sich bei der Annäherung immer mehr dem Wert 2.

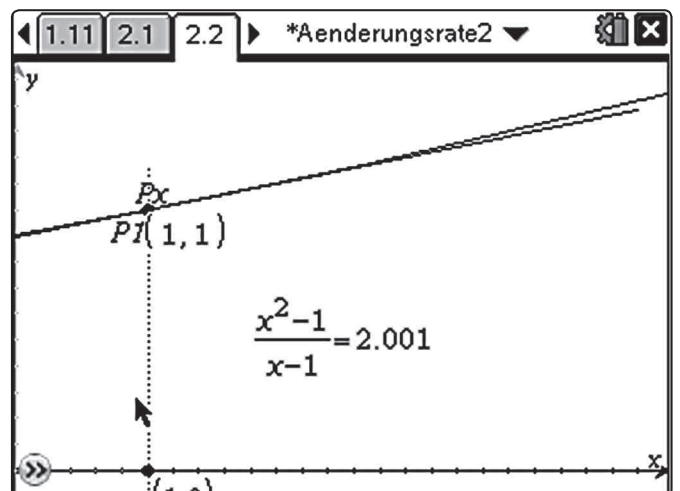


Abb.6: Annäherung von P_x an P_1

Die Schülerinnen und Schüler können diese Untersuchungen nun selbstständig weiterführen, d.h. weitere Annäherungen ausführen und Vermutungen darüber formulieren, wie die Steigung der Tangente sinnvoll zu definieren ist. Diese Überlegun-

gen können auch unterstützt werden, indem die Schülerinnen und Schüler mit Tabellen arbeiten, in denen die Abstände der Punkte und die daraus jeweils resultierende Steigung aufgelistet werden. So können die Schülerinnen und Schüler über unterschiedliche Zugänge - grafisch / anschaulich oder tabellarisch - zum Grenzwertbegriff hingeführt werden. Je nach Lerngruppe wird sich dann das weitere Vorgehen erheblich unterscheiden. Bei der Einführung in die Differentialrechnung wird man sich ggf. mit einer propädeutischen Einführung in den Grenzwertbegriff zufriedengeben; in einem Leistungskurs wird hiermit zum exakten Arbeiten mit Grenzwerten herausgefordert.

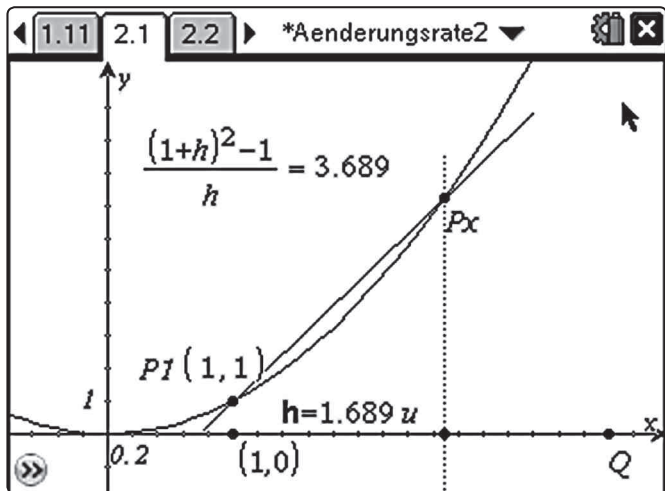


Abb.7: Sekantensteigung als Funktion von $h=1-x$

Im Mathematikunterricht wird der Differenzenquotient häufig in der Form

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{mit } x = x_0 + h$$

betrachtet. Der Wert der neuen Variable h lässt sich, wie man in Abb.7 sieht, als Streckenlänge auf der x -Achse zeigen. Damit werden dann Untersuchungen zu $h \rightarrow 0$ mit $h > 0$ durchgeführt, die zu den gleichen Ergebnissen führen, wie zuvor die zu $x \rightarrow 1$.

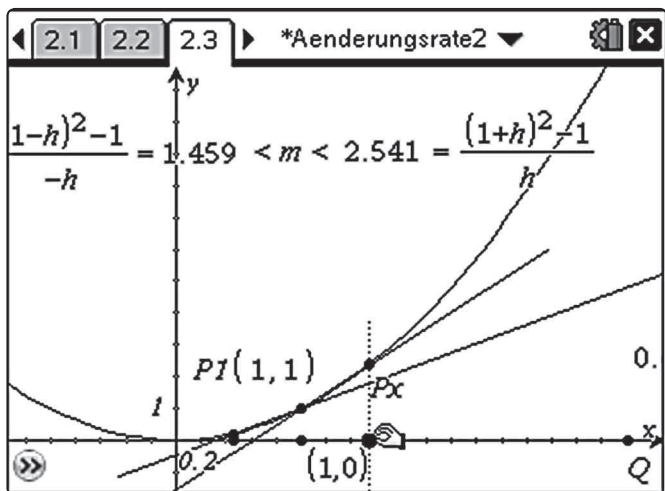


Abb.8: Intervallschachtelung für die Tangentensteigung m

Der Vorteil der Einführung der Variablen h liegt darin, dass man auch die Annäherung von links an P_1 einfach durchführen kann. Es ist nur h durch $-h$ zu ersetzen. Der zugehörige Punkt auf der Parabel hat somit die Koordinaten $(1-h|(1-h)^2)$. Dieser Punkt und die zugehörige Sekante sind in Abb.8 zusätzlich konstruiert worden. Mit dem Schieberegler kann nun eine Intervallschachtelung für die Steigung der Tangente im Punkt P_1 durchgeführt werden.

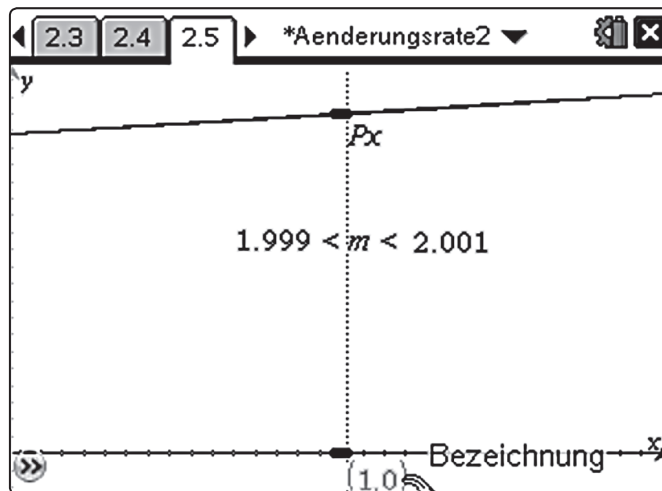


Abb. 9: Schachtelung in der Umgebung des Punktes P_1

In Abb.9 ist eine Umgebung des Punktes P_1 dargestellt. Bei dieser Vergrößerung des Ausschnittes ist kein Unterschied mehr zwischen der Parabel und den beiden Sekanten zu erkennen, deren Steigungen sich nur noch um $2/1000$ unterscheiden. Die Schülerinnen und Schüler können hieraus folgern, dass sich die Tangentensteigung zwar nicht aus den Sekantensteigungen berechnen, sich wohl aber beliebig genau annähern bzw. einschachteln lässt.

Anmerkung

Die tns-Datei kann zusammen mit diesem Artikel aus der Materialdatenbank heruntergeladen werden.

Autoren:

- Dr. Karl-Heinz Keunecke, Altenholz (D)
kh.Keunecke@keukiel.de
- Angelika Reiß, Berlin (D)
reiss-berlin@t-online.de

Messungen mit TI-Nspire™ und EasyLink®:

Der Maximum-Power-Point (MPP) einer Solarzelle

Jürgen Enders



Solarzellen sind elektrische Bauelemente, die Strahlungsenergie (bevorzugt den kurzwelligeren Anteil des Sonnenlichtes) in elektrische Energie umwandeln. Es sind im Prinzip großflächige Halbleiterdioden, bei denen im oberflächennahen pn-Übergang durch den inneren Photoeffekt Ladungsträgerpaare Loch-Elektron erzeugt werden. Einige dieser Ladungsträger rekombinieren wieder, aber der Rest wandert in den n- bzw. p-Halbleiter und kann dort als Strom abgenommen werden. Der hier vorgestellte Versuch kann schon in der Sek. I innerhalb einer Schulstunde durchgeführt werden.

Zwei wichtige Kenngrößen einer Solarzelle sind die Leerlaufspannung (hier: U_0) und der Kurzschlussstrom (hier: I_0). Die Leerlaufspannung wird ohne Lastwiderstand gemessen (im Idealfall bei $I_0 = 0$ A) und beträgt etwa 0,5 V. Sie ist unabhängig von der Lichtstärke der Lichtquelle und von der Größe der Solarzelle. Der Kurzschlussstrom wird gemessen, indem man die Solarzelle kurzschließt (im Idealfall bei $U_0 = 0$ V). Er ist im Gegensatz zur Leerlaufspannung abhängig von der Bestrahlungsstärke, der Solarzellengröße und der Ladungsträgerausbeute des verwendeten Materials.

Betreibt man eine Solarzelle mit ihrer Leerlaufspannung bzw. ihrem Kurzschlussstrom, so ist die Leistung $P = U \cdot I$ in beiden Fällen 0 W. Dazwischen hat sie ein Maximum, den Maximum-Power-Point (MPP). Im praktischen Betrieb wird man die Solarzelle möglichst dicht oder sogar genau auf diesem MPP betreiben, da sie dort naturgemäß den größten Wirkungsgrad hat.

Im vorliegenden Versuch soll der MPP bestimmt werden. Dazu wird die Solarzelle mit einer Lichtquelle gleichmäßig bestrahlt, und es werden verschiedene Lastwiderstände angeschlossen. Man sieht an der Messung sehr schön, dass die Stromstärke bis hin zu etwa 0,3 V nahezu konstant bleibt, ab 0,4 V jedoch rapide und nahezu linear abfällt.

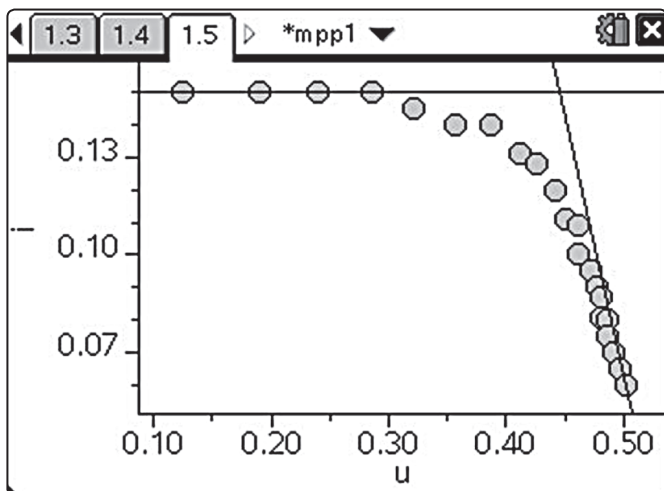


Abb. 1: Lastkennlinie

Diese Bereiche sind durch zwei Geraden markiert, deren Schnittpunkte mit den Achsen den Kurzschlussstrom (Hochachse) bzw. die Leerlaufspannung (Rechtsachse) ergeben.

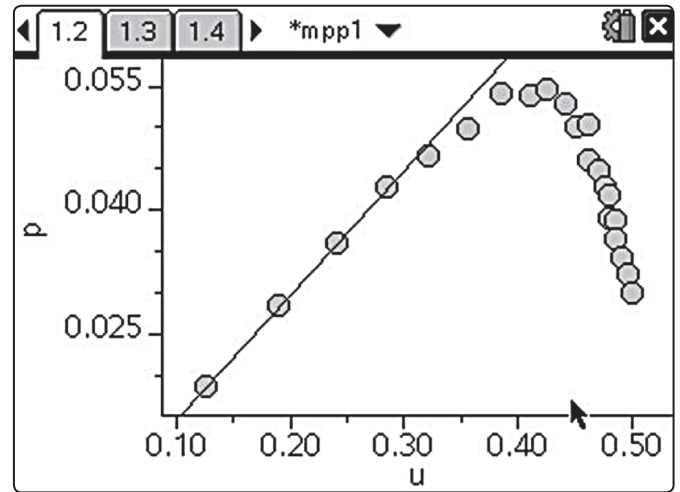


Abb. 2: P-U Kennlinie

Stellt man die Leistung gegen die Spannung dar, so ist der nahezu lineare Anstieg der Leistung bei kleinen Spannungen (verdeutlicht durch die eingezeichnete Gerade) ebenso gut zu sehen wie der rapide Leistungsabfall bei höheren Spannungen. Der MPP ist bei ca. 0,41 V erreicht.

Versuchsdurchführung

Es eignen sich Solarzellen verschiedener Bauart; Abb.4 zeigt eine kleine Auswahl davon. Als Lichtquelle hat sich eine Halogenlampe bewährt. Das Messgerät ist ein Vielfachmessgerät wie es auch in Schülerübungen Verwendung findet.

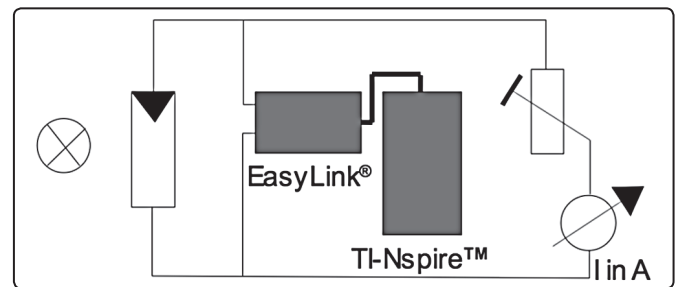


Abb. 3: Schaltskizze

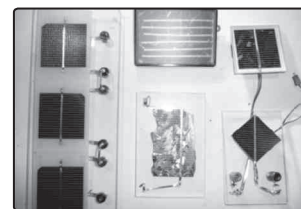


Abb. 4: verschiedene Solarzellen

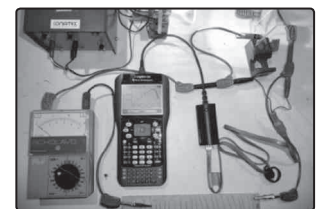


Abb. 5: Versuchsaufbau

Beim Aufbau nach Abb.5 sind Lampe und Solarzelle in Muffen festgeklemmt und einfach auf den Tisch gestellt worden. Die Entfernung Lampe-Solarzelle sollte so eingestellt werden, dass der Kurzschlussstrom etwa 150 mA beträgt (s.u.).

Es ist praktisch, wenn man die Messung mit dem Lastwiderstand 0Ω beginnt und die Spannung U und die Stromstärke I misst. Zu jedem Lastwiderstand werden die Spannung U und die Stromstärke I gemessen. Für die Messung der Stromstärke wird ein handelsübliches Amperemeter verwendet; die Spannung wird mit dem EasyLink® und dem TI-Nspire™ gemessen.

Die Aufnahme der Messwerte erfolgt dabei in der Applikation „Data&Statistics“ im Modus „Ereignisse mit Eintrag“. Soll eine Messung durchgeführt werden, so drückt man ENTER, wodurch der Spannungswert gehalten wird. Im erscheinenden Fenster muss dann die Stromstärke per Hand eingetragen werden. Jetzt vergrößert man den Widerstand und nimmt einen neuen Messwert auf. Am Ende der Messreihe muss man das Experiment mit dem Button unten links auf dem Display stoppen.

Hinweise

Das Experiment lässt sich mit vielen, auch mehrzelligen Solarzellen durchführen. Die Messbeispiele beziehen sich allerdings auf eine einzelne Zelle. Dabei hat sich wegen des schlechten Innenwiderstandes des verwendeten Messinstrumentes ein Kurzschlussstrom von ca. 150 mA als sinnvoll erwiesen. Dieser Strom kann von den gezeigten Solarzellen gut erzeugt werden. Die Beleuchtung ist unproblematisch; hier eignen sich alle Arten von Halogen- und Experimentierleuchten, auch der OHP und die Sonne.

Kritisch ist der Widerstand, denn er sollte im Bereich von 0 bis 10Ω fein einstellbar sein. Dreh- und Schiebewiderstände haben sich als ungeeignet erwiesen, gut geeignet ist hingegen eine Widerstandskaskade. Da es aber auf den genauen Widerstandswert nicht ankommt, kann man auch einen einfachen Widerstandsdraht verwenden. In der einfachsten Form wickelt man ca. 2 m Konstantandraht (ca. 10Ω) auf einen Holz- oder Pappstreifen (25 cm x 3 cm) und führt die Drahtenden durch kleine Löcher, um ein Abwickeln zu vermeiden. Man kann dann mit Krokodilklemmen den Widerstandswert gut abgreifen.

Die Messungen wurden alle mit dem Widerstand aus Abb.5 sowie der Solarzelle in Abb.4 unten rechts durchgeführt. Die Greifklemmen des Spannungssensors sind unpraktisch, man kann sie abschneiden und durch handelsübliche Stecker ersetzen.

Auswertung

Zur Bestimmung des MPP muss man zunächst die Messwerte in die Applikation „Lists & Spreadsheets“ in die Spalten A (Spannung) und B (Strom) übertragen. Dann kann man in der Spalte C die Leistung als Produkt aus A und B errechnen lassen. Abb.6 zeigt die entsprechende Tabelle. Anschließend kann man sich P in Abhängigkeit von U darstellen lassen und den MPP näherungsweise grafisch bestimmen. Dazu muss man in der Grafik aus „Data&Statistics“ lediglich die Achsen umbenennen.

A	B	C	D
u	i	p	
1	0.125122	0.15	0.018768
2	0.19043	0.15	0.028564
3	0.240479	0.15	0.036072
4	0.285645	0.15	0.042847
5	0.32074	0.145	0.046507

C1 = 0.01876831129266

Abb. 6: Tabelle

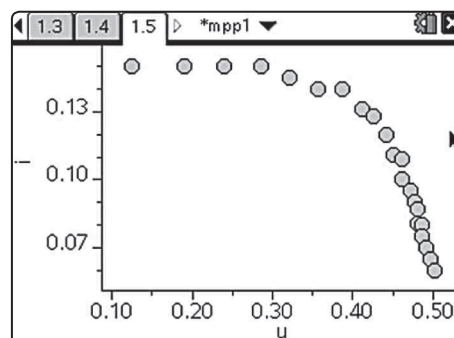


Abb. 7: Lastkennlinie

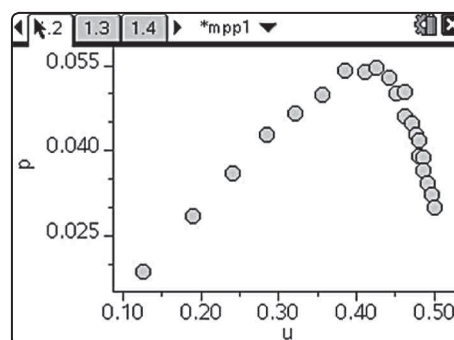


Abb. 8: P-U Kennlinie

Man findet den MPP bei ca. 0,41 V. Die Leistung beträgt dann ca. 0,055 W. Dazu verschiebt man den Cursor auf dem Display und drückt im Maximum auf das Touchpad, um sich die Koordinaten anzeigen zu lassen.

Bei 0,36 V beträgt die Leistung 0,051 W, bei 0,46 V beträgt sie 0,048 W. Es ist also besser, die Solarzelle bei einem zu kleinen Lastwiderstand zu betreiben als bei einem zu großen, da die Leistung besser ausgenutzt wird. Das wird auch bei der Lastkennlinie deutlich, denn 0,36 V liegt fast noch im waagerechten Teil der Kennlinie.

Die vollständige Versuchsbeschreibung mit dem Schülerarbeitsblatt und der Auswertung finden Sie wie viele weitere Versuche unter www.ti-unterrichtsmaterialien.net (bei Projekte/Verlage die Rubrik **T³-Physik** wählen).

Autor:

Jürgen Enders, Hameln (D)
Humboldt-Gymnasium Bad Pyrmont
aj.enders@t-online.de

Tipps und Tricks

Press-to-Test für den TI-84 Plus

Katrin Eilers



Für die TI-84 Plus Familie steht ab dem Betriebssystem 2.40¹ der Press-to-Test Modus zur Verfügung. Dieser Modus ermöglicht den Reset des GTR und die Deaktivierung der Programme und Applikationen (Ausnahme: Finance). Im Unterschied zum üblichen Reset werden die Programme und Applikationen aber nur deaktiviert und stehen nach einer Reaktivierung wieder zur Verfügung. Leider wird durch diese Funktion aber auch Catalog Help deaktiviert. Für die Reaktivierung ist ein zweiter TI-84 Plus notwendig.

Aktivierung

Für die Aktivierung muss der TI-84 Plus zunächst ausgeschaltet sein. In diesem Zustand werden die Pfeiltasten links und rechts und die **ON**-Taste gleichzeitig gedrückt. Der GTR zeigt nun den Bildschirm mit den Reset Optionen an. In der angezeigten Grunddarstellung befindet sich der Rechner z.B. im Degree Modus, Stat Diagnostics ist eingeschaltet. Entsprechendes ist über die Pfeiltasten und der Betätigung mit der Enter-Taste zu ändern. Die Bestätigung, dass man mit diesen Einstellungen den Press-to-Test Modus starten möchte, erfolgt über die Bestätigung mit OK (Zoom-Taste). Es folgt die Meldung „Reset Complete“ mit den gewählten Einstellungen.

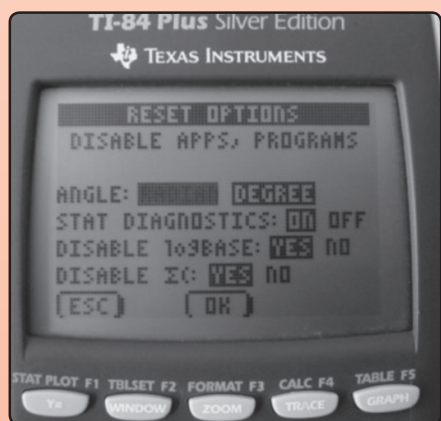


Abb. 1

Press-to-Test Modus

Verwendet man den TI-84 Plus im Press-to-Test Modus so lässt sich feststellen, dass die Programme und Applikationen deaktiviert sind und nicht angezeigt werden (Abb. 2 und Abb. 3).



Abb.2

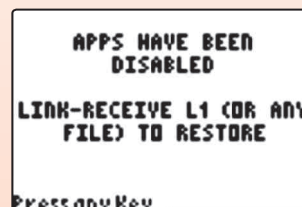


Abb.3

Reaktivierung

Zur Reaktivierung ist ein zweiter TI-84 Plus notwendig. Mithilfe dieses Gerätes sendet man die Liste L1 (Inhalt ist nicht wichtig) an das deaktivierte Gerät. Dafür muss das Empfängergerät zuvor auf Receive gestellt sein. Dies erfolgt über 2nd Link (Receive, ENTER). Das Senden der Liste L1 erfolgt ebenfalls über 2nd LINK (Send, List auswählen). Es muss die Liste L1 mit ENTER markiert werden und anschließend über Transmit verschickt werden. Auf dem gesperrten GTR muss nun nur noch Overwrite bestätigt werden. Dem Nutzer stehen jetzt wieder alle Programme und Applikationen zur Verfügung.

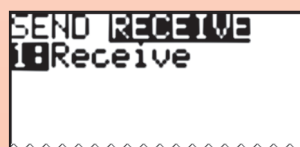


Abb 4: Empfängergerät



Abb 5: Zweiter GTR sendet Liste L1

¹ Ab dem Betriebssystem 2.55MP wird unter Reset Options zusätzlich abgefragt, ob die Berechnung des Logarithmus zu einer beliebigen Basis sowie die Berechnung einer Summe erlaubt sein soll oder nicht (siehe Abb.1).

Autor:

Katrin Eilers, Hannover (D)
keilers@vr-web.de

(Noch) mehr Leistung für Ihren Rechner – mit dem aktuellen Betriebssystem

Aktualisieren Sie Ihren Rechner mit der neuesten Version des Betriebssystems. Nutzen Sie die kostenlose Upgrade-Möglichkeit auf den TI-Webseiten im Bereich „Downloads“.

Graphikrechnermodell	Aktuelle Betriebssystem-Version
TI-83 Plus	1.19
TI-84 Plus/TI-84 Plus Silver Edition	2.55 MP – NEU!
TI-89 Titanium	3.10
Voyage™ 200	3.10
TI-Nspire™	3.0 – NEU!
TI-Nspire™ CAS	3.0 – NEU!

Service auf einen Blick

Innovative Technologie

Dank der Technologie unserer aktuellen Graphikrechner TI-84 Plus, TI-84 Plus Silver Edition, TI-89 Titanium, Voyage™ 200, TI-Nspire™ (mit Touchpad), TI-Nspire™ CAS (mit Touchpad) und den neuen TI-Nspire™ CX Modellen können Sie die bestehenden Fähigkeiten der Rechner durch Herunterladen zusätzlicher Applikationen und/oder Upgrades erweitern und Ihren persönlichen Wünschen anpassen. Damit halten Sie sich alle Optionen für die Zukunft offen.

Kostenlose Ausleihe

Sie möchten einen TI-Graphikrechner oder ein Computeralgebrasystem testen? – Kein Problem! Wir leihen Ihnen Einzel-exemplare oder Klassensätze bis zu vier Wochen – kostenlos und unverbindlich!

Unterrichtsmaterialien

Neben den „TI-Nachrichten“ gibt es eine Fülle von begleitenden Unterrichtsmaterialien zum Einsatz unserer Produkte – insbesondere auch von Schulbuchverlagen, hier eine Auswahl von TI und T³:

- **CuBaLibra:** Einfache, gut strukturierte Aufgaben: Stoff für eine Unterrichtsstunde.
- **MMM:** Kurze Beispiele für alltäglich benötigte Veranschaulichungen, die Umsetzung wird mittels Kurzvideos erklärt.
- **T³ Akzente:** Aufgaben mittlerer Komplexität mit Schülerarbeitsblättern und didaktischen Hinweisen.

Mehr Informationen, kostenlose Downloads sowie die Anmelde-möglichkeit zum E-Newsletter „TI-Materialien“ finden Sie auf den TI-Webseiten oder unter: www.ti-unterrichtsmaterialien.net

Lehrerfortbildungen

Graphikrechner und CAS sind für viele Kolleginnen und Kollegen neu und unbekannt. Wir helfen Ihnen mit Fortbildungen an Ihrer Schule oder auf Veranstaltungen! Wenden Sie sich direkt an T³. Mehr Informationen zu T³ finden Sie im Internet:

T³ Deutschland: www.t3deutschland.de

T³ Österreich: www.t3oesterreich.at

T³ Schweiz: www.t3schweiz.ch

Oder kontaktieren Sie Ihren TI-Schulberater sowie unser Customer Service Team.

Praktische Präsentationsmöglichkeiten

Projizieren Sie das Display der Lehrerversion Ihres TI-Graphikrechners mit ViewScreen™, Overheadprojektor, Beamer oder auch am Whiteboard.

Flexible Verbindungsmöglichkeiten

Die Verbindungskabel zu den TI-Graphikrechnern und Computeralgebrasystemen ermöglichen eine schnelle und stabile Verbindung zum PC oder Mac.

Unkomplizierte Messwerterfassung

Portable, universell einsetzbare Messwerterfassungssysteme für den naturwissenschaftlichen Unterricht. Verschiedene Sensoren erhältlich.

Allgemeine Informationen

Nehmen Sie mit unserem Customer Service Center Kontakt auf, wenn Sie technische Auskünfte benötigen oder Fragen zum Gebrauch unserer Rechner oder bezüglich einer Lehrerfortbildung haben. Auch zum Ausleihen der Rechner ist das CSC die erste Adresse:

Wir sind für Sie da:



Texas Instruments

Customer Service Center

Tel: 00 800 - 48 42 27 37 (Anruf kostenlos)

Fax: 00 420 - 2 26 22 17 99

Allgemeine Informationen:

ti-cares@ti.com

Kostenlose Ausleihe von Graphikrechnern und Computeralgebrasystemen:

ti-loan@ti.com

Kostenloses Abonnement der TI-Nachrichten:

ti-nachrichten@ti.com

Garantie

Auf alle Graphikrechner und Computeralgebrasysteme von Texas Instruments bietet Texas Instruments 3 Jahre Herstellergarantie. Sollte doch einmal etwas defekt sein, rufen Sie bitte zunächst unser Customer Service Center an. Oft kann das Problem bereits am Telefon behoben werden.

education.ti.com/deutschland • education.ti.com/oesterreich • education.ti.com/schweiz
ti-cares@ti.com