Beräkna ett nytt tal från det föregående

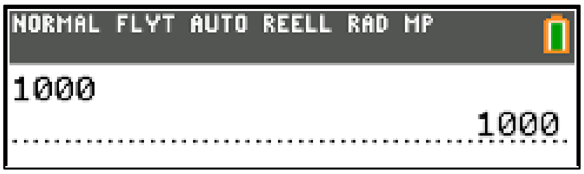
En uppräkning av tal kallas för en talföljd. Ofta bildas talföljder enligt någon enkel regel. Exempel på sådana talföljder är

1, 3, 5, 7, 9   och   1, 2, 4, 8, 16

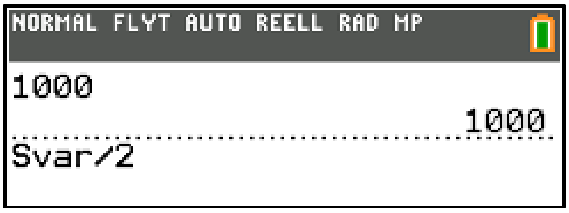
Ser du vad reglerna är? Först är det en konstant *differens* mellan talen (nämligen 2). Det kallas för en i *aritmetisk* talföljd. I nästa fall är det i stället en konstant *kvot* mellan talen (nämligen 2). Det kallas för en geometrisk talföljd.

Sådana här talföljder kan du enkelt skapa i grund-fönstret på räknaren.

- Börja med att skriva in 1000 i grundfönstret och tryck sedan på [enter]. Då får vi resultatet 1000 förstås. Det är det *sist beräknade värdet* på räknaren.

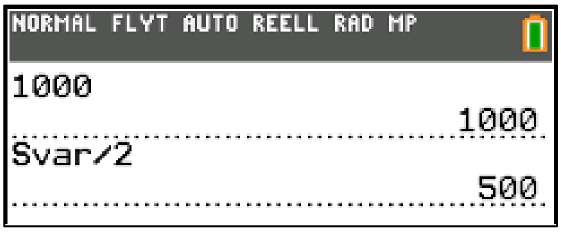


- Tryck nu på tangenten divisionstangenten [÷] och därefter på tangenten [2]. Stanna upp där.



På skärmen har nu instruktionen Svar kopierats in. Med det menas det sist beräknade svaret (resultatet) och det är ju 1000.

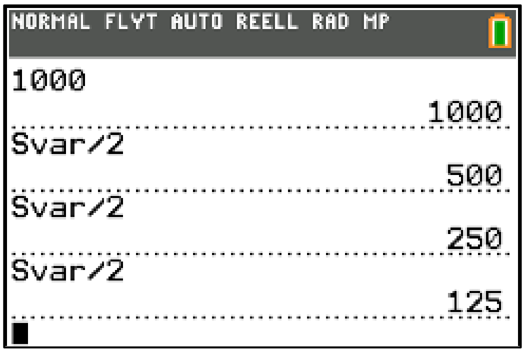
- Tryck nu på [enter] igen. Då får vi förstås svaret 500.



- Fortsätt nu att trycka på [enter] en gång till och sedan flera gånger till. Vad händer?

Jo, instruktionen "*ta sista svaret och dividera med 2*" upprepas igen. Vi får alltså en talföljd där svaret blir hälften så stort varje gång vi trycker på [enter].

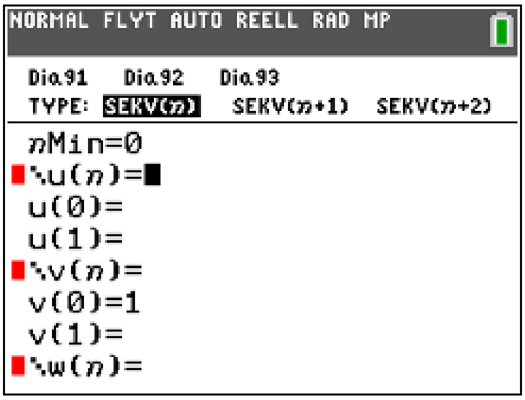
Se skärmbilden i nedan.



På räknaren finns speciella verktyg för att hantera sådana här operationer. Gör då så här:

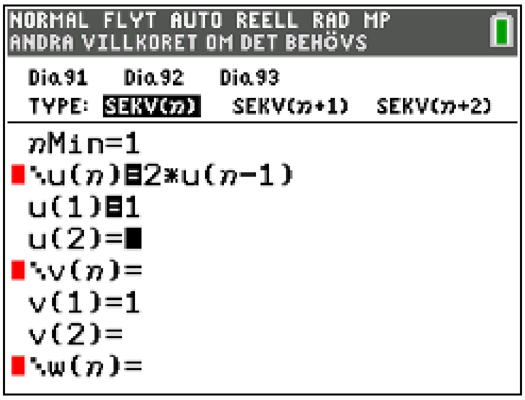
Tryck på tangenten [mode]. Ändra nu rad 4 till **SEKV**. Då ställer man in räknaren för att arbeta med talföljder.

Tryck på [y=]. I detta inmatningsfönster för talföljder kan du definiera 3 talföljder. De heter **u**, **v** och **w**. Du hittar dem på knappsatsen som [2nd]-funktioner till [7], [8] och [9].

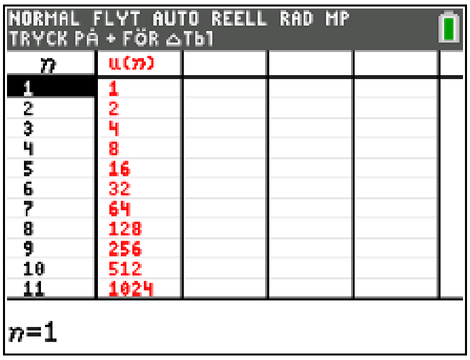


Betrakta nu talföljden där startvärdet $a_1 = 1$ och formeln för talföljden är $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$. Du ser alltså att nästa tal i följden beräknas utifrån föregående tal.

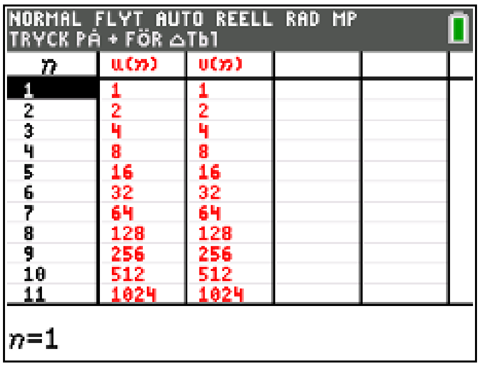
För att skriva in denna talföljd och generera en tabell med värden så är nMin = 1 eftersom indexet för vår inledande term är a_1. Notationen $u(n)$ ersätter notationen a_n. Definiera nu $u(n)$ enligt skärmbilden. Ange $u(1)$ till 1 eftersom $a_1 = 1$.



Tryck nu [2nd] [table] att ta fram en tabell.



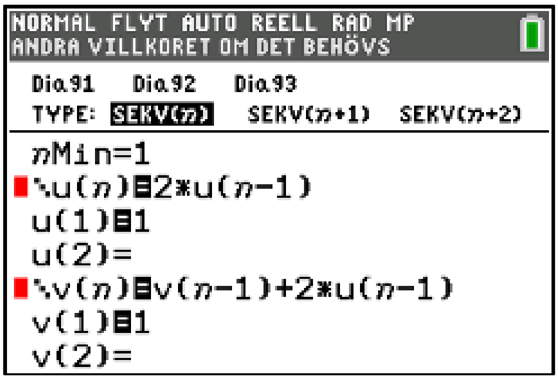
Man kan också skapa samma talföljd genom att skriva in formeln $v(n)=2^{n-1}$ där $v(1)=1$. I det första fallet skapade vi de olika termerna i talföljden genom att beräkna en ny term utifrån den föregående. Vi har då en formel i ***rekursiv*** form.



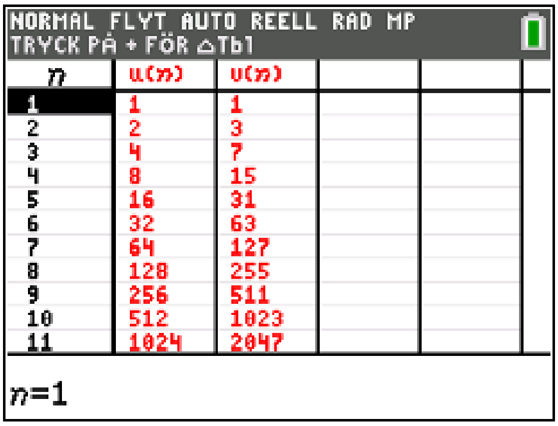
1. Ändras värdet för varje term i konstant hastighet, med avtagande hastighet eller med ökande hastighet?

En *summa* av termer I en talföljd kallas för en *serie*.

Nu ska du hitta den kumulerade summan av termerna i talföljden $u(n)$. Detta kommer att definieras som en talföljd där summan för den n:e termen, $v(n)$, är summan för den föregående termen, $v(n\text{-}1)$, plus nästa term i sekvensen $u(n)$, som är $2 \cdot u(n-1)$. Definiera alltså denna talföljd enligt skärmbilden i nästa spalt.



Tryck på [2nd] [table] för att visa tabellen.



$v(n)$ visar nu den kumulerade summan av talen i kolumnen för $u(n)$.

Talen i kolumnen för $u(n)$ kan också skapas med formeln $u(n)=2^{n-1}$ som också kan skrivas som $u(n)=\dfrac{2^n}{2}$.

2 Kan du hitta en formel som inte är rekursiv och direkt beräknar talen i kolumnen för $v(n)$?

____

Titta på triangelmönstren nedan, där vi visar de första fyra stegen. Antag att vi vill veta hur många prickar det är i figur nr 10?

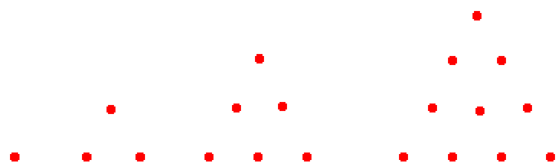
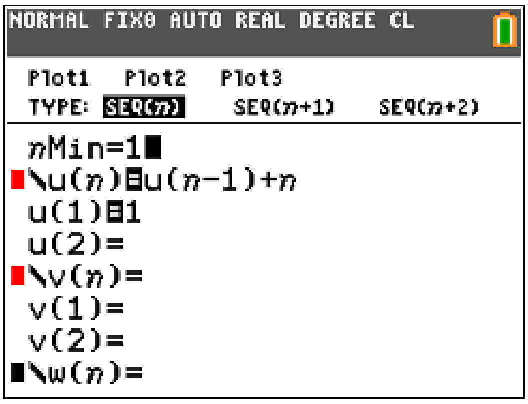
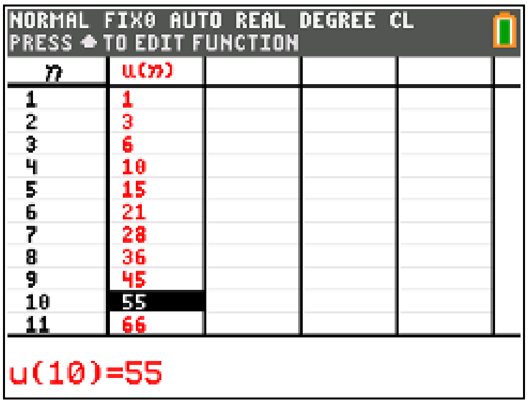


fig 1 *fig 2* *fig 3* *fig 4*

Om vi tittar på figur 3 till exempel så ser vi att antalet prickar där är antalet prickar i föregående

figur, dvs. i figur 2, plus det antal prickar som figurnumret anger (3 st).
Samma sak gäller om vi går till figur 4. Antalet prickar där är antalet prickar i figur 3 plus 4 till eftersom det är figur 4. Vi har alltså funnit ett mönster och kan skriva in en rekursiv formel.

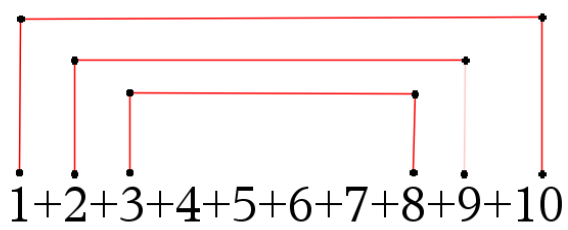




I figur 10 har vi alltså 55 prickar. Se tabellen ovan.

Vad vi gjort nu är att vi har beräknar summan av en s.k. *aritmetisk* serie.

Titta på talen i figuren nedan. Om vi adderar 1 och 10, 2 och 9, 3 och 8, 4 och 7 och till sist 5 och 6 så får vi 5 par med summan 11. Tillsamman blir det $5 \cdot 11 = 55$.



Man kan också sätta upp talen så här. Vi har nu valt de 10 första udda talen. Först i stigande ordning och sedan på andra raden i fallande ordning.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
19	17	15	13	11	9	7	5	3	1
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20

Vi ser att summan av alla par lodrät är 20. Vi har 10 sådana par. Det blir 200. Sedan får vi ju dela med 2 för att undvika dubbelräkning. Summan blir alltså 100.

Summan av alla par blir då med en formel

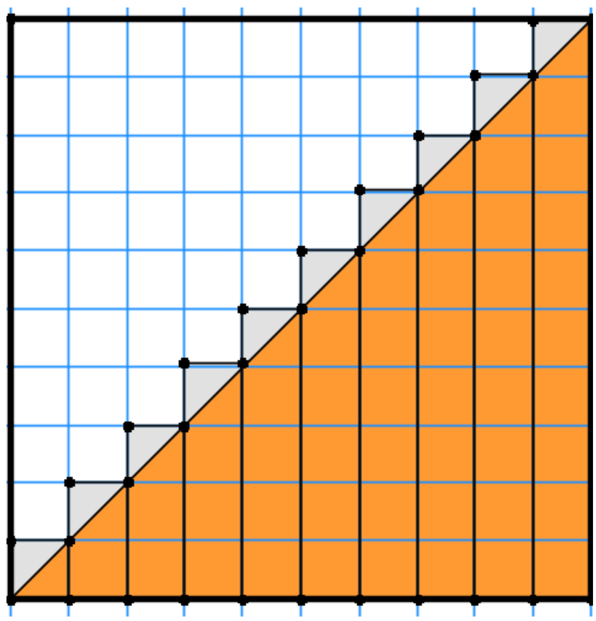
$$\text{antal termer} \cdot \frac{(\text{minsta term} + \text{största term})}{2}$$

För triangeltalen blir det då

$$10 \cdot \frac{1+10}{2} = 55$$

Om vi tittar på trianglarna i figuren så ser vi att de byggs upp av talen

1 + 2 + 3 + 4 + .. .



Hur ska vi då beräkna summan för sådan talserie utifrån figuren ovan? Betrakta trappan i figuren som är byggd av kvadratiska block. Den stora kvadraten är här gjord som en 10×10 kvadrat. Summan av alla block i trappan är halva kvadraten (det orangea fältet) plus alla de grå trappstegen, som är halva kvadrater. De har ju arean 1/2.

Om figuren nu är en $n \times n$ kvadrat så består hela trappan av

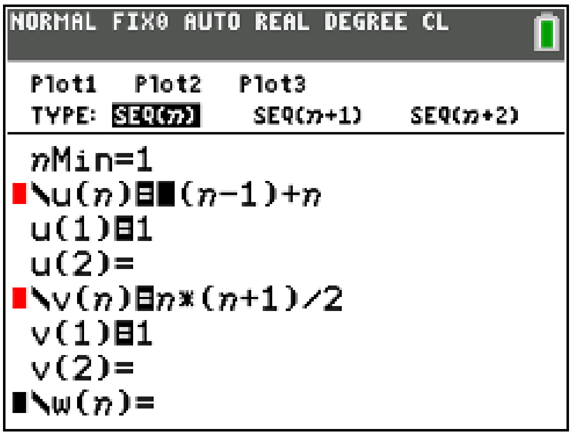
$\frac{n^2}{2}$ block (det orangea fältet) +

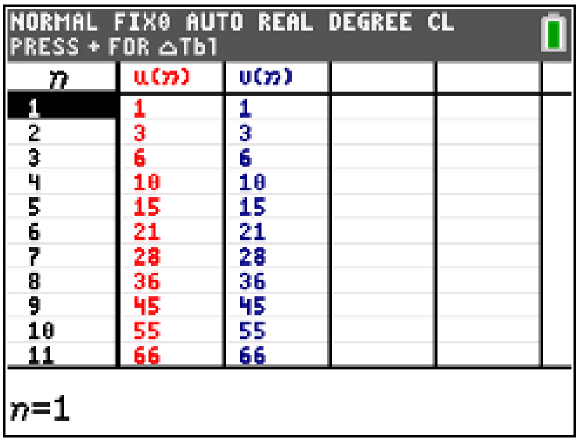
$n \cdot \frac{1}{2}$ block (trappstegen)

Totala antalet block blir då

$$\frac{n^2}{2} + n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Med detta geometriska bevis har vi fått en annan formel för antalet prickar. Vi kan skriva in den i editorn för talföljder. Tabellen visar att vi får samma resultat.

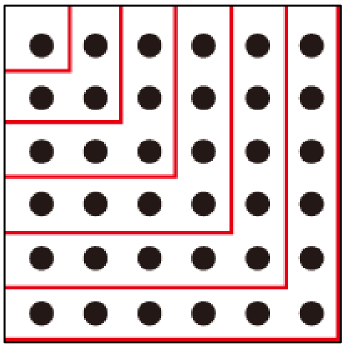




Den senare formeln är naturligtvis elegantare eftersom den direkt ger antalet prickar i triangelmönstret för vilken figur som helst. För många talföljder kan det dock vara svårt att komma fram till en formel i sluten form.

Vi återkommer här till hur man beräknar summan av ett antal udda tal. På förra sidan beräknade vi att summan för de första 10 talen blev 100.

3. Bevisa nu på *två* olika sätt att summan av de första n udda talen är lika med n^2. Ett udda tal kan skrivas som $2n$-1.
Bevisa först genom formeln för en aritmetisk summa.
Visa sedan att summan blir n^2 genom att studera följande figur.



Avslutningsvis:

Bestäm en rekursiv formel som passar in på talföljden

2, 3, 6, 18, 108, …

Ledtråd: Tänk på *Fibonaccis talföljd* men byt ut addition mot multiplikation.