Loi binomiale et seuil

Enoncé

Anne s'entraine régulièrement au tir à l'arc. Elle a remarqué que la probabilité de tirer dans le centre jaune de la cible (on dira aussi tirer dans le mille) est de 0,19 en toute circonstance.
Soit n le nombre de flèches lancées par Anne et X_n la variable aléatoire donnant le nombre de flèches qui ont atteint le centre jaune de la cible.

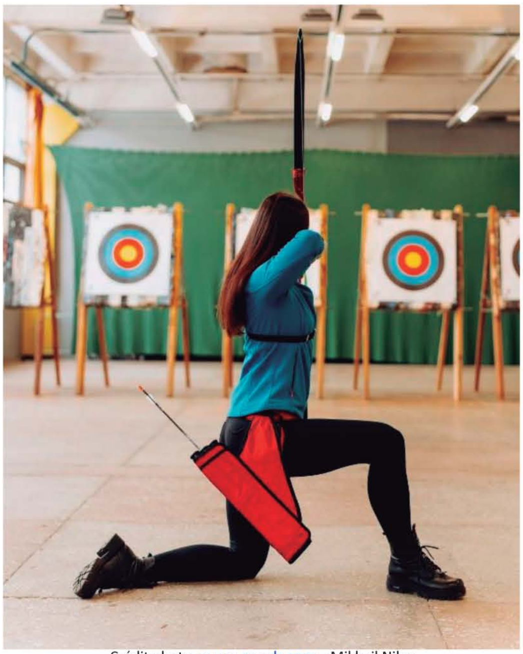
1. Quelle loi suit X_n ? Donner ses paramètres.

2. Dans cette question $n = 3$, c'est-à-dire qu'Anne tire 3 flèches. Calculer les probabilités des événements suivants (à 10^{-3} près) :
   a. Tirer dans le mille 3 fois.
   b. Ne jamais tirer dans le mille.
   c. Tirer dans le mille 1 fois exactement.

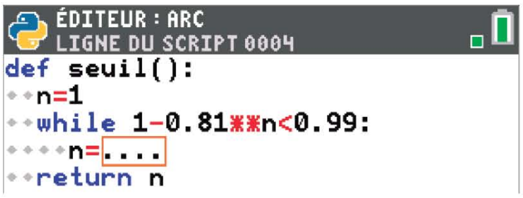
3. Lors des n lancers on note : E_n l'événement « Anne n'a jamais tiré dans le mille » et F_n ; « Anne a tiré au moins une fois dans le mille ». Exprimer E_n et F_n à l'aide de X_n et calculer $p(E_n)$ et $p(F_n)$.

4. Représenter graphiquement le nuage de points $(n, p(F_n))$, $1 \leq n \leq 10$. Quelle tendance semble suivre ce nuage ?

5. Compléter le script Python **seuil**, qui renvoie la plus petite valeur de n telle que $p(F_n) \geq 0{,}99$. Lancer cette fonction. Quelle valeur obtient-on ?



Crédit photo : www.pexels.com – Mikhail Nilov



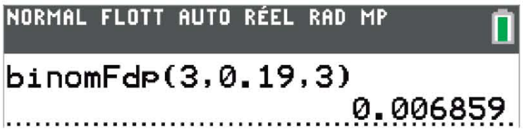
1. Loi de X_n

Nous sommes en présence d'une expérience aléatoire à deux issues possibles : Tirer dans le mille ou son contraire (loi de Bernoulli) qu'on répète n fois de suite de façon indépendante. Ainsi X_n le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de fois où Anne vise dans le mille lors des n lancers, suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}19$.

2. Etude de X_3

a. L'événement « tirer dans le mille 3 fois » correspond à $X_3 = 3$.

Pour calculer cette probabilité on appuie sur 2nde var (distrib), puis sélectionner **binomFdp**. On complète la boite de dialogue par les valeurs de n et p puis la valeur de X recherchée qui est 3 ici.
Ici on obtient $p(X_3 = 3) \approx 0{,}007$ à 10^{-3} près.



L'événement « ne jamais tirer dans le mille» correspond à $X_3 = 0$.
On trouve $p(X_3 = 0) \approx 0{,}531$ à 10^{-3} près.

L'événement « tirer dans le mille 1 fois exactement» correspond à $X_3 = 1$.
On a donc $p(X_3 = 1) \approx 0{,}374$ à 10^{-3} près.

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
binomFdp(3,0.19,0)
                        0.531441
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
binomFdp(3,0.19,1)
                        0.373977
```

3. Calcul de $p(E_n)$ et $p(F_n)$

L'événement E_n correspond à $X_n = 0$.
On a $p(E_n) = p(X_n = 0) = (1 - 0{,}19)^n = 0{,}81^n$.

L'événement F_n correspond à $\overline{E_n}$.
On a $p(F_n) = p(\overline{E_n}) = 1 - p(E_n) = 1 - 0{,}81^n$.

4. Graphique $(n, p(F_n))$

On appuie sur stats pour modifier les listes. Dans la liste **L₁** on entre les valeurs de n de 1 à 10.

Dans **L₂** on entrera les probabilités $p(F_n)$ pour les valeurs de k définies dans **L₁**. On entre donc tout en haut de liste **L₂** : `L2=1-0.81^L1`

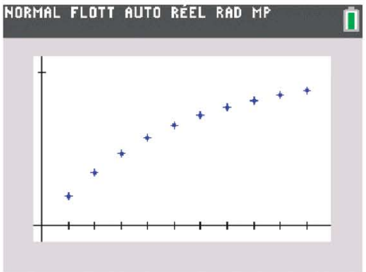
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP

L1	L2	L3	L4	L5
1	0.19	------	------	------
2	0.3439			
3	0.4686			
4	0.5695			
5	0.6513			
6	0.7176			
7	0.7712			
8	0.8147			
9	0.8499			
10	0.8784			

`L2=1-0.81^L1`

Pour afficher le nuage de points : 2nde f(x) (graph stats) puis zoom 9

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
Graph1 Graph2 Graph3
Aff NAff
Type:
Xliste :L1
Yliste :L2
Marque :
Couleur: BLEU
```



On constate que les valeurs de $p(F_n)$ semblent se rapprocher de 1 lorsque n augmente.

5. Fonction `seuil`

A chaque tour de boucle il faut augmenter la valeur de **n** jusqu'à obtenir la valeur qui dépasse 0,99 et qui arrête la boucle.

```
ÉDITEUR : ARC
LIGNE DU SCRIPT 0001
def seuil():
  n=1
  while 1-0.81**n<0.99:
    n=n+1
  return n
```

On trouve qu'à partir de **n=22** la probabilité $p(F_n)$ dépasse 0,99. On vérifie ce résultat en console.

```
PYTHON SHELL
>>> # Shell Reinitialized
>>> # L'exécution de ARC
>>> from ARC import *
>>> seuil()
22
>>> 1-0.81**21
0.9880274848174381
>>> 1-0.81**22
0.9903022627021247
>>> |
Fns… | a A # | Outils | Éditer | Script
```