2. Die Ableitung einer Funktion an einer Stelle

2.1 Überblick

„Was geschieht mit dem Funktionswert f(x), wenn sich x *‚ein bisschen'* ändert?" Die Antwort bei einem konkreten Beispiel könnte sein: „Wenn sich x ‚ein bisschen' ändert, ändert sich f(x) 3-mal so stark wie x." Dieser Zugang führt zum Begriff der *Ableitung*, dem Kern der Differentialrechnung mit enorm vielen praktischen Anwendungen, zum Beispiel:

- Welche Geschwindigkeit hat ein anfahrendes Auto in einem bestimmten Moment?
- Ein Wassertank wird gefüllt. Wie schnell steigt der Wasserspiegel?
- Wie muss die Verpackung für ein Arzneimittelfläschchen aussehen, damit für die Herstellung möglichst wenig Karton benötigt wird? (Die Antwort folgt in Kapitel 8.)

Typisch für die Differentialrechnung ist die Frage, wie stark sich etwas in einem bestimmten *Moment* ändert – nicht in einem bestimmten *Zeitraum*.

2.2 Beispiel: Anfahrendes Auto

2.2.1 Beispiel

Ein anfahrendes Auto lege in t Sekunden den Weg

$$s(t)=1.5\cdot t^2$$

Meter zurück. Nach $t_0=2$ Sekunden hat es also den Weg s(2)=6 m zurückgelegt.

(1) a) Wie stark ändert sich der zurückgelegte Weg, wenn das Auto „etwas" länger als 2 Sekunden unterwegs ist – z. B. 3 Sekunden anstatt 2 Sekunden?

b) Wievielmal so stark wie t ändert sich s?

c) Wie kann man dieses Resultat deuten?

(2) Wie sieht es bei einer Fahrzeit von 2.5, 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001 Sekunden aus?

(3) Was geschieht für $\Delta t\downarrow 0$?

(4) Wie sieht es aus, wenn das Auto „etwas" weniger lang als 2 Sekunden unterwegs ist, z. B. 1 Sekunde, 1.5, 1.9, 1.99, 1.999, 1.999 Sekunden?

(5) Was geschieht für $\Delta t\uparrow 0$?

(1) a) Wenn das Auto etwas länger als 2 Sekunden unterwegs ist, wachsen die Zeit t und die zurückgelegte Strecke s an. Die zusätzliche Zeit bezeichnen wir mit Δt, die zusätzlich zurückgelegte Strecke mit Δs.

Nehmen wir einmal an, es sei

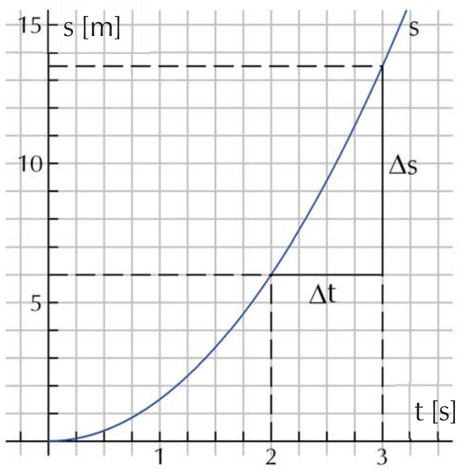
$$\Delta t=1\text{ s}.$$

Dann ist das Auto insgesamt

$$t_0+\Delta t=3\text{ s}$$

unterwegs. In diesen 3s fährt es

$$s(t_0+\Delta t)=s(3)=13.5\text{ m}$$



weit. Der Weg, der in der zusätzlichen Sekunde Fahrzeit zurückgelegt worden ist, beträgt

$$\Delta s = s(3) - s(2) = 13.5\text{ m} - 6\text{ m} = 7.5\text{ m}.$$

b) Kurz: Wenn sich die Zeit um $\Delta t=1$ s ändert, ändert sich der Weg um $\Delta s=7.5$ m. Der Weg hat sich also 7.5-mal so stark geändert wie die Zeit, was durch den Quotienten

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{7.5\text{ m}}{1\text{ s}} = 7.5\text{ m/s}$$

ausgedrückt wird.

c) Das Verhältnis $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ haben wir wegen einer rein mathematischen Fragestellung untersucht: Wievielmal so stark wie Δt ändert sich Δs? In diesem Beispiel hat dieses Verhältnis eine konkrete Bedeutung: die Durchschnittsgeschwindigkeit! Zwischen Sekunde 2 und Sekunde 3 nach dem Start legt das Auto 7.5 m zurück. In diesem Zeitabschnitt fährt es mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{7.5\text{ m}}{1\text{ s}} = 7.5\text{ m/s}.$$

Es handelt sich nur um eine Durchschnittsgeschwindigkeit, weil der Tachometer des sich beschleunigenden Autos nach 2 Sekunden eine etwas niedrigere Geschwindigkeit anzeigt, nach 3 Sekunden eine etwas höhere Geschwindigkeit.

(2) Die Berechnungen sind genau dieselben wie bei (1). Die Resultate – ohne Einheiten – sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

Untersuchter Zeitpunkt: $t_0=2$, $s(t_0)=6$				
Δt	$t_0+\Delta t$	$s(t_0+\Delta t)$	$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$
0.5	2.5	9.375	3.375	6.75
0.1	2.1	6.615	0.615	6.15
0.01	2.01	6.06015	0.06015	6.015
0.001	2.001	6.0060015	0.0060015	6.0015
0.0001	2.0001	6.000600015	0.000600015	6.00015

a) Die Antwort Δs steht jeweils in der zweithintersten Spalte.

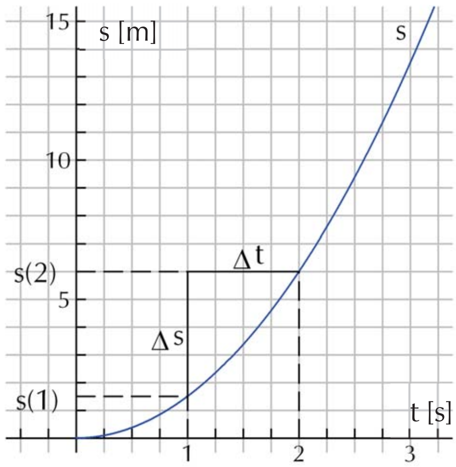
b) Die Antwort $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ steht jeweils in der hintersten Spalte.

c) Wieder erhält man jeweils eine Durchschnittsgeschwindigkeit. Für kleine Werte von Δt wie zum Beispiel $\Delta t=0.0001$ s erhält man die *Durchschnittsgeschwindigkeit* zwischen Sekunde 2.0000 und Sekunde 2.0001. Das ist *praktisch* die Momentangeschwindigkeit nach 2 Sekunden. Die *Momentangeschwindigkeit* ist diejenige Geschwindigkeit, welche die Nadel des Tachometers nach *exakt* 2 Sekunden anzeigt.

(3)
- Für $\Delta t \downarrow 0$ strebt $\Delta s \to 0$. (Das ist zu erwarten: Je kleiner Δt ist, desto weniger weit fährt das Auto in dieser Zeit.)
- Für $\Delta t \downarrow 0$ strebt das Verhältnis $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ gegen 6. (Das ist nicht von vornherein klar, denn für $\Delta t=0$ geht das Verhältnis $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ in den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ über.)
- Deutung des Resultats: Die Momentangeschwindigkeit nach exakt 2 Sekunden ist

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = 6\text{ m/s}.$$

(4) Weil das Auto weniger als 2 Sekunden unterwegs ist, wird Δt negativ. Die folgende Tabelle zeigt die Resultate – ohne Einheiten – für einige Werte von Δt.



Untersuchter Zeitpunkt: $t_0=2$, $s(t_0)=6$				
Δt	$t_0+\Delta t$	$s(t_0+\Delta t)$	$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$
–1	1	1.5	–4.5	4.5
–0.5	1.5	3.375	–2.625	5.25
–0.1	1.9	5.415	–0.585	5.85
–0.01	1.99	5.94015	–0.05985	5.985
–0.001	1.999	5.9940015	–0.0059985	5.9985
–0.0001	1.9999	5.999400015	–0.000599985	5.99985

(5) Auch jetzt gilt: Für $\Delta t \uparrow 0$ streben Δs gegen 0 und das Verhältnis $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ gegen 6. Die Momentangeschwindigkeit des Autos beträgt nach 2 Sekunden auch gemäss dieser Betrachtung 6 m/s.

Hinweis: Dass die bei diesem Beispiel durch „Herantasten" für $\Delta t \to 0$ bestimmten Grenzwerte tatsächlich richtig sind, zeigen wir in Abschnitt 3.2.C.

♦

2.2.2 Zusammenfassung

(1) In der Umgebung von $t_0=2$ ändert sich Δs rund 6-mal so stark wie Δt:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} \approx 6.$$

Der genaue Wert hängt von Δt ab und lag in den Beispielen zwischen 4.5 und 7.5.

(2) Das Verhältnis

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

kann in diesem Beispiel als *durchschnittliche Geschwindigkeit* des Autos zwischen den beiden Zeitpunkten t_0 und $t_0+\Delta t$ gedeutet werden.

(3) Je näher Δt bei 0 liegt, desto näher liegt das Verhältnis $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ bei 6. Dabei spielt es keine Rolle, ob Δt positiv oder negativ ist:

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} = 6\,\mathrm{m/s}$$

und

$$\lim_{\Delta t \uparrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \uparrow 0} \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t} = 6\,\mathrm{m/s}.$$

Anders ausgedrückt: Der rechtsseitige Grenzwert und der linksseitige Grenzwert existieren und sind gleich. Also existiert der Grenzwert

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

und hat in diesem Fall den Wert 6 m/s.

(4) Der Grenzwert

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=6\,\mathrm{m/s}$$

kann in diesem Beispiel als *Momentangeschwindigkeit nach t_0* Sekunden gedeutet werden.

Bei Beispiel 2.2.1 haben wir in der Umgebung der Stelle $t_0=2$ Durchschnittsgeschwindigkeiten für einige Zeit*räume* berechnet und mit Hilfe des Grenzwertes für $\Delta t \to 0$ schliesslich die Momentangeschwindigkeit des anfahrenden Autos zum Zeit*punkt* $t_0=2$ ermittelt.

2.3 Beispiel: Studium eines Funktionsgraphen

Nun studieren wir den Graphen derselben Funktion – abgesehen von den Bezeichnungen – bei derselben Stelle $x_0=2$. Es geht um die geometrische Deutung von Beispiel 2.2.1.

2.3.1 Beispiel

Wir studieren den Graphen der Funktion

$$f\colon x\mapsto 1.5\cdot x^2$$

in der Umgebung der Stelle $x_0=2$. Der zugehörige Funktionswert ist $f(x_0)=6$.

(1) a) Um wie viel ändert sich der Funktionswert $f(x_0)$, wenn x_0 „ein wenig" vergrössert wird, z. B. von 2 auf 3?

b) Wievielmal so stark wie x_0 ändert sich $f(x_0)$?

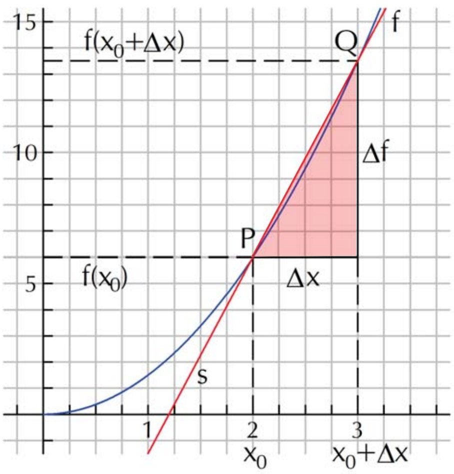
c) Wie kann dieses Resultat gedeutet werden?

(2) Wie sieht es aus, wenn x_0 auf 2.5, 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001 vergrössert wird?

(3) Was geschieht für $\Delta x\downarrow 0$?

(4) Was geschieht, wenn x_0 auf 1, 1.5, 1.9, 1.99, 1.999, 1.999 verkleinert wird?

(5) Was geschieht für $\Delta x\uparrow 0$?



(1) Wir bezeichnen die Änderung von x_0 mit Δx, die dadurch bewirkte Änderung des Funktionswertes mit Δf.

a) x_0 ändert sich um $\Delta x=3-2=1$, der Funktionswert ändert sich um

$$\Delta f=f(3)-f(2)=13.5-6=7.5.$$

b) $$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{7.5}{1}=7.5,$$

also ändert sich $f(x_0)$ 7.5-mal so stark wie x_0.

c) Dieses Verhältnis kann als die Steigung derjenigen Geraden s gedeutet werden, welche durch die beiden Punkte

$$P(\underbrace{x_0}_{2},\underbrace{f(x_0)}_{6})\text{ und }Q(\underbrace{x_0+\Delta x}_{3},\underbrace{f(x_0)+\Delta f}_{13.5})$$

verläuft, denn es gilt

$$\text{Steigung} = \frac{\text{Höhendifferenz}}{\text{Horizontaldistanz}} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Wenn der Graph von f zwischen P und Q wie in unserem Beispiel nicht stark gekrümmt ist, liegt die Gerade s sehr nahe beim Graphen von f.

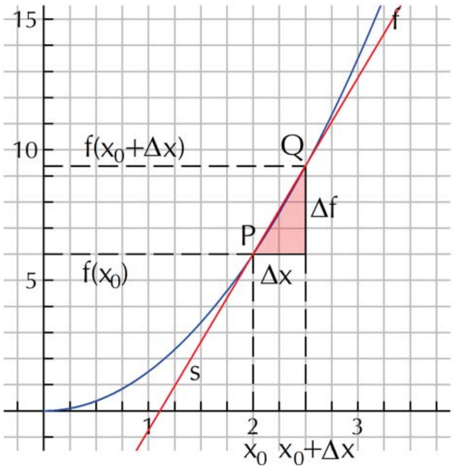
(2) Die Berechnungen sind genau dieselben wie bei (1). Die Resultate der Teilaufgaben a) und b) sind in folgender Tabelle zusammengefasst, welche – abgesehen von den Bezeichnungen – genau so schon bei der Lösung von Beispiel 2.2.1(2) vorkam:

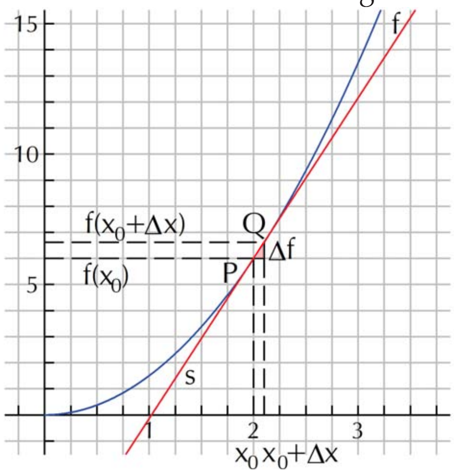
Untersuchte Stelle: $x_0=2$, $f(x_0)=6$				
Δx	$x_0+\Delta x$	$f(x_0+\Delta x)$	$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$	$\frac{\Delta f}{\Delta x}$
0.5	2.5	9.375	3.375	6.75
0.1	2.1	6.615	0.615	6.15
0.01	2.01	6.06015	0.06015	6.015
0.001	2.001	6.0060015	0.0060015	6.0015
0.0001	2.0001	6.000600015	0.000600015	6.00015

a) Die Antwort Δf steht jeweils in der zweithintersten Spalte.

b) Die Antwort $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ steht jeweils in der hintersten Spalte.

c) Unten ist links die Situation für $\Delta x=0.5$ und rechts die für $\Delta x=0.1$ dargestellt.

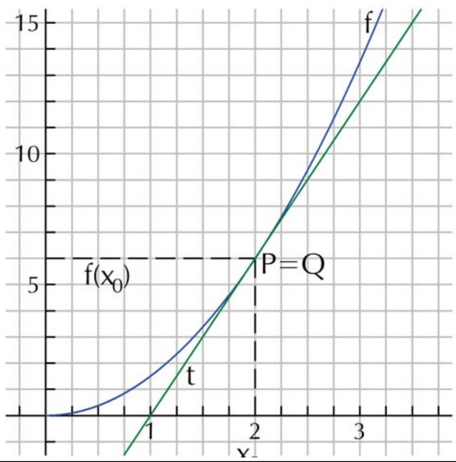




Das Verhältnis $\frac{\Delta f}{\Delta t}$ kann stets als Steigung der rot eingezeichneten Geraden gedeutet werden, welche durch die Punkte P und Q verläuft. Die jeweilige Steigung ist

$$m_s = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

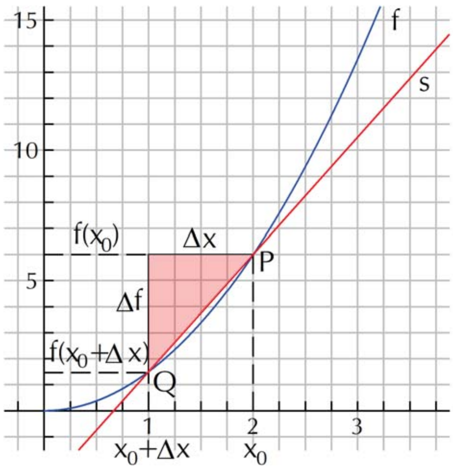
(3) Wenn Δx von oben her gegen 0 strebt, rückt Q entlang dem Graphen von f immer näher gegen P heran.
Im Grenzfall $\Delta x=0$ fallen P und Q sogar zusammen. Dann verläuft die Gerade nicht mehr durch zwei Punkte P und Q auf dem Graphen, sondern nur noch durch den Punkt P (der mit Q zusammenfällt).
Der Graph von f wird „normalerweise" von s in zwei Punkten geschnitten, im Grenzfall nur noch in einem Punkt berührt. Also ist die Gera-



de s „normalerweise" eine *Sekante* durch zwei Punkte P und Q des Graphen von f, im Grenzfall $\Delta x=0$ hingegen die *Tangente* t an den Graphen von f im Punkt P. Die Steigung der bei diesem Prozess entstehenden Tangente ist

$$m_t = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = 6.$$

(4) Nun ist $\Delta x<0$. Rechts ist die Situation für $\Delta x=-1$ dargestellt.



Die Resultate der Teilaufgaben a) und b) sind in der Tabelle unten zusammengefasst, welche – abgesehen von den Bezeichnungen – genau so schon bei der Lösung von Beispiel 2.2.1(4) vorkam.

a) Die Antwort Δf steht jeweils in der zweithintersten Spalte.

b) Die Antwort $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ steht jeweils in der hintersten Spalte.

Untersuchte Stelle: $x_0=2$, $f(x_0)=6$				
Δx	$x_0+\Delta x$	$f(x_0+\Delta x)$	$\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$	$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$
–1	1	1.5	–4.5	4.5
–0.5	1.5	3.375	–2.625	5.25
–0.1	1.9	5.415	–0.585	5.85
–0.01	1.99	5.94015	–0.05985	5.985
–0.001	1.999	5.9940015	–0.0059985	5.9985
–0.0001	1.9999	5.999400015	–0.000599985	5.99985

c) Wieder kann das Verhältnis $\dfrac{\Delta f}{\Delta t}$ als Steigung der rot eingezeichneten Sekante s gedeutet werden, welche durch die Punkte P und Q verläuft. Die Steigung ist jeweils

$$m_s = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

(5) Wenn Δx von unten her gegen 0 strebt, rückt Q ebenfalls entlang dem Graphen von f immer näher gegen P heran, und die Geraden durch P und Q gehen schliesslich über in eine Tangente t mit der Steigung

$$m_t = \lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = 6.$$

Es ist dieselbe Tangente, wie wenn Δx von oben her gegen 0 strebt. Der Grund: Beide Tangenten verlaufen durch denselben Punkt P, und ihre Steigungen sind gleich:

$$\lim_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 6 \text{ und } \lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 6.$$

♦

2.3.2 Zusammenfassung

(1) Das Verhältnis

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

kann als *Steigung m_s der Sekante s* durch die beiden Punkte $P(x_0, f(x_0))$ und $Q(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ auf dem Graphen von f gedeutet werden.

(2) Der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

kann als *Steigung m_t der Tangente t* an den Graphen von f im Punkt $P(x_0, f(x_0))$ gedeutet werden.

Der Vergleich von Zusammenfassung 2.2.2 und Zusammenfassung 2.3.2 zeigt, dass wir bei beiden Beispielen – abgesehen von den Bezeichnungen – genau die gleichen Verhältnisse und die gleichen Grenzwerte gebildet haben:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \text{ und } \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ und } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Die Deutung dieser Verhältnisse und Grenzwerte war aber völlig verschieden: einmal Durchschnittsgeschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit, einmal Sekantensteigung und Tangentensteigung.

2.4 Beispiel: Abkühlung von Kaffee

2.4.1 Beispiel

Auf der sommerlichen Piazza San Marco in Venedig wird bei 30°C ein frischer Espresso mit 78°C in einer vorgewärmten Tasse serviert. Seine Abkühlung wird durch die Funktion

$$T: t \mapsto 30 + 48 \cdot e^{-0.1 \cdot t} \qquad \textbf{[2.1]}$$

beschrieben. Dabei bezeichnet T die Temperatur des Espressos (in °C) t Minuten nach dem Servieren. [Hinter dieser Funktion steht das Abkühlungsgesetz[1] von Newton[2].]

(1) Wie warm ist der Espresso nach $t_0 = 3$ Minuten?

(2) a) Um wie viel ändert sich die Temperatur, wenn sich der Espresso „etwas" länger als 3 Minuten abkühlt – z. B. 8, 6, 4, 3.1, $3\frac{1}{60}$, 3.001 Minuten anstatt 3 Minuten?

b) Wievielmal so stark wie t ändert sich T(t)?

c) Wie kann man dieses Resultat deuten?

(3) Was geschieht für $\Delta t \downarrow 0$?

(4) a) Um wie viel ändert sich die Temperatur, wenn sich der feine Espresso „etwas" weniger lang als 3 Minuten abkühlt, z. B. 0, 2, 2.9, $2\frac{59}{60}$, 2.999 Minuten?

b) Wievielmal so stark wie t ändert sich T(t)?

c) Wie kann man dieses Resultat deuten?

(5) Was geschieht für $\Delta t \uparrow 0$?

(1) Mit [2.1] erhalten wir

$$T(3) = 30 + 48 \cdot e^{-0.3} \approx 65.5593°C.$$

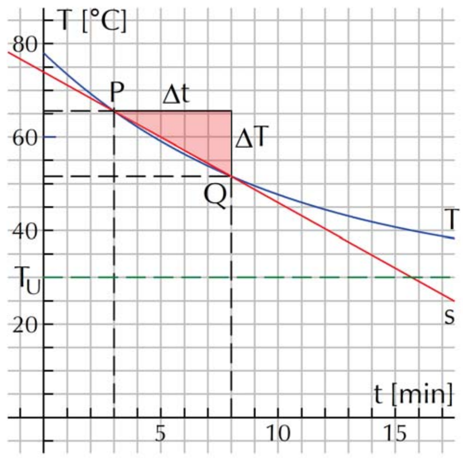
---

[1] Das Abkühlungsgesetz lautet $T(t) = T_U + (T(0) - T_U) \cdot e^{-\alpha \cdot t}$. Dabei bedeuten bei diesem Beispiel:

- $T(t)$ Temperatur des Espressos t Minuten nach dem Servieren in °C,
- $T(0)$ Temperatur des Espressos beim Servieren, hier 78°C,
- T_U Umgebungstemperatur, hier 30°C,
- α Konstante, welche die Abkühlungsgeschwindigkeit beeinflusst, hier 0.1. Je grösser α, desto rascher kühlt sich der Espresso ab. α ist zum Beispiel von Form und Material der Tasse abhängig.

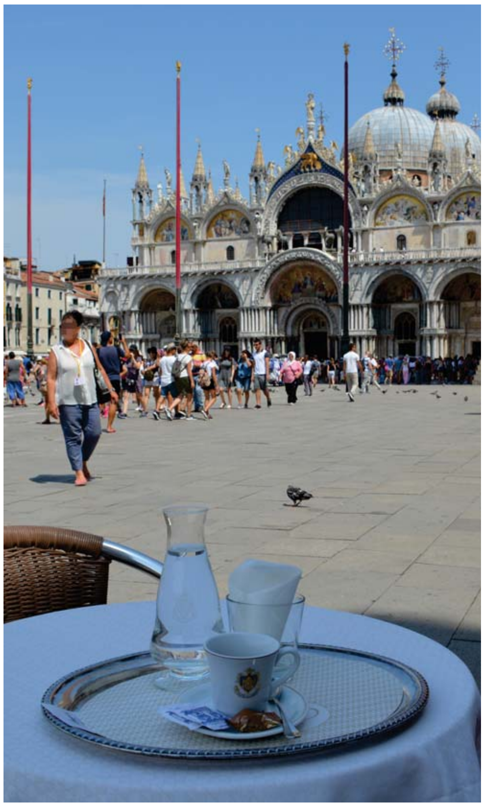
[2] Newton Isaac, englischer Mathematiker und Physiker, 4.1.1643 (Woolsthorpe) bis 20./31.3.1727 (Kensington, London)

(2) a) Rechts ist die Situation für $\Delta t=5$ Minuten dargestellt. Tabelle [2.2] weiter unten enthält die Antworten in der zweithintersten Spalte für $\Delta t=5$ sowie einige weitere Werte.
Natürlich ist die Genauigkeit der unten angegebenen Resultate aus der Sicht des Espressogeniessers und auch eines Experimentalphysikers völlig absurd; die Temperatur kann nicht auf 0.0001°C genau gemessen werden. Aber diese extreme Genauigkeit ist für die Bestimmung des Grenzwertes $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t}$ nötig.



Untersuchter Zeitpunkt: $t_0=3$, $T(t_0)\approx 65.5593$°C, von rechts her				
Δt	$t_0+\Delta t$	$T(t_0+\Delta t)$	$\Delta T = T(t_0+\Delta t) - T(t_0)$	$\frac{\Delta T}{\Delta t}$
5	8	51.5678	−13.9915	−2.79830
3	6	56.3430	−9.21632	−3.07211
1	4	62.1754	−3.38391	−3.38391
0.1	3.1	65.2055	−0.353821	−3.53821
1/60	3.016…	65.5001	−0.059216	−3.55297
0.001	3.001	65.5557	−0.003556	−3.55575

[2.2]



b) Die Antworten stehen in der letzten Spalte von Tabelle [2.2].

c) Wie kann man das Verhältnis $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ deuten?

Für $\Delta t=5$ lesen wir in der zweithintersten Spalte von Tabelle [2.2] ab, dass sich der Espresso in zusätzlichen 5 Minuten um weitere $\Delta T \approx 14$°C abkühlt. Das Verhältnis $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ gibt also an, um wie viel der Espresso in einer Minute durchschnittlich kälter geworden ist: um etwa 2.8°C. Man kann das als Abkühlungsgeschwindigkeit auffassen. Genauer: Das Verhältnis $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ gibt eine *durchschnittliche Abkühlungsgeschwindigkeit* an.
Die Tabellenwerte und die Graphik zeigen, dass sich der Espresso zu Beginn des untersuchten Zeitintervalls rascher abkühlt als an dessen Ende.
Für $\Delta t=0.001$ erhält man die *durchschnittliche Abkühlungsgeschwindigkeit* im *Zeitraum* zwischen 3 und 3.001 Minuten, welche schon fast die *momentane Abkühlungsgeschwindigkeit* zum *Zeitpunkt* $t_0=3$ Minuten ist.

(3) Tabelle [2.2] entnehmen wir, dass

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} \approx -3.6\ °C\,/\,\text{Min.}$$

ist. Dies kann als *momentane Abkühlungsgeschwindigkeit* nach exakt 3 Minuten gedeutet werden.

(4) a) Die Antworten stehen in der zweithintersten Spalte von Tabelle [2.3].
b) Die Antworten stehen in der hintersten Spalte von Tabelle [2.3].

Untersuchter Zeitpunkt: $t_0=3$, $T(t_0)\approx 65.5593$°C, von links her				
Δt	$t_0+\Delta t$	$T(t_0+\Delta t)$	$\Delta T=T(t_0+\Delta t)-T(t_0)$	$\frac{\Delta T}{\Delta t}$
–3	0	78.0000	12.4407	–4.14691
–1	2	69.2991	3.73980	–3.73980
–0.1	2.9	65.9167	0.357377	–3.57377
–1/60	2.983…	65.6186	0.059315	–3.55889
–0.001	2.999	65.5628	0.003556	–3.55611

[2.3]

c) Wieder kann das Verhältnis $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ als *durchschnittliche Abkühlungsgeschwindigkeit* in einem bestimmten *Zeitraum* gedeutet werden.

(5) Für $\Delta t \uparrow 0$ erhalten wir den linksseitigen Grenzwert

$$\lim_{\Delta t \uparrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} \approx -3.6\ °C\,/\,\text{Min.}$$

Er kann als *momentane Abkühlungsgeschwindigkeit* exakt zum *Zeitpunkt* $t_0=3$ Minuten gedeutet werden.

Weil der rechtsseitige und der linksseitige Grenzwert miteinander übereinstimmen, existiert der Grenzwert

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} \approx -3.6\ °C\,/\,\text{Min.}$$

Hinweis: Dass die bei diesem Beispiel durch „Herantasten" für $\Delta t \to 0$ bestimmten Grenzwerte tatsächlich richtig sind, können wir nach dem Studium von Kapitel 4. zeigen.

♦

2.4.2 Zusammenfassung

(1) Das Verhältnis

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(t_0+\Delta t)-T(t_0)}{\Delta t}$$

kann als *durchschnittliche Abkühlungsgeschwindigkeit* des Espressos im Zeit*raum* zwischen t_0 und $t_0+\Delta t$ Minuten nach dem Servieren gedeutet werden.

(2) Dagegen kann der Grenzwert

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(t_0+\Delta t)-T(t_0)}{\Delta t}$$

als *momentane Abkühlungsgeschwindigkeit* zum Zeit*punkt* t_0 gedeutet werden.

Die Abkühlungsgeschwindigkeit beeinflusst die Eigenschaften vieler Werkstoffe und spielt z. B. bei der Stahlherstellung eine wichtige Rolle. Viele Materialien sind raschen und grossen Temperaturschwankungen unterworfen: das Teeglas, das mit siedendem Wasser gefüllt wird; die Zähne beim gleichzeitigen Genuss von kaltem Eis und heissem Kaffee usw.

2.5 Definition der Ableitung einer Funktion an einer Stelle

Wir haben anhand verschiedener Beispiele die Frage „wievielmal so stark wie x ändert sich der Funktionswert f(x)?“ studiert. Dazu haben wir Verhältnisse der Form

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}, \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ und } \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

untersucht. Stets ging es um Änderungen in einem Zeit*raum* oder in einem *Intervall*, und stets konnten diese Verhältnisse praktisch gedeutet werden:

- als *durchschnittliche* Geschwindigkeit eines anfahrenden Autos,
- als Steigung einer *Sekante* oder
- als *durchschnittliche* Abkühlungsgeschwindigkeit.

Diese Verhältnisse werden mit einer allgemeinen Bezeichnung versehen: *„Differenzenquotient“* – eben deshalb, weil es sich stets um einen Quotienten, also ein Verhältnis zweier Differenzen handelt.

Indem wir die Differenz im Nenner gegen 0 streben liessen, erhielten wir jeweils einen Grenzwert, nämlich

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ oder } \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t},$$

der über *momentane* Änderungen Auskunft gab:

- über die *momentane* Geschwindigkeit,
- über die Steigung einer *Tangente* oder
- über die *momentane* Abkühlungsgeschwindigkeit.

Immer ging es um Änderungen zu einem Zeit*punkt* oder in einem *Punkt*.

Der Sammelbegriff für diese Grenzwerte ist *„Differentialquotient“* oder *„(erste) Ableitung“*.

Beispiel	untersuchte Funktion	untersuchtes Verhältnis Deutung	untersuchter Grenzwert Deutung
anfahrendes Auto	$s: t \mapsto 1.5 \cdot t^2$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ *durchschnittliche* Geschwindigkeit im Zeit*raum* $[t_0, t_0+\Delta t]$.	$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ *momentane* Geschwindigkeit zum Zeit*punkt* t_0
Graph einer Funktion	$f: x \mapsto 1.5 \cdot x^2$	$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ *Steigung der Sekante* durch die beiden Punkte $P(x_0, f(x_0))$ und $Q(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ auf dem Graphen von f	$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ *Steigung der Tangente* an den Graphen von f *im Punkt* $P(x_0, f(x_0))$
Abkühlung von Kaffee	$T: t \mapsto 30+48 \cdot e^{-0.1 \cdot t}$	$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(t_0+\Delta t)-T(t_0)}{\Delta t}$ *durchschnittliche* Abkühlungsgeschwindigkeit im Zeit*raum* $[t_0, t_0+\Delta t]$	$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(t_0+\Delta t)-T(t_0)}{\Delta t}$ *momentane* Abkühlungsgeschwindigkeit zum Zeit*punkt* t_0
Allgemeine Bezeichnungen	$f: x \mapsto y$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ *Differenzenquotient*	$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ *Differentialquotient, (erste) Ableitung von f an der Stelle x_0*

2.5.1 Definitionen

Es sei f: $x \mapsto y$ eine Funktion und x_0 gehöre zum Definitionsbereich von f.

(1) Das Verhältnis

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

heisst *Differenzenquotient von f für das Intervall $[x_0,\ x_0+\Delta x]$.*

(2) Wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert, heisst f *differenzierbar an der Stelle x_0.*

(3) Wenn die Funktion f an jeder Stelle des Definitionsbereichs differenzierbar ist, heisst f *differenzierbar*.

(4) Der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

heisst *Differentialquotient von f an der Stelle x_0* oder auch *(erste) Ableitung von f an der Stelle x_0.*

Bezeichnungen:

$$\frac{dy}{dx}(x_0),\ \frac{d}{dx}f(x_0) \quad \text{oder } f'(x_0).$$

2.5.2 Bemerkungen

- $\frac{dy}{dx}$ wird als „dy nach dx" ausgesprochen. $\frac{dy}{dx}$ ist *kein* Bruch, sondern einfach eine Schreibweise. Sie erweist sich in vielen Situationen als praktisch, denn oft verhält sich $\frac{dy}{dx}$ tatsächlich *wie* ein Bruch. Die Terme dx und dy heissen *Differentiale*, was die Bezeichnung *Differentialquotient* erklärt.
- Bei manchen Beispielen haben wir Funktionen untersucht, deren Wert von der Zeit t abhängt: s(t) und T(t). Dann erhält man beim Ableiten die Differentialquotienten oder Ableitungen $s'(t_0)$ und $T'(t_0)$. In diesem Fall sagt man, man habe „nach der Zeit abgeleitet" und schreibt – vor allem in der Physik – die entsprechenden Ableitungen oft auch mit Punkten anstatt mit Strichen: $\dot{s}(t_0)$ bzw. $\dot{T}(t_0)$.
- Die verschiedenen Bezeichnungen für die Ableitung von f sind historisch zu erklären. Newton und Leibniz[3] entwickelten in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts etwa gleichzeitig, jedoch auf verschiedenen Wegen, die Differentialrechnung und die weiter hinten behandelte Integralrechnung. Es entwickelte sich ein langer Streit, wer zuerst welche Erkenntnisse gewonnen hatte.
  Leibniz befasste sich mit dem Problem der Tangentensteigung und entwickelte die Schreibweise $\frac{dy}{dx}$. Newton hingegen untersuchte physikalische Probleme und verwendete die Schreibweisen mit Strichen und Punkten: y' und $\dot{s}$. Heute sind beide Notationen geläufig.

[3] Leibniz Gottfried Wilhelm, deutscher Universalgelehrter, 1.7.1646 (Leipzig) bis 14.11.1716 (Hannover)

2.6 Was bedeutet Differenzierbarkeit anschaulich?

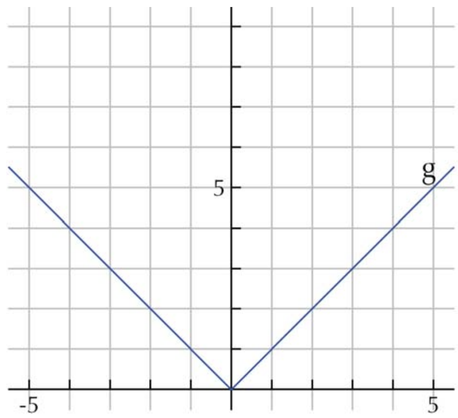
Eine Funktion f ist an einer Stelle x_0 ihres Definitionsbereichs differenzierbar, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ existiert. Definition 1.4.4(3) besagt, dass dazu $\lim\limits_{\Delta x \uparrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ und $\lim\limits_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ existieren und miteinander übereinstimmen müssen. – Wenn eine Funktion an der Stelle x_0 *nicht* differenzierbar ist, dann muss also eine dieser Bedingungen verletzt sein.

2.6.1 Beispiele: Die beiden einseitigen Grenzwerte existieren, sind aber verschieden.
Sind die folgenden Funktionen an der Stelle $x_0=0$ differenzierbar oder nicht?

(1) $g: x \mapsto |x|$ (2) $h: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, \text{ falls } x \le 0 \\ \frac{1}{10}x, \text{ falls } x > 0 \end{cases}$

(1) Es ist $x_0=0$, $g(x_0)=0$, $\Delta g = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = g(\Delta x)$.

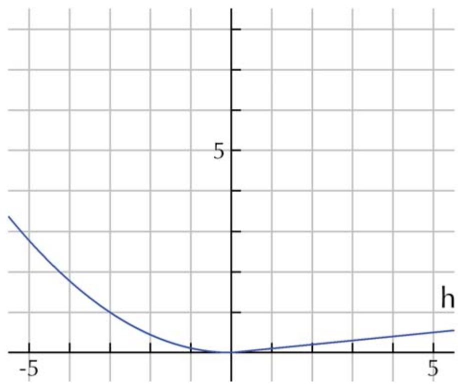
linksseitiger Grenzwert		rechtsseitiger Grenzwert	
Δx	$\frac{\Delta g}{\Delta x}$	Δx	$\frac{\Delta g}{\Delta x}$
–1	–1	1	+1
–0.1	–1	0.1	+1
–0.01	–1	0.01	+1
–0.001	–1	0.001	+1
$\lim\limits_{\Delta x \uparrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = -1$		$\lim\limits_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = +1$	



Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert existieren, sind aber verschieden. Also ist g an der Stelle $x_0=0$ nicht differenzierbar. Der Graph hat dort einen Knick.

(2) Es ist $x_0=0$, $h(x_0)=0$, $\Delta h = h(x_0 + \Delta x) - h(x_0) = h(\Delta x)$.

linksseitiger Grenzwert		rechtsseitiger Grenzwert	
Δx	$\frac{\Delta h}{\Delta x}$	Δx	$\frac{\Delta h}{\Delta x}$
–1	–0.111111	1	+0.1
–0.1	–0.011111	0.1	+0.1
–0.01	–0.001111	0.01	+0.1
–0.001	–0.000111	0.001	+0.1
$\lim\limits_{\Delta x \uparrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = 0$		$\lim\limits_{\Delta x \downarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = +0.1$	



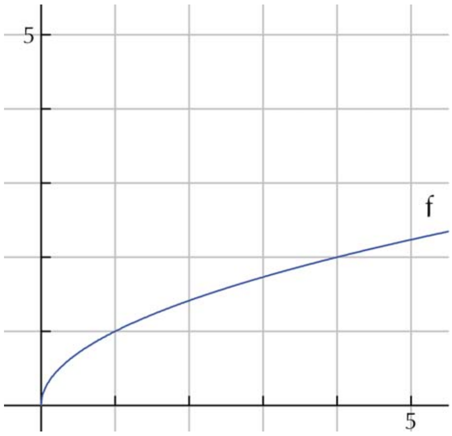
Der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert existieren, sind aber verschieden. Also ist h an der Stelle $x_0=0$ nicht differenzierbar. Der Graph hat dort einen Knick. Dieser ist weniger augenfällig als bei (1), weil die Differenz zwischen den einseitigen Grenzwerten kleiner ist.

♦

2.6.2 Beispiel: Der Grenzwert existiert nicht, weil er nicht endlich ist.
Ist die Funktion $f: x \mapsto \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0=0$ differenzierbar oder nicht?

Es ist $x_0=0$, $f(x_0)=0$, $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f(\Delta x) = \sqrt{\Delta x}$.

linksseitiger Grenzwert		rechtsseitiger Grenzwert	
Δx	$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$	Δx	$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$
-1	Δf ist nicht definiert, wenn $\Delta x<0$ ist.	1	1
-0.01		0.01	10
-0.0001		0.0001	100
-10^{-36}		10^{-36}	10^{18}
$\lim\limits_{\Delta x\uparrow 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ ist nicht def.		$\lim\limits_{\Delta x\downarrow 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ ist nicht endlich	



Wenn x von rechts gegen 0 strebt, wachsen die Differenzenquotienten $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ über alle Schranken; sie streben nicht gegen eine bestimmte Zahl, sondern gegen ∞. Deshalb existiert der rechtsseitige Grenzwert nicht, also existiert auch die Ableitung $f'(0)$ nicht.
Die Tatsache, dass die Folge der Differenzenquotienten gegen unendlich strebt, bedeutet geometrisch, dass die Tangente an den Graphen von f im Punkt (0, 0) senkrecht verläuft.

Anschaulich: Eine Funktion f ist an einer Stelle x_0 *nicht* differenzierbar, wenn die Tangente bei der Stelle x_0 an den Graphen von f senkrecht verläuft.
Bei diesem Beispiel fällt die Tangente gerade mit der y-Achse zusammen. Aber die Tangenten*steigung* ist nicht definiert – allenfalls wäre sie $+\infty$ oder $-\infty$. Es ist also möglich, dass an einer gewissen Stelle zwar die Tangente existiert, nicht aber die Ableitung!

♦

Es besteht auch ein Zusammenhang zwischen der Differenzierbarkeit einer Funktion an einer bestimmten Stelle und der Stetigkeit an dieser Stelle.

2.6.3 Satz

Jede Funktion f, die an einer gewissen Stelle x_0 differenzierbar ist, ist dort auch stetig.

Beweis

Weil f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, existiert dort der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A$, wobei A eine reelle Zahl ist. Wir multiplizieren diese Gleichung mit Δx; für $\Delta x \to 0$ erhalten wir

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} A\cdot\Delta x = 0.$$

Das ist aber gerade die Bedingung, die wir bei Definition 1.5.10 für die Stetigkeit von f angegeben haben.

■

Dieser Satz besagt umgekehrt, dass eine Funktion, die an der Stelle x_0 unstetig ist, dort sicher nicht differenzierbar sein kann.

2.6.4 Zusammenfassung

Eine Funktion f ist an der Stelle x_0 *nicht* differenzierbar, wenn …
… der Graph dort *einen Knick* hat oder
… der Graph dort *eine senkrechte Tangente* hat oder
… f dort *unstetig ist*, also der Graph z. B. *einen Sprung* macht.

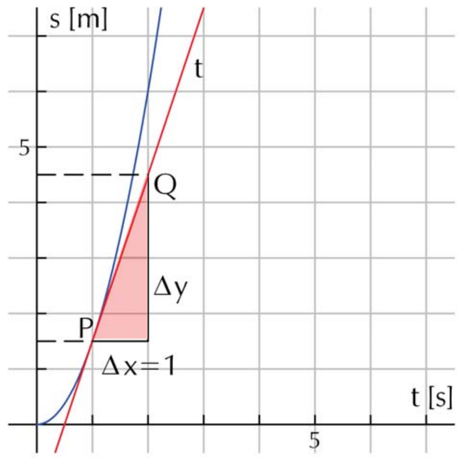
Umgekehrt ist f an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn …
… der Graph dort *knickfrei* ist und
… der Graph dort *keine senkrechte Tangente* hat und
… f dort *stetig* ist.

2.7 Graphische Bestimmung der Ableitung $f'(x_0)$

Bisher haben wir den Wert der Ableitung $f'(x_0)$ rechnerisch durch „Herantasten“ an den Grenzwert bestimmt. Wenn man wie bei Beispiel 2.3.1 die Ableitung als Tangentensteigung deutet, eröffnet sich auch eine graphische Möglichkeit: Man zeichnet an der gewünschten Stelle die Tangente an den Graphen von f ein und bestimmt mithilfe eines Steigungsdreiecks deren Steigung.

2.7.1 Beispiel

Wie schnell fährt das anfahrende Auto von Beispiel 2.2.1 nach einer Sekunde?



Hier geht es um die Funktion $s\colon t \mapsto 1.5t^2$. Wir zeichnen im Punkt P(1, 1.5) des Graphen von s die Tangente t möglichst genau ein.
Dann ergänzen wir ein Steigungsdreieck der Tangente t. Besonders bequem wird die Berechnung der Ableitung, wenn $\Delta x=1$ ist. Die waagrechte Kathete des Steigungsdreiecks verläuft in diesem Fall zwischen den beiden Punkten P und (2, 1.5), die senkrechte Kathete zwischen dem Punkt (2, 1.5) und dem Punkt Q(2, …) *auf der Tangente t*. Durch Ausmessen findet man

$$\Delta y=4.5-1.5=3.$$

Also ist die Momentangeschwindigkeit des anfahrenden Autos nach 1 Sekunde gleich der Steigung der Tangenten t, nämlich

$$m_t=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3}{1}=3\ \text{m/s}.$$

♦

2.7.2 Bemerkungen

(1) Es ist äusserst wichtig, dass der Punkt Q auf der Tangente t liegt und nicht auf dem untersuchten Graphen. (Wenn Q auf dem untersuchten Graphen läge, würde man die Steigung einer Sekanten, d. h. einen Differenzenquotienten, berechnen anstatt die gesuchte Steigung der Tangente, d. h. den Differentialquotienten.)

(2) Oben haben wir zur Berechnung der Ableitung einfach das Verhältnis

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3}{1}=3\ \text{m/s}$$

gebildet. Aber die Ableitung ist als Grenzwert

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

definiert. Wo ist der Grenzwert geblieben? Er wurde berücksichtigt, indem wir die Tangentensteigung berechnet haben und nicht eine Sekantensteigung.

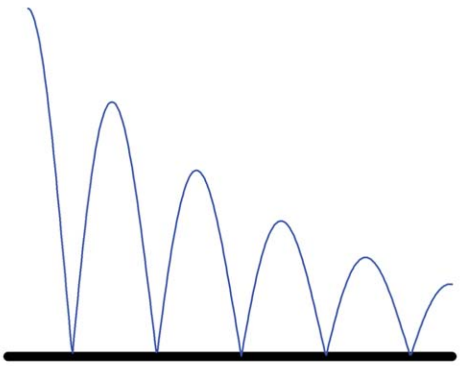
(3) Diese Methode steht und fällt mit der Genauigkeit, mit welcher der Graph und vor allem die Tangente gezeichnet wird. Wenn man am exakten Wert der Ableitung interessiert ist, liefert diese graphische Methode nur bedingt brauchbare Resultate. Trotzdem werden wir noch ab und zu auf diese Methode zurückgreifen, weil sie mit wenig Aufwand *qualitativ* gute Aussagen ermöglicht.

2.8 Ergänzung: (Nicht) differenzierbare Funktionen in der Praxis

Wir haben in Abschnitt 2.6 gesehen, dass eine Funktion f an der Stelle x_0 *nicht* differenzierbar ist, wenn …
… der Graph dort *einen Knick* hat oder
… der Graph dort *eine senkrechte Tangente* hat oder
… f dort *unstetig* ist, also der Graph z. B. *einen Sprung* macht.

2.8.1 Beispiel
Wo ist die Flugbahn eines springenden Balls differenzierbar, wo ist sie es nicht?

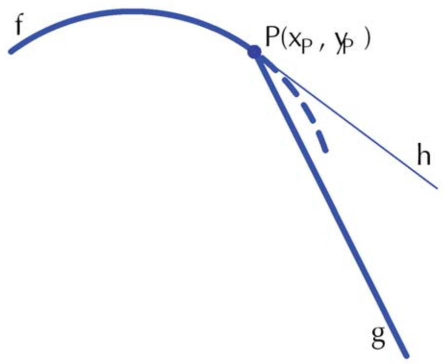
Die Flugbahn eines springenden Balles ist überall differenzierbar – ausser an denjenigen Stellen, wo der Ball auf dem Boden aufprallt und wieder aufspringt. Gleiches gilt für die Sprungbahn eines davonhoppelnden Hasen. Weil die Sprunghöhe rasch abnimmt, ist anzunehmen, dass es sich um einen rasch ermüdenden Hasen handelt.



♦

2.8.2 Beispiel
Wo spielt Differenzierbarkeit beim Gleisbau eine Rolle?

Beim Übergang zwischen einem geraden Gleisstück und einem Kurvenstück treffen die Graphen zweier Funktionen aufeinander, von denen eine linear ist, die andere nicht. Dieser Übergang muss an der „Nahtstelle" knickfrei sein, weil die Räder des Zuges die Richtung nicht in Nullkommanichts ändern können.
Rechts stellt die dicke Linie ein Gleis dar, das an der Nahtstelle P einen Knick aufweist. Die knickfreie Fortsetzung der Funktion f im Punkt P wäre die Funktion h, welche mit der Tangente an den Graphen von f im Punkt P übereinstimmt.



Damit die Graphen zweier Funktionen f und g im Punkt P knickfrei aneinander anschliessen, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

$$f(x_P)=g(x_P)$$

und

$$f'(x_P)=g'(x_P).$$

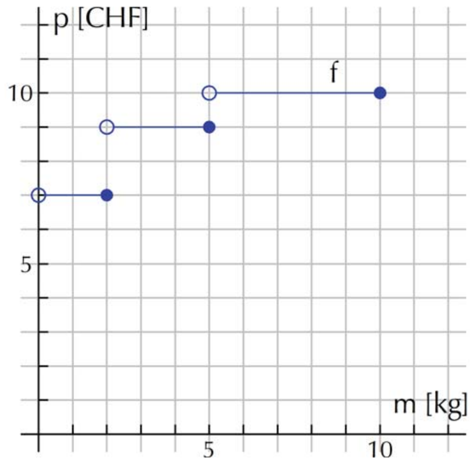
Die erste Bedingung stellt sicher, dass die beiden Graphen im Punkt P überhaupt zusammentreffen, und die zweite Bedingung garantiert, dass die Graphen mit derselben Richtung aufeinander treffen – also knickfrei.
Die beiden folgenden Fotografien illustrieren, dass der Übergang zwischen dem geraden Stück und der Kurve knickfrei ist. Auf der Fotografie links ist die ganze Kurve zu sehen, auf der Fotografie rechts befand sich die Kamera genau über einer Schiene. Kleinste Knicke müssten so zu erkennen sein. Das sind sie aber nicht – was den Reisekomfort der Passagiere spürbar erhöht. Die Bedingung der Knickfreiheit muss auch bei einer Weiche erfüllt sein.

Die Aufnahme links entstand in der Nähe des Bahnhofs Leuggelbach GL. Man erkennt in der Bildmitte den Regionalzug Linthal–Rapperswil und im Hintergrund den Tödi, dessen markanter eisbedeckter Gipfel 3'614 m über dem Meeresspiegel liegt – ziemlich genau 3'000 Meter über dem Talboden.
Die Aufnahme rechts entstand beim Bahnhof Luchsingen-Hätzingen GL. Weil der Übergang von den geraden Gleisen zu den gekrümmten G]eisen knickfrei verläuft, ist der Kurvenanfang fast nicht auszumachen.

♦

2.8.3 Beispiel
Wo ist die Portofunktion von Beispiel 1.5.2 differenzierbar, wo nicht?

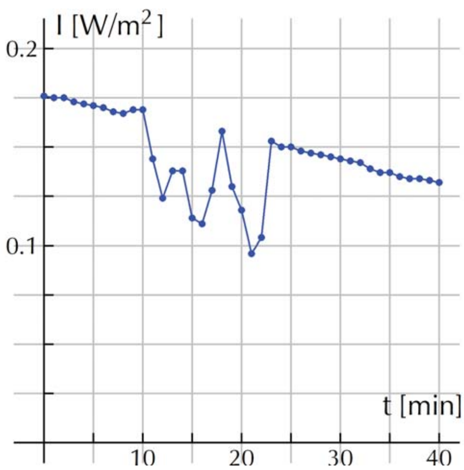
Die Portofunktion f ordnet der Masse m eines Pakets (in kg) das zu bezahlende Porto p (in CHF) zu. Ihr Graph ist nebenan dargestellt. Wir haben bereits gesehen: An den Stellen m=2 und m=5 ist f unstetig, sonst ist f überall stetig.
Gemäss Satz 2.6.3 ist die Funktion f an den beiden Unstetigkeitsstellen m=2 und m=5 nicht differenzierbar. An allen anderen Stellen ist f aber differenzierbar, und der Wert der Ableitung ist dort 0, weil der Graph von f waagrecht verläuft.



♦

2.8.4 Beispiel
Wo spielt Differenzierbarkeit bei der Messung der UVB-Strahlung eine Rolle?

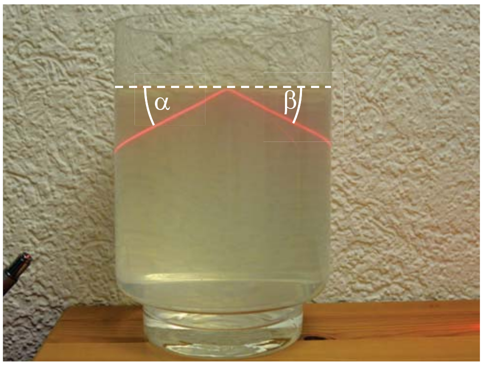
Wir greifen Beispiel 1.5.6 auf. Wir haben die von einer Sonde im Minutentakt erfassten Messwerte in ein Koordinatensystem eingetragen und je zwei aufeinander folgende Punkte durch eine Strecke verbunden.
Weil zwei aufeinander folgende Strecken in der Regel nicht genau die gleiche Richtung haben, ist bei fast jedem Messzeitpunkt eine Knickstelle.
Dieser Graph stellt eine Funktion dar, die im Zeitintervall [0, 40] stetig ist, an den Knickstellen jedoch nicht differenzierbar ist.



♦

2.8.5 Beispiel
Wo ist der Weg eines ins Wasser eintretenden Laserstrahls differenzierbar, wo nicht?

Der rote Laserstrahl tritt von links unten in eine mit Zitronenwasser gefüllte Vase ein. Im Wasser verläuft der Laserstrahl geradlinig, bis er an der Wasseroberfläche reflektiert wird: $\beta=\alpha$. Dann folgt er wieder einer Geraden, bis er aus der Vase austritt.
Der Weg dieses Laserstrahls ist überall differenzierbar, wo er einer Geraden folgt. Nicht differenzierbar ist der Weg nur dort, wo er einen Knick beschreibt. Auf dem Bild ist das dort, wo der Laserstrahl an der Wasseroberfläche reflektiert wird.



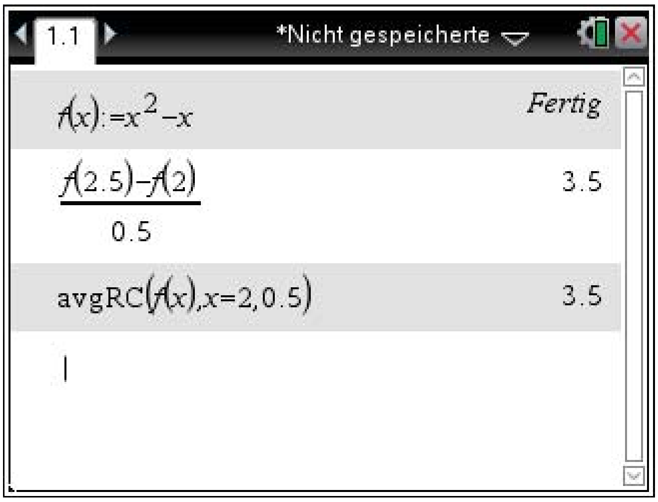
♦

2.9 Verwendung von Taschenrechnern mit CAS

A. Berechnen von Differenzenquotienten

2.9.1 Beispiel
Berechnen Sie den Differenzenquotienten für die Funktion f: $x \mapsto x^2 - x$ zwischen den beiden Stellen $x_0=2$ und $x_1=x_0+\Delta x=2.5$.

1. Weg: Mit Standardbefehlen
f(x):=x ^ 2▶ – x `Enter`
(f(2.5)–f(2))/0.5 `Enter`
Dieser Weg ist anschaulich, weil er sich an der mathematischen Schreibweise orientiert.
2. Weg: Mit einem Spezialbefehl (avgrc = average rate of change = mittlere Änderungsrate)
f(x):=x ^ 2▶ – x `Enter`
avgrc(f(x), x=2, 0.5) `Enter`



♦

2.9.2 Beispiel
Berechnen Sie eine Folge von Differenzenquotienten, um die Ableitung von f: $x \mapsto x^2 - x$ an der Stelle $x_0=2$ abzuschätzen.

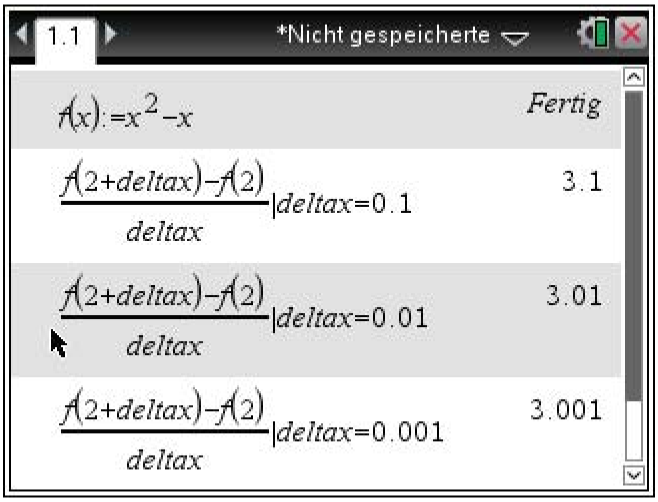
1. Weg: Mit Standardbefehlen
f(x):=x ^ 2▶ – x `Enter`
(f(2+deltax)–f(2))/deltax | deltax=0.1 `Enter`
(f(2+deltax)–f(2))/deltax | deltax=0.01 `Enter`
(f(2+deltax)–f(2))/deltax | deltax=0.001 `Enter`
Die Ergebnisse sind unten abgebildet.
Diese Folge von Differenzenquotienten scheint gegen 3 zu streben.

Um den linksseitigen Grenzwert

$$\lim_{\Delta x \uparrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

zu berechnen, setzt man für deltax negative Werte ein:

f(x):=x ^ 2▶– x Enter
(f(2+deltax)–f(2))/deltax | deltax=–0.1 Enter
(f(2+deltax)–f(2))/deltax | deltax= –0.01 Enter
(f(2+deltax)–f(2))/deltax | deltax= –0.001 Enter



Jetzt erhalten wir 2.9, 2.99 und 2.999. Auch diese Folge von Differenzenquotienten scheint gegen 3 zu streben, weshalb wir vermuten, dass die gesuchte Ableitung 3 ist.

2. Weg: Mit einem Spezialbefehl

Dieselben Resultate erhält man auch mit dem Spezialbefehl avgrc.

♦

B. Berechnen der Ableitung von f an einer Stelle x_0

2.9.3 Beispiel

Berechnen Sie die Ableitung von f: $x \mapsto x^2 - x$ an der Stelle $x_0=2$.

1. Weg

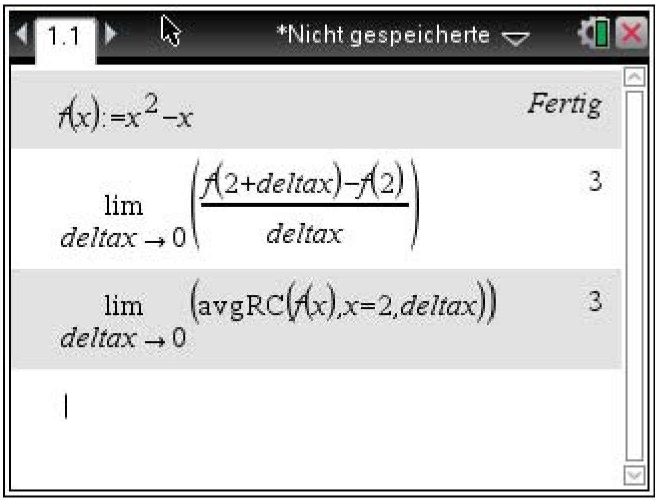
f(x):=x ^ 2▶– x Enter
limit((f(2+deltax)–f(2))/deltax, deltax, 0) Enter

Die Vermutung von Beispiel 2.7.2 erweist sich als richtig.

2. Weg

f(x):=x ^ 2▶– x Enter
limit(avgrc(f(x), x=2, deltax), deltax, 0) Enter

♦



2.10 Übungen

A. Fragen zum Grundstoff

Notieren Sie Ihre Antworten zu den folgenden Fragen. Manchmal reicht eine Zahl oder eine Formel, manchmal sind ein paar Sätze oder eine Skizze sinnvoll. Die Lösungen finden Sie im Text dieses Kapitels.

1. Wie wird bei Beispiel 2.2.1 „Anfahrendes Auto“ …
   a) … die Durchschnittsgeschwindigkeit des anfahrenden Autos zwischen den Sekunden 2 und 3 berechnet? Wie gross ist sie?
   b) … die Momentangeschwindigkeit bei Sekunde 2 berechnet? Wie gross ist sie?

2. Wie wird bei Beispiel 2.3.1 „Studium eines Funktionsgraphen“ …
   a) die Steigung m_s der Sekanten s durch die beiden Punkte $P(x_0, f(x_0))$ und $Q(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ auf dem Graphen von f berechnet? Wie gross ist sie?
   b) die Steigung m_t der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P(x_0, f(x_0))$ berechnet? Wie gross ist sie?
3. Wie wird bei Beispiel 2.4.1 „Abkühlung von Kaffee“ …
   a) die Temperatur T des Espressos nach exakt 3 Minuten berechnet? Wie hoch ist sie?
   b) die durchschnittliche Abkühlungsgeschwindigkeit im Zeitraum zwischen 3:00 und 4:00 Minuten berechnet? Wie gross ist sie?
   c) die momentane Abkühlungsgeschwindigkeit nach exakt 3:00 Minuten berechnet? Wie gross ist sie?
   d) die durchschnittliche Abkühlungsgeschwindigkeit im Zeitraum zwischen t_0 und $t_0+\Delta t$ Minuten berechnet? Wie gross ist sie?
   e) die momentane Abkühlungsgeschwindigkeit nach exakt t_0 Minuten berechnet? Wie gross ist sie?
4. Was ist ein Differenzenquotient, was ein Differentialquotient, was die Ableitung? Definieren Sie diese Begriffe für die Funktion $f: x \mapsto y$.
5. Wie kann man anhand des Graphen einer Funktion f herausfinden, ob f an einer bestimmten Stelle x_0 differenzierbar ist oder nicht? Geben Sie Beispiele für Funktionen an, die an der Stelle $x_0=0$ nicht differenzierbar sind.
6. Gegeben ist der Graph einer Funktion f. Wie bestimmt man graphisch einen Differenzenquotienten, wie die Ableitung $f'(x_0)$?

B. Frage zum Ergänzungsstoff

Notieren Sie Ihre Antworten zu der folgenden Frage. Manchmal reicht eine Zahl oder eine Formel, manchmal sind ein paar Sätze oder eine Skizze sinnvoll. Die Lösungen finden Sie im Text dieses Kapitels.

1. Der Verlauf eines Gleisstücks werde durch die Funktion f beschrieben. Weshalb ist es in diesem Zusammenhang wichtig, dass f überall differenzierbar ist?

C. Aufgaben zum Grundstoff

1. Ein anfahrendes Auto lege in t Sekunden den Weg $s(t)=1.5\cdot t^2$ Meter zurück.
   a) Welches ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit in den ersten 4 Sekunden?
   b) Welches ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen den Sekunden 3 und 4?
   c) Welches ist seine Momentangeschwindigkeit nach exakt 3 Sekunden?
   d) Welches ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen den Sekunden 4 und 5?
   e) Welches ist seine Momentangeschwindigkeit nach exakt 4 Sekunden?
   f) Welches ist seine Momentangeschwindigkeit nach exakt 5 Sekunden?
2. Wir untersuchen den Graphen der Funktion $f: x \mapsto 1.5\cdot x^2$.
   a) Welches ist die Steigung der Sekante s zwischen den beiden Stellen $x_0=0$ und $x_0+\Delta x=4$?
   b) Welches ist die Steigung der Sekante s zwischen den beiden Stellen $x_0=3$ und $x_0+\Delta x=4$?

c) Welches ist die Steigung der Tangente t an den Graphen von f an der Stelle $x_0=3$?

d) Welches ist die Steigung der Sekante s zwischen den beiden Stellen $x_0=4$ und $x_0+\Delta x=5$?

e) Welches ist die Steigung der Tangente t an den Graphen von f an der Stelle $x_0=4$?

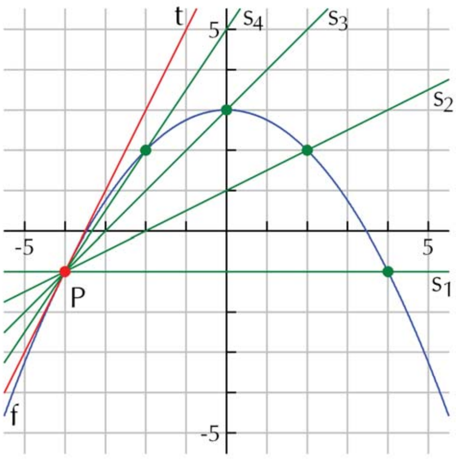
f) Welches ist die Steigung der Tangente t an den Graphen von f an der Stelle $x_0=5$?

3. Ein Stein wird (theoretisch im luftleeren Raum) fallen gelassen. Nach t Sekunden Fallzeit hat er den Weg $s(t)=\frac{1}{2}g\cdot t^2$ zurückgelegt, wobei $g=9.81\ m/s^2$ ist.

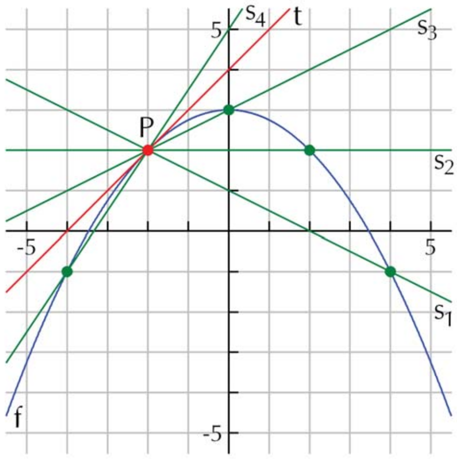
a) Welchen Weg legt der Stein in der ersten Sekunde zurück?
b) Welches ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit in der ersten Sekunde?
c) Welches ist seine Momentangeschwindigkeit nach exakt einer Sekunde?
d) Welchen Weg legt der Stein in den ersten 2 Sekunden zurück?
e) Welches ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit in den ersten 2 Sekunden?
f) Welches ist seine Momentangeschwindigkeit nach exakt 2 Sekunden?
g) Nach 50 m freiem Fall trifft der Stein auf dem Boden auf. Mit welcher Geschwindigkeit geschieht das?

4. Bestimmen Sie die Steigung der eingezeichneten Sekanten durch den Punkt P und die Steigung der Tangente im Punkt P des Graphen der Funktion f.

a) P(–4, –1)

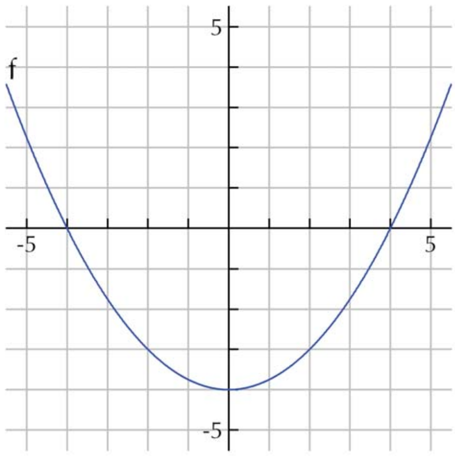


b) P(–2, 2)

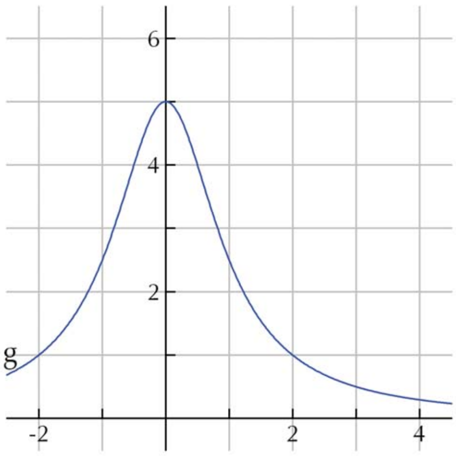


5. Bestimmen Sie graphisch die Ableitung der dargestellten Funktion an den angegebenen Stellen möglichst genau.

a) Funktion f, $x_0=-4$, $x_1=0$, $x_2=2$



b) Funktion g, $x_0=-1$, $x_1=0$, $x_2=2$



6. Zeichnen Sie sorgfältig den Graphen der Funktion f und bestimmen Sie graphisch die Ableitung von f an den angegebenen Stellen möglichst genau.

a) $f: x \mapsto 2x - 3$, $x_0 = -1$, $x_1 = 2$

b) $f: x \mapsto |x|$, $x_0 = -3$, $x_1 = 3$, $x_2 = 0$

c) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2$, $x_0 = -3$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$

d) $f: x \mapsto \log_2 x$, $x_0 = 1$, $x_1 = 4$

e) $f: x \mapsto \sin x$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}\pi$, $x_2 = \pi$ (x im Bogenmass)

f) $f: x \mapsto e^x$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -\ln 2$

7. Schätzen Sie mit einer aus mindestens 4 Gliedern bestehenden Folge von Differenzenquotienten die Ableitung von f an den angegebenen Stellen ab.

a) $f: x \mapsto 2x - 3$, $x_0 = -1$, $x_1 = 2$

b) $f: x \mapsto |x|$, $x_0 = -3$, $x_1 = 3$, $x_2 = 0$

c) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2$, $x_0 = -3$, $x_1 = 2$, $x_2 = 0$

d) $f: x \mapsto \log_2 x$, $x_0 = 1$, $x_1 = 4$

e) $f: x \mapsto \sin x$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}\pi$, $x_2 = \pi$ (x im Bogenmass)

f) $f: x \mapsto e^x$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -\ln 2$

8. Schätzen Sie mit einer aus mindestens 4 Gliedern bestehenden Folge von Differenzenquotienten die Ableitung von f an den angegebenen Stellen ab.

$f: x \mapsto \sqrt{4 - x}$ $x_0 = 0$, $x_1 = 3.99$, $x_2 = 4$

9. Ein Fahrzeug entfernt sich geradlinig von seinem Startpunkt. Der Graph rechts gibt den nach t Sekunden zurückgelegten Weg s an.

a) Welches ist seine Startgeschwindigkeit?

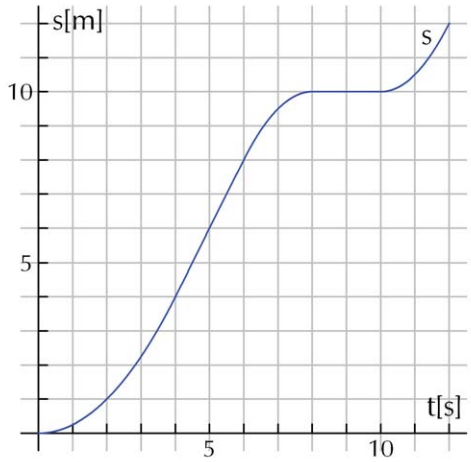
b) Wann ist die Geschwindigkeit konstant?

c) Was geschieht zwischen den Sekunden 8 und 10?

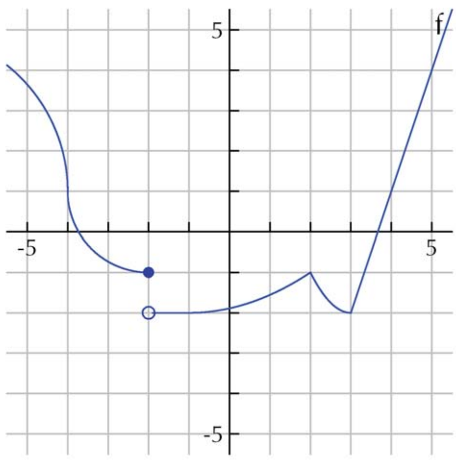
d) Welches ist die Durchschnittsgeschwindigkeit während der ersten 12 Sekunden?

e) Welches ist die Geschwindigkeit nach 2s?

f) Wann beschleunigt das Fahrzeug, wann bremst es ab?



10. Rechts ist der Graph einer Funktion f abgebildet. An welchen Stellen ist f nicht differenzierbar? Geben Sie den jeweiligen Grund an.



11. Wetterfrösche wissen es: Die Lufttemperatur T [°C] hängt davon ab, auf welcher Höhe h [m] über dem Meeresspiegel die Temperatur gemessen wird. Im Allgemeinen gilt: Je grösser h, desto niedriger ist T.

a) Was bedeuten die Differenzenquotienten
$$\frac{T(1000) - T(700)}{300} \text{ und } \frac{T(700 + \Delta h) - T(700)}{\Delta h}?$$

b) Welches ist ihr Vorzeichen?

c) Was bedeutet $T'(700)$?

d) Ist $T'(700)$ im Allgemeinen positiv oder negativ?

D. Anspruchsvollere Aufgaben zum Grundstoff

1. Ein anfahrendes Auto lege in t Sekunden den Weg $s(t)=1.5 \cdot t^2$ Meter zurück.
   a) Welches ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit in den ersten t_0 Sekunden?
   b) Welches ist eine Momentangeschwindigkeit nach genau t_0 Sekunden?
2. Ein anfahrendes Fahrzeug lege in t Sekunden den Weg $s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2$ Meter zurück. (Dabei bezeichnet a die Beschleunigung.)
   a) Welches ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit in den ersten t_0 Sekunden?
   b) Welches ist seine Momentangeschwindigkeit nach genau t_0 Sekunden?
3. Ein Stein wird (theoretisch im luftleeren Raum) fallen gelassen. Nach t Sekunden Fallzeit hat er den Weg $s(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$ zurückgelegt, wobei $g = 9.81 \text{m}/\text{s}^2$ ist.
   a) Welchen Weg legt der Stein in den ersten t_0 Sekunden zurück?
   b) Welches ist seine Durchschnittsgeschwindigkeit in den ersten t_0 Sekunden?
   c) Welches ist seine Momentangeschwindigkeit nach exakt t_0 Sekunden?
4. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f: $x \mapsto x^2$ an den Stellen
   a) $x_0=-3$ b) $x_1=-2$ c) $x_2=0$ d) $x_3=1$ e) $x_4=5$,
   indem Sie an jeder Stelle zunächst den Differenzenquotienten und anschliessend den Differenzialquotienten bilden.
5. In einen aufrecht stehenden zylinderförmigen und zunächst leeren Tank mit Radius r=1.2 m fliessen pro Sekunde 50 l Wasser. Mit welcher Geschwindigkeit steigt der Wasserspiegel an, und zwar nach exakt
   a) 10 s b) 20 s c) 60 s d) t_0 s?
6. Ausgelaufenes Öl bildet auf einem See einen Kreis, dessen Radius sich pro Minute um 2 m vergrössert. Mit welcher Geschwindigkeit nimmt die Kreisfläche dann zu, wenn der Radius 50 m misst?
7. Ein parallel zum Boden fliegendes Flugzeug überfliegt eine Radarstation in 8 km Höhe. Etwas später stellt die Crew der Radarstation fest, dass das Flugzeug 10 km von der Radarstation entfernt ist und der Abstand zwischen Radarstation und Flugzeug sich mit 600 km/h vergrössert. Welches ist die horizontale Geschwindigkeit des Flugzeugs?
8. Eine h=1.75 m grosse Frau bewegt sich mit v=1.5 m/s auf eine H=7 m hohe Strassenlaterne zu. Mit welcher Geschwindigkeit ändert sich die Länge s ihres von der Strassenlaterne erzeugten Schattens dann, wenn sie 3 m von der Strassenlaterne entfernt ist?
9. *Fensterln, Kiltgang:* Ein Geliebter möchte mithilfe einer 5 m langen Leiter seine Angebetete durch das Fenster ihres Zimmers besuchen. Das untere Leiterende steht 1 m von der Hauswand entfernt. In dem Moment, als der Geliebte durchs Fenster steigen will, erscheint ein Nebenbuhler und zieht das untere Leiterende mit einer konstanten Geschwindigkeit von 0.5 m/s von der Hauswand weg. Dadurch rutscht das obere Leiterende – und auf ihm der Geliebte – nach unten. Welches ist die Geschwindigkeit des oberen Leiterendes nach genau
   a) $t_0=1$ s b) $t_0=2$ s c) $t_0=4$ s d) $t_0=6$ s?
10. Im legendären Zürcher Stadion Letzigrund findet ein Rennen über 100 m statt. Ein Trainer will „seinen“ Läufer filmen. Er steht mit seiner Kamera genau auf der Höhe der Ziellinie und 5.00 m neben der Bahn „seines“ Läufers. Der Läufer benötigt

10.00 s, und wir nehmen an, dass er während des ganzen Rennens dieselbe Geschwindigkeit hat.

a) Mit welcher Geschwindigkeit verändert sich der Abstand zwischen dem Läufer und seinem Trainer nach exakt 5 Sekunden?

b) Mit welcher Winkelgeschwindigkeit muss der Trainer die Kamera nach exakt 5 Sekunden drehen, damit sein Läufer immer in der Mitte des Bildes bleibt?

11. Aus einem Tank wird Wasser abgelassen. Die Funktion V: $t \mapsto V(t)$ gibt den Inhalt des Tanks zum Zeitpunkt t an.

a) Wie gross ist die mittlere Ausflussgeschwindigkeit im Zeitintervall $[t_0, t_1]$?

b) Wie gross ist die Ausflussgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0?

c) Was können Sie über das Vorzeichen der Ausflussgeschwindigkeit sagen?

12. Die Funktion A: $t \mapsto A(t)$ gibt an, wie viele Autos seit 0:00 Uhr in einen Tunnel gefahren sind. Wie ist $A'(t)$ definiert, und wie kann $A'(t)$ gedeutet werden?

13. Untersuchen Sie, ob die Funktion an der Übergangsstelle zwischen den beiden Teilfunktionen stetig und/oder differenzierbar ist oder nicht.

a) $f : x \mapsto \begin{cases} x^2, & \text{falls } x \ge 0 \\ 0, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

b) $f : x \mapsto \begin{cases} x^2, & \text{falls } x \ge 0 \\ 1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

c) $f : x \mapsto \begin{cases} x^2, & \text{falls } x \ge 0 \\ x^3, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

d) $f : x \mapsto \begin{cases} x^2, & \text{falls } x \ge 1 \\ x^3, & \text{falls } x < 1 \end{cases}$

e) $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2, & \text{falls } x > 4 \\ 2\sqrt{x}, & \text{falls } 0 \le x \le 4 \end{cases}$

f) $f : x \mapsto \begin{cases} e^x, & \text{falls } x \ge 0 \\ x + 1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

14. a) Stellen Sie den Graphen der Funktion f in einem Koordinatensystem für $x \in [-1, +1]$ sorgfältig dar:

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{falls } x \ne 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}.$$

b) Ist f an der Stelle $x=0$ stetig?

c) Ist f an der Stelle $x=0$ differenzierbar?

15. a) Stellen Sie den Graphen der Funktion $f : x \mapsto |x|^{|x|}$ sorgfältig dar.

b) Ist f an der Stelle $x=0$ definiert? Wenn nein: Wie kann $f(0)$ definiert werden, damit f an der Stelle $x=0$ stetig wird? Ist f an der Stelle 0 dann differenzierbar?

16. Klären Sie anhand des Graphen der Funktion f ab, wo f differenzierbar ist und wo nicht.

a) f: $x \mapsto -|x+3|$

b) $f : x \mapsto \big||x-4|-3\big|$

c) $f : x \mapsto \sqrt{25-x^2}$

d) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

e) $f : x \mapsto |9-x^2|$

f) f: $x \mapsto x \cdot \sqrt{x+4}$

g) f: $x \mapsto \sqrt{x^2-9}$

h) f: $x \mapsto (x-3)^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

i) $f : x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

17. Die bei Beispiel 2.8.3 untersuchte Funktion ist z. B. an der Stelle $m=5$ nicht stetig und gemäss Satz 2.6.3. auch nicht differenzierbar.
Anderseits verläuft der Graph von f sowohl links als auch rechts von $m=5$ waagrecht, hat also die (Tangenten-)Steigung 0. Also existiert an der Stelle $m=5$ ein gemeinsamer

Wert der Tangentensteigungen, nämlich 0. Das bedeutet aber, dass f an der Stelle $m=5$ differenzierbar ist.
Was stimmt da nicht?

E. Aufgabe zum Ergänzungsstoff

1. In Ihrem Studentenleben und in Ihrem Privatleben treten Beziehungen zwischen zwei Grössen auf, die man durch Funktionen beschreiben kann.
   a) Geben Sie solche Funktionen an.
   b) Was bedeuten Differenzenquotient und die Ableitung bei diesen Funktionen konkret?
   c) Sind diese Funktionen auf ihrem ganzen Definitionsbereich D(f) differenzierbar?

F. Aufgaben für Freaks

1. Lösen Sie die Aufgabe D.9. für die Zeitpunkte
   a) $t_0=8$ s b) $t_0=7.99$ s c) $t_0=7.9999$ s d) $t_0=7.999999$ s
   e) $t_0=7.99999999$ s.
   f) Offenbar beschreibt die gefundene Funktion $h\colon\ t \mapsto h(t)$ für die Höhe des oberen Leiterendes über dem Boden die Wirklichkeit für diese Zeiten nicht gut. Untersuchen Sie, wie die Leiter und der Liebhaber wirklich nach unten gelangen.
2. Wie wird bei einer Geschwindigkeitskontrolle der Polizei die momentane Geschwindigkeit gemessen? Es gibt mehrere Methoden.
3. Viele Smartphones verfügen über ein eingebautes GPS. Es gibt Apps, die auf das GPS zugreifen und die momentane Geschwindigkeit angeben, mit der das Smartphone bzw. sein Besitzer unterwegs ist. Wie machen das diese Apps?