Comparaison suite arithmétique et suite géométrique

TI-82 Advanced Edition Python

TI-83 Premium CE Edition Python

Enoncé

Anne et Bastien comparent les étrennes qu'ils reçoivent chaque année. En 2020, Anne a reçu 80€ et Bastien 100€. Chaque année, les étrennes d'Anne augmentent de 6€ et celles de Bastien de 3 %. Pour tout entier n, on note u_n et v_n les étrennes reçues par Anne et Bastien l'année $2020 + n$.
On a donc $u_0 = 80$ et $v_0 = 100$.

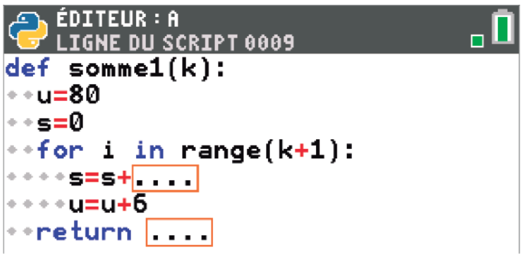
Crédit photo : www.pexels.com - Lisa

1. a. Calculer les étrennes qu'ont reçues Anne et Bastien en 2021, puis en 2022.
   b. Donner la nature de la suite (u_n). En déduire u_n en fonction de n.
   c. Donner la nature de la suite (v_n). En déduire v_n en fonction de n.

2. Représenter graphiquement ces deux suites et déterminer en quelle année Anne reçoit pour la première fois davantage que Bastien. Bastien recevra-t-il alors toujours moins qu'Anne ?

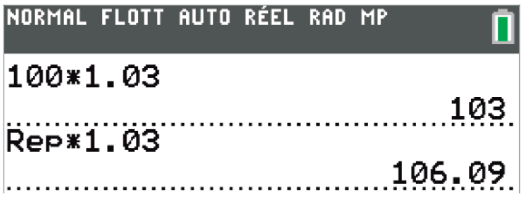
3. On note S_n et T_n la somme des étrennes reçues per Anne et Bastien de l'année 2020 jusqu'à l'année $2020 + n$.
On a donc $S_n = u_0 + u_1 + \ldots. + u_n$ et $T_n = v_0 + v_1 + \ldots. + v_n$.
Calculer S_{15} et T_{15}.

4. Compléter la fonction **somme1** écrite en Python ci-contre qui prend comme argument k et qui renvoie S_k. Exécuter la fonction et vérifier le calcul de S_{15} précédent. Ecrire une fonction **somme2** qui prend comme argument k et qui renvoie T_k puis exécuter la fonction et vérifier le calcul de T_{15} précédent.



1.a. Les étrennes en 2021

Chaque année les étrennes d'Anne augmentent de 6€, elle va donc recevoir en 2021 $u_1 = 80 + 6 = 86$ et $u_2 = u_1 + 6$ donc $u_2 = 92$.
Celles de Bastien augmentent de 3%. Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 3% est 1,03. Donc $v_1 = 100 \times 1{,}03 = 103$ et
$v_2 = v_1 \times 1{,}03 = 106{,}09$.



1.b. Nature de la suite (u_n)

On sait que chaque année les étrennes d'Anne augmentent de 6€. Donc pour passer d'un terme u_n de la suite, au terme u_{n+1} suivant, on ajoutera 6.

Ainsi pour tout entier n on a $u_{n+1} = u_n + 6$. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 6$ et de premier terme $u_0 = 80$. D'après le cours on a :
Pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 + nr$ donc $u_n = 80 + 6n$.

1.c. Nature de la suite (v_n)

Les étrennes de Bastien augmentent de 3%. Donc pour passer d'un terme v_n de la suite, au terme v_{n+1} suivant, on multiplie par $1{,}03$.

Donc pour tout entier n on a $v_{n+1} = 1{,}03 v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}03$ et de premier terme $v_0 = 100$. D'après le cours on a :
$v_n = v_0 \times q^n$ donc $v_n = 100 \times 1{,}03^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Thème: Suites numériques

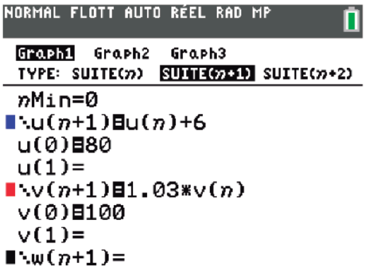
Comparaison suite arithmétique et suite géométrique

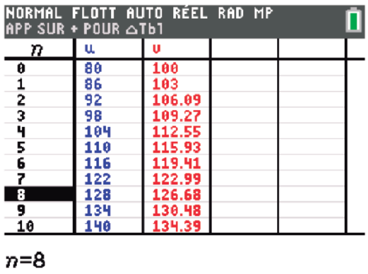
TI-82 Advanced Edition Python

TI-83 Premium CE Edition Python

2. Représentation graphique

Pour saisir une suite il faut d'abord appuyer sur mode puis sélectionner **SUITE**. Puis dans f(x) sélectionner **SUITE(n+1)** pour une suite définie par récurrence.

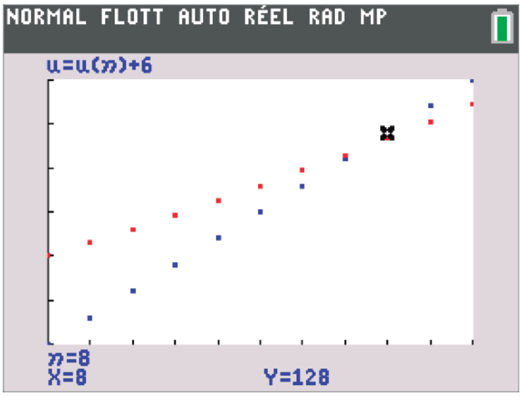


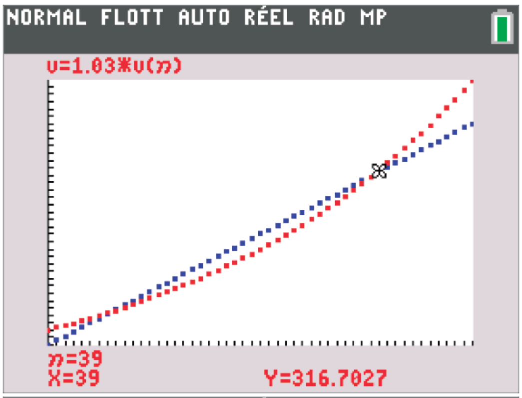


n	u	v
0	80	100
1	86	103
2	92	106.09
3	98	109.27
4	104	112.55
5	110	115.93
6	116	119.41
7	122	122.99
8	128	126.68
9	134	130.48
10	140	134.39

Pour obtenir une fenêtre adéquate, appuyer sur zoom 0.
En appuyant sur trace à l'aide des flèches de direction, on constate qu'Anne va toucher plus que Bastien à partir de $n = 8$ soit en 2028. On peut le vérifier à l'aide du tableau de valeurs en appuyant sur 2nde graphe (table f5).

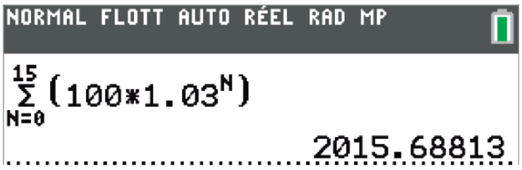
En modifiant la fenêtre (touche fenêtre) on constate que Bastien touche à nouveau plus qu'Anne à partir de $n = 39$, soit en 2059.





3. Calculs de sommes

(u_n) est une suite arithmétique donc d'après le cours : pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0+u_n}{2}$ donc $S_{15} = 16 \times \frac{u_0+u_{15}}{2}$
On sait que $u_0 = 80$ et d'après 1.b. $u_{15} = 80 + 15 \times 6 = 170$ donc
$S_{15} = 16 \times \frac{80+170}{2} = 2000$. On peut vérifier ce calcul avec le symbole Σ de notre calculatrice accessible en appuyant sur 2nde (fraction).
(v_n) est une suite géométrique donc d'après le cours :
$T_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n = v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ donc $T_{15} = 100 \times \frac{1-1{,}03^{16}}{1-1{,}03} \approx 2015{,}69$.
Vérifions ce résultat à l'aide de notre calculatrice :



4. Somme et Python

On complète la ligne **s=s+u** pour ajouter la valeur courante de **u** à la variable **s** à chaque tour de boucle. Puis on termine en renvoyant la valeur de **s**.
La fonction **somme2** est semblable à la fonction **somme1**. Il faut juste changer la valeur initiale de la suite (**v=100**) et le calcul de la nouvelle valeur de **v** (**v=v*1.03**). En exécutant les deux fonctions on retrouve bien les résultats de la question précédente.