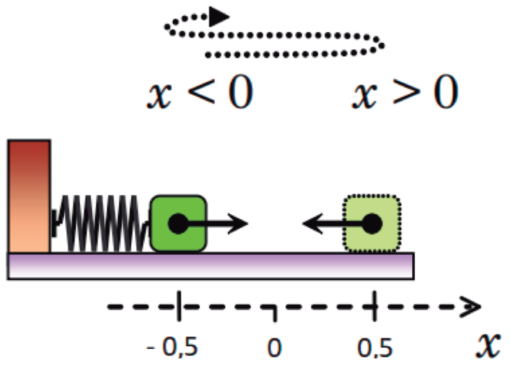
Fonction trigonométrique

Enoncé

On s'intéresse aux oscillations horizontales d'un objet autour de sa position d'origine, en fonction du temps. Ces oscillations sont créées par un ressort attaché à l'objet, et fixé à un support, ainsi qu'à une modification de la position d'origine. Les frottements sont négligés.



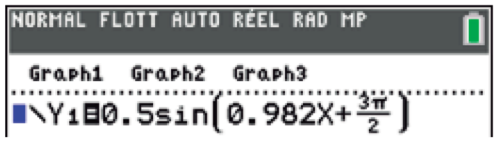
La position du centre de gravité de l'objet, selon l'axe x, en mètres, est donné par la fonction trigonométrique :

$x(t) = 0{,}5 \times \sin\left(0{,}982t + \frac{3\pi}{2}\right)$, où t est exprimée en secondes (s).

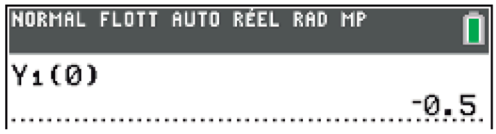
1. Déterminer $x(0)$ et interpréter ce résultat dans le cadre de l'expérience.
2. Déterminer le temps t_0 que met l'objet à retrouver, pour la première fois, sa position d'équilibre, c.à.d. tel que $x(t_0) = 0$.
3. A l'aide de votre calculatrice, conjecturer le nombre de fois où l'objet repasse par sa position d'équilibre pendant les 39 premières secondes de l'expérience. Démontrer cette conjecture.

1. Position initiale

Pour conjecturer la réponse, on peut effectuer un simple calcul sur la calculatrice, mais la lecture complète de l'énoncé nous suggère d'utiliser la fonction trigonométrique $x(t)$. Dans le menu [f(x)], on saisit ainsi l'expression de la fonction dans **Y₁**.



On appuie sur [2nde] [mode] (quitter) pour revenir à l'écran de calcul. Ensuite, on appuie sur [var] puis, dans le menu **VAR Y**, on sélectionne **1:Fonction…** et enfin **1:Y₁**. On complète notre saisie pour calculer **Y1(0)** et on valide par [entrer] .



On démontre ensuite notre conjecture :

$$x(0) = 0{,}5 \times \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0{,}5 \times (-1) = -0{,}5$$

La position initiale de l'objet, au moment $t = 0$ où l'on lâche l'objet, est située à $-0{,}5$ m sur l'axe x.

2. Détermination de t_0

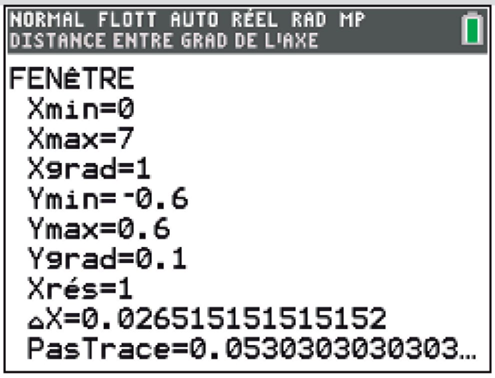
La représentation graphique de la fonction x est sûrement le meilleur moyen de visualiser la réponse à cette question.

Pour nous aider à représenter cette fonction, il est utile de rappeler ici le vocabulaire du cours :

- $A = 0{,}5$ est l'amplitude de cette fonction, qui va donc osciller entre $-0{,}5$ m et $+0{,}5$ m ;
- $\omega = 0{,}982$ est la pulsation, exprimée en $rad.s^{-1}$;
- $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 6{,}4\ secondes$ est la période de la fonction ;
- $0{,}982t + \frac{3\pi}{2}$ est la phase instantanée, en radians ; $\frac{3\pi}{2}$ est la phase à l'origine, en radians également.

Fonction trigonométrique

Dans le menu fenêtre, on saisit ainsi les valeurs minimales et maximales de nos axes, ainsi que les graduations.



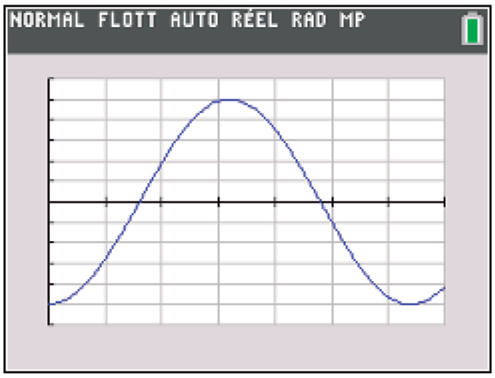
- Pour l'axe des abscisses et notre variable t en secondes, on prend

  `Xmin=0,    Xmax=7,    Xgrad=1`

- Pour l'axe des ordonnées et notre variable x en mètres, on prend

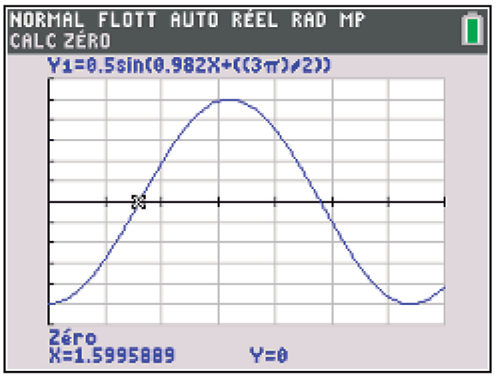
  `Ymin=-0.6,    Ymax=0.6,    Ygrad=0.1`

On appuie alors sur la touche graphe et on visualise notre fonction trigonométrique.



Pour conjecturer la 1ère racine de $x(t)$, dans le menu 2nde trace (calculs f4), on sélectionne la commande **2:racine**. On effectue alors la procédure :

- On place le curseur à gauche de la racine recherchée et on valide par entrer.
- On fait de même en plaçant le curseur à droite de la racine.
- On valide une dernière fois par entrer .



On obtient ainsi la valeur approchée $t_0 \approx 1{,}6$.

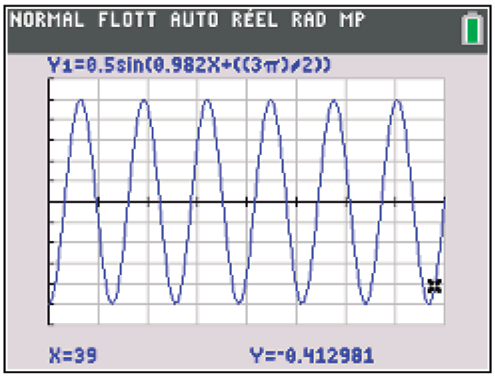
Puisqu'on commence à $t = 0$, le sinus s'annule une 1ère fois pour :

$$0{,}982 t_0 + \frac{3\pi}{2} = 2\pi \Leftrightarrow 0{,}982 t_0 = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t_0 = \frac{\pi}{2 \times 0{,}982} \approx 1{,}6 \;\; s$$

3. Nombre de passages

Dans cette question, on commence par changer notre fenêtre graphique, dans le menu fenêtre : `Xmax=40,    Xgrad=5`

On appuie sur graphe et on peut conjecturer le résultat : l'objet repasse ainsi 12 par sa position d'équilibre lors des 39 premières secondes.



Vérification :

- $\frac{39}{T} \approx 6{,}1$: Lors des 39 secondes, l'objet effectue un peu plus de 6 périodes.
- Lors d'une période, l'objet passe 2 fois par sa position d'équilibre.
- $6 \times 2 = 12$ et on retrouve bien le résultat conjecturé graphiquement.