7. Interpolation mithilfe von Ableitungen

7.1 Überblick

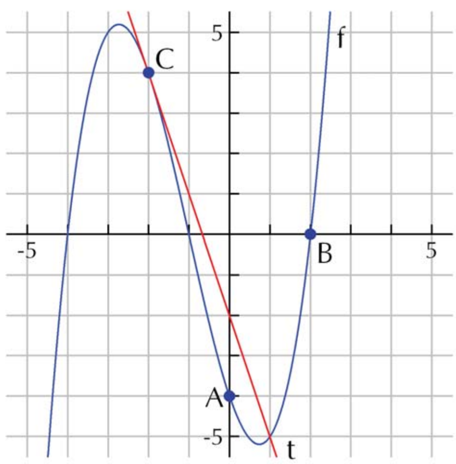
Die Interpolationsaufgabe haben wir bereits im Band *Analysis A*) untersucht. Als Auffrischung: Zu n vorgegebenen Punkten sind gesucht:
1. eine Funktion f, deren Graph durch alle n vorgegebenen Punkte verläuft,
2. ein Schätzwert für den Funktionswert f(x*) an einer beliebigen Stelle x*.

Wir greifen dieses Thema nochmals auf, weil wir die Aufgabenstellung nun deutlich erweitern können. Es müssen nicht mehr zwingend n Punkte (x_i, y_i) vorgegeben sein, sondern es können auch andere Bedingungen an die interpolierende Funktion f gestellt werden: $x_2=-2$ muss eine Minimalstelle sein, (4, 7) ist ein Wendepunkt, der Graph schneidet die x-Achse bei $x_3=1$ unter einem Winkel von 45° usw. Solche Bedingungen können mithilfe der Ableitungen f′ und f′′ der interpolierenden Funktion formuliert werden.
Zu diesem Thema gibt es eine enorme Fülle praktischer Anwendungen, von denen wir einige studieren werden.

7.2 Beispiele

A. Bestimmen einer ganzrationalen Funktion

7.2.1 Beispiel
Eine Polynomfunktion f mit Grad 3 verläuft durch die Punkte A(0, –4) und B(2, 0). Die Tangente an den Graphen von f im Punkt C(–2, …) ist $t: x \mapsto -3x-2$. Bestimmen Sie f.



Die Darstellung rechts dient *nur* zur Illustration. Aus der Figur dürfen wir keine Informationen ablesen; wir dürfen lediglich die Informationen in der Aufgabenstellung verwenden. Das Vorgehen:

(1) *Bauart der Funktion f bestimmen:*
f ist eine Polynomfunktion 3. Grades, also von der Bauart $f: x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$.

(2) *Bedingungen für f formulieren:*
Weil wir 4 Koeffizienten bestimmen müssen, benötigen wir 4 Gleichungen. Diese müssen aus dem Aufgabentext hervorgehen.
- Der Punkt A(0, –4) liegt auf dem Graphen von f, d. h. $f(0)=-4$.
- Der Punkt B(2, 0) liegt auf dem Graphen von f, d. h. $f(2)=0$.
- Der Punkt C(–2, …) liegt sowohl auf dem Graphen von f als auch auf der Tangente t. Daher gilt $f(-2)=t(-2)=4$.
- Die Tangentensteigung an der Stelle $x_c=-2$ ist $m_t=-3$, d. h. $f'(-2)=-3$.

(3) *Benötigte Ableitungen bestimmen:*
Um die letzte Bedingung mit den Unbekannten a, b, c und d formulieren zu können, bestimmen wir die Ableitung f′. Aus dem Ansatz bei (1) folgt $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

(4) *Die Bedingungen von (2) zu einem Gleichungssystem umformulieren:*

$f(0)=-4$:	$a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=-4$,	d. h. $d=-4$.
$f(2)=0$:	$a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c\cdot 2+d=0$,	d. h. $8a+4b+2c+d=0$.
$f(-2)=4$:	$a\cdot(-2)^3+b\cdot(-2)^2+c\cdot(-2)+d=4$,	d. h. $-8a+4b-2c+d=4$.
$f'(-2)=-3$:	$3a\cdot(-2)^2+2b\cdot(-2)+c=-3$,	d. h. $12a-4b+c=-3$.

(5) *Das entstandene Gleichungssystem auflösen:*
Im vorliegenden Fall hat es die Lösung $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$, $c=-3$, $d=-4$. Wir erhalten

$$f: x \mapsto \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 3x - 4.$$

♦

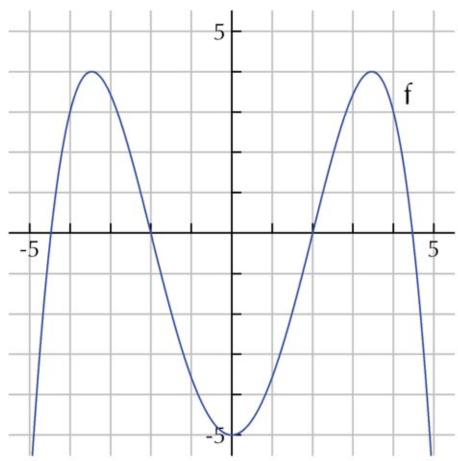
Wir halten das Vorgehen fest:

7.2.2 Verfahren zur Lösung einer Interpolationsaufgabe mit Ableitungen

(1) Bauart der Funktion f bestimmen
(2) Bedingungen für f formulieren
(3) Benötigte Ableitungen bestimmen
(4) Die Bedingungen von (2) zu einem Gleichungssystem umformulieren
(5) Das entstandene Gleichungssystem auflösen
(6) Evtl. Lösungskontrolle durchführen

7.2.3 Beispiel

Gesucht ist eine Polynomfunktion f von möglichst kleinem Grad, deren Graph symmetrisch bezüglich der y-Achse ist, durch den Punkt (0, –5) verläuft und in (2, 0) einen Wendepunkt hat.



(1) *Bauart der Funktion f bestimmen:*
f ist eine Polynomfunktion, also von der Bauart

$$f: x \mapsto a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots,$$

wobei zunächst noch unklar ist, wie viele Summanden auftreten. Diesen Punkt können wir erst am Schluss von (2) klären.

(2) *Bedingungen für f formulieren:*
Aus dem Aufgabentext geht hervor:

- f ist symmetrisch bezüglich der y-Achse. Daher treten in der Funktionsgleichung von f ausschliesslich gerade Exponenten auf. f ist also von der Bauart
$$f: x \mapsto a + cx^2 + ex^4 + \ldots,$$
wobei die Anzahl der Summanden noch immer unklar ist.
- Der Punkt (0, –5) liegt auf dem Graphen von f, d. h. $f(0)=-5$.
- Der Punkt (2, 0) liegt auf dem Graphen von f, d. h. $f(2)=0$.
- Der Punkt (2, 0) ist ein Wendepunkt von f, d. h., es ist notwendigerweise $f''(2)=0$.

Wir haben 3 Bedingungen zu erfüllen, welche 3 Gleichungen ergeben. Daher dürfen 3 unbekannte Grössen a, c und e in der Funktionsgleichung von f auftreten. Nun können wir festlegen: f ist von der Bauart

$$f: x \mapsto a + cx^2 + ex^4;$$

wenn wir noch den Term $+gx^6$ dazu nähmen, wäre der Grad von f nicht mehr möglichst klein. Ausserdem hätten wir bereits 4 Unbekannte, aber nur 3 Gleichungen, also keine eindeutige Lösung mehr.

(3) *Benötigte Ableitungen bestimmen:*
Um die letzte Bedingung mit den Unbekannten a, c und e formulieren zu können, bestimmen wir f''. Aus dem Ansatz bei (2) folgt $f'(x) = 2cx + 4ex^3$, $f''(x) = 2c + 12ex^2$.

(4) *Die Bedingungen von (2) zu einem Gleichungssystem umformulieren:*

$f(0) = -5$:	$a + c\cdot 0^2 + e\cdot 0^4 = -5$,	d. h. $a = -5$.
$f(2) = 0$:	$a + c\cdot 2^2 + e\cdot 2^4 = 0$,	d. h. $a + 4c + 16e = 0$.
$f''(2) = 0$:	$2c + 12e\cdot 2^2 = 0$,	d. h. $2c + 48e = 0$.

(5) *Das entstandene Gleichungssystem auflösen:*
Die Lösung ist $a=-5$, $b=\frac{3}{2}$, $c=-\frac{1}{16}$, und somit ist $f: x \mapsto -5 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{16}x^4$.

(6) *Lösungskontrolle durchführen:*
Die Bedingung $f''(x)=0$ bei (2) für den Wendepunkt ist gemäss Zusammenfassung 6.6.5 nur notwendig, aber nicht hinreichend. Deshalb ist die soeben berechnete Lösungsfunktion die einzige Funktion, welche alle Bedingungen überhaupt erfüllen *kann*. Es ist aber nicht sicher, dass sie es auch tatsächlich *tut*.
Wir überprüfen deshalb: Es ist wie gewünscht $f(0)=-5$ und $f(2)=0$. Ist aber $x=2$ tatsächlich eine Wendestelle? Ja, denn es ist

$$f'''(x) = -\frac{3}{2}x \text{ und speziell } f'''(2) = -3 \neq 0.$$

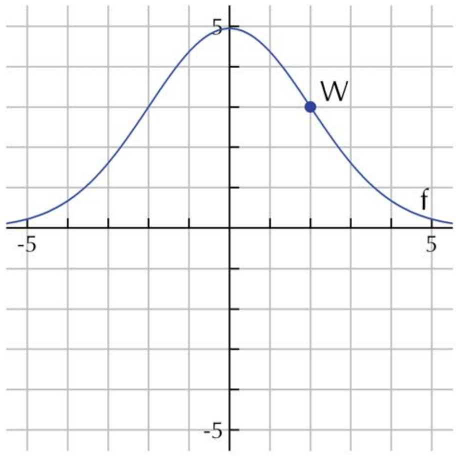
Gemäss Zusammenfassung 6.6.5 ist deshalb bei $x=2$ sicher eine Wendestelle. Somit erfüllt die gefundene Funktion f alle geforderten Bedingungen und ist die Lösung dieser Aufgabe.

♦

B. Bestimmen einer nichtrationalen Funktion

7.2.4 Beispiel: Glockenkurve
Welche Funktion des Typs $f: x \mapsto a\cdot e^{b\cdot x^2}$ hat in W(2, 3) einen Wendepunkt?

(1) *Bauart der Funktion f bestimmen*
f ist von der Bauart $f: x \mapsto a\cdot e^{b\cdot x^2}$.



(2) *Bedingungen für f formulieren:*
Weil wir 2 Koeffizienten bestimmen müssen, benötigen wir 2 Gleichungen.
- Der Punkt W(2, 3) liegt auf dem Graphen von f, d. h. $f(2)=3$.
- Der Punkt W(2, 3) ist ein Wendepunkt von f, d. h. $f''(2)=0$.

(3) *Benötigte Ableitungen bestimmen:*
Um die zweite Bedingung mit den Unbekannten a und b formulieren zu können, bestimmen wir $f''(x)$.
Aus dem Ansatz bei (1) folgt zunächst mit der Kettenregel

$$f'(x) = 2abx\cdot e^{b\cdot x^2},$$

anschliessend mit der Produkt- und der Kettenregel

$$f''(x) = (4ab^2x^2 + 2ab)e^{b\cdot x^2}.$$

(4) *Die Bedingungen von (2) zu einem Gleichungssystem umformulieren:*

$f(2)=3$: $\quad a\cdot e^{b\cdot 4} = 3.$ **[7.1]**

$f''(2)=0$: $\quad (16ab^2 + 2ab)e^{4b} = 0.$ **[7.2]**

(5) *Das entstandene Gleichungssystem auflösen:*
Wir dividieren [7.2] durch [7.1]:

$$\underbrace{\frac{(16ab^2 + 2ab)\cdot e^{4b}}{a\cdot e^{4b}}}_{16b^2+2b} = \underbrace{\frac{0}{3}}_{0}$$

Die quadratische Gleichung $16b^2+2b=0$ hat die beiden Lösungen

$$b_1=0 \text{ und } b_2=-\tfrac{1}{8}.$$

a bestimmen wir aus [7.1]:

$$a\cdot e^{b\cdot 4} = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{e^{4b}}, \text{ d. h. } a_1 = \frac{3}{e^0} = 3,\ a_2 = \frac{3}{e^{-1/2}} = 3\cdot\sqrt{e}.$$

Wir erhalten als Lösungen die beiden Funktionen

$$f_1 : x \mapsto 3\cdot e^0 = 3,$$

also eine konstante Funktion, und

$$f_2 : x \mapsto 3\sqrt{e}\cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}.$$

Die konstante Funktion f_1 hat aber sicher keinen Wendepunkt, sodass f_2 als einzige mögliche Lösungsfunktion übrig bleibt.

(6) *Lösungskontrolle durchführen:*
Es ist $f_2'''(x) = -\frac{1}{64}\cdot 3x(x^2-12)\cdot e^{(4-x^2)/8}$ und $f'''(2)=f_2'''(2) = \frac{3}{4} > 0. > 0.$ Gemäss Zusammenfassung 6.6.5 ist $x=2$ tatsächlich Wendestelle von f_2. Weil zudem $f_2(2)=3$ ist, erfüllt f_2 beide bei (2) gestellten Bedingungen und ist die Lösung dieser Aufgabe.

♦

C. Ergänzung: Bestimmen einer gebrochenrationalen Funktion

7.2.5 Beispiel

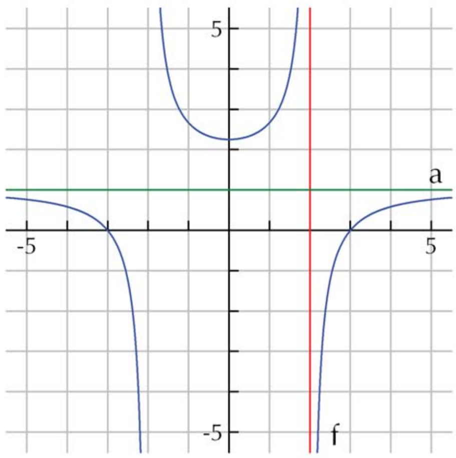
Welche gebrochenrationale Funktion $f : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{x^2 + D}$ hat bei $x=3$ eine Nullstelle, bei $x=2$ einen Pol, bei $x=0$ eine Minimalstelle und die Asymptote $a: x \mapsto 1$?

(1) *Bauart der Funktion f bestimmen:*

f ist von der Bauart $f : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{Ax^2 + Bx + C}{x^2 + D}.$

(2) *Bedingungen für f formulieren:*
Weil wir 4 Koeffizienten bestimmen müssen, benötigen wir 4 Gleichungen.

- Bei $x=3$ ist eine Nullstelle von f, d. h. $f(3)=0$.
- Bei $x=2$ ist eine Polstelle, d. h. $q(2)=0$.
- Bei $x=0$ ist eine Minimalstelle, d. h., es ist notwendigerweise $f'(0)=0$.
- Die Asymptote ist $a: x \mapsto 1$, d. h. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$.



(3) *Benötigte Ableitungen bestimmen:*
Um die dritte Bedingung mit den Unbekannten A, B, C und D formulieren zu können, bestimmen wir f′(x) mithilfe der Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{(x^2+D)\cdot(2Ax+B)-(Ax^2+Bx+C)\cdot 2x}{(x^2+D)^2} = \frac{-Bx^2+2ADx-2Cx+BD}{(x^2+D)^2}.$$

(4) *Die Bedingungen von (2) zu einem Gleichungssystem umformulieren:*

$f(3)=0$: $\quad \frac{9A+3B+C}{9+D}=0 \overset{D\neq -9}{\Rightarrow}$ $\quad 9A+3B+C=0.$ **[7.3]**

$q(2)=0$: $\quad 4+D=0,$ $\quad$ d. h. $D=-4$.

$f'(0)=0$: $\quad \frac{BD}{D^2} \overset{D\neq 0}{=} \frac{B}{D}=0,$ $\quad$ d. h. $B=0$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$: $\quad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{Ax^2+Bx+C}{x^2+D} \overset{\text{kürzen mit } x^2}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{A+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}}{1+\frac{D}{x^2}} = \frac{A}{1}=1,$ $\quad$ d. h. $A=1$.

(5) *Das entstandene Gleichungssystem auflösen:*
Das ist im vorliegenden Fall ziemlich leicht. Aus den Gleichungen bei (4) liest man von unten nach oben ab: $A=1$, $B=0$, $D=-4$, und aus [7.3] folgt schliesslich $C=-9$. Die gesuchte Funktion ist

$$f: x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2-9}{x^2-4}.$$

(6) *Lösungskontrolle durchführen:*
Die Bedingung $f'(0)=0$ bei (2) für die Minimalstelle von f ist gemäss Zusammenfassung 6.5.5 nur notwendig, aber nicht hinreichend. Wir überprüfen deshalb, ob $f''(0)>0$ ist. Wegen

$$f''(x)=\frac{-30x^2-40}{\left(x^2-4\right)^3} \text{ ist } f''(0)=\tfrac{5}{8}>0,$$

d. h., $x=0$ ist gemäss Zusammenfassung 6.5.5 sicher eine Minimalstelle von f. f erfüllt auch die anderen Bedingungen und ist somit die Lösung dieser Aufgabe.

♦

7.3 Eine Anwendung: Schienen- und Strassenbau I

Beim Schienen- und beim Strassenbau müssen sehr oft zwei gerade verlaufende Streckenabschnitte s_1 und s_2 durch ein geeignetes Kurvenstück miteinander verbunden werden. Wie wird ein solches Kurvenstück in der Praxis festgelegt?
In diesem Abschnitt lernen wir einige wichtige Überlegungen kennen.