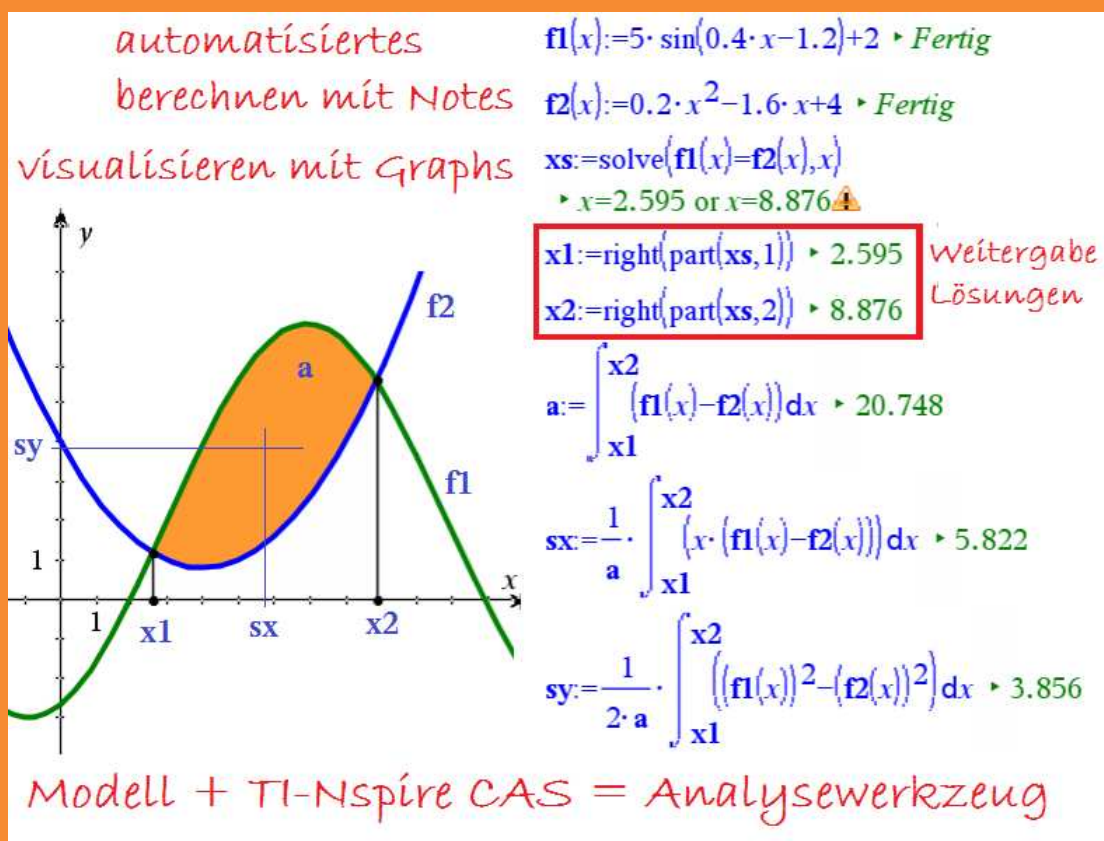


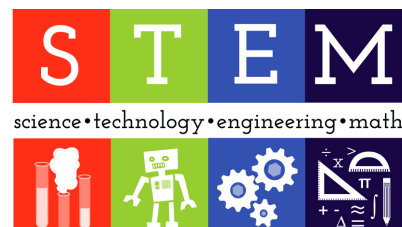
Berechnungsblätter mit der Applikation Notes TI-Nspire CAS

mathematisch, technische Anwendungen



Diese Unterlage entstand im Rahmen eines T³-Workshops (T³ = Teachers Teaching with Technology). T³ Schweiz ist ein Lehrerfortbildungsnetzwerk, welches sich an interessierte Lehrerinnen und Lehrer richtet, die sich zum sinnvollen Einsatz digitaler Werkzeuge im MINT-Unterricht informieren und Erfahrungen austauschen wollen.

MINT = Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften, Technik
oder im englischen Sprachraum
STEM = Science, Technology, Engineering, Math



Zurzeit unterrichte ich an einer höheren Fachschule für Technik. Unsere Studenten investieren sehr viel ihrer Zeit, um die Grundlagenfächer Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften zu erlernen.

Daher sollte unser Unterricht dem Studenten einerseits die Zusammenhänge zwischen den Grundlagenfächer erkennbar machen, andererseits aufzeigen, dass das Erlernte in seinem späteren Beruf anwendbar ist.

Der TI-Nspire CAS ist ein ausgezeichnetes Werkzeug um den MINT-Unterricht zu unterstützen. Mathematik lässt sich anschaulich und verständlich vermitteln und es können auch realitätsbezogene Modelle aus Naturwissenschaften und Technik gerechnet und analysiert werden.

Leider wird das grosse Potenzial des Rechners von Lehrern und Studenten häufig nicht ausgeschöpft. Die zahlreichen Applikationen werden nicht verwendet, sondern nur im „Scratchpad“ gerechnet. Meine langjährigen Unterrichtserfahrungen zeigen, dass der Einstieg in den Rechner vom Lehrer unterstützt werden muss. Dazu braucht es gezielte Instruktionen sowohl in der effektiven Bedienung als auch in einem sinnvollen Einsatz des Rechners. Unser Ziel sollte es sein, die Studenten soweit zu bringen, dass sie ihre eigenen Problemstellungen mit Hilfe des Rechners lösen können.

Die vorliegende Unterlage zeigt vor allem Anwendungen in der Applikation Notes und wie die verschiedenen Applikationen untereinander verknüpft werden können.

In Kapitel 1 werden kurz einige Unterrichtsmittel für einen CAS-gerechten Unterricht von der TI-Datenbank vorgestellt. Dann folgt eine Übersicht der Dokumentenstruktur des Rechners. Kenntnisse über die Dokumentenstruktur werden die Bedienung und das Vernetzen der verschiedenen Applikationen des Rechners erleichtern.

In Kapitel 2 wird der Vorteil bei der Durchführung von Berechnungen in Notes mit Beispielen gezeigt. Es wird eine Strategie entwickelt, wie Berechnungen in Berechnungsblätter automatisiert werden können.

Im Zeitalter des CAS-Rechners wird im Mathematikunterricht das früher dominante Thema der Kurvendiskussion etwas in den Hintergrund gerückt. An dessen Stelle tritt der Umgang mit Daten durch die Kurvenanpassung.

Im Kapitel 3 „Von Daten zur Funktion“ wird dies aufgezeigt. Mit Hilfe der Regression werden aus Daten Funktionen ermittelt. Damit lassen sich Prognosen erstellen oder zur Beschreibung von temperaturabhängigen Materialwerten Polynome.

Im letzten Kapitel 4 werden einige technische Anwendungen aus der Wärme- und Strömungslehre vorgestellt.

Oktober 2019, Benno Frei

1 Überblick TI-Nspire CAS	1
1.1 TI-Datenbank mit Unterrichtsmaterialien	1
1.2 Dokumentstruktur des Rechners	2
1.3 Dokumentübersicht	3
2 Arbeiten mit Notes	4
2.1 Vergleich der Applikation Calculator mit Notes.....	4
2.2 Berechnungsstrategie in der App Notes	5
2.3 Beispiel 1: Zwei Funktionsgraphen, Flächenschwerpunkt	7
2.4 Beispiel 2: Wärmetauscher	8
2.5 Beispiel 3: Auflagerkräfte beim Stützbalken	9
2.6 Beispiel 4: Kräftegleichgewicht Wandkran.....	10
2.7 Beispiel 5: Gleichmässig beschleunigte Bewegung	12
2.8 Beispiel 6: Optimierung, minimale Kosten.....	14
3 Von Daten zur Funktion	15
3.1 Kurvenanpassung durch Polynomfunktionen	15
3.2 Arbeiten mit dem Programmeditor	15
3.3 Polynom n-ten Grades als Ansatz für n+1 Datenpunkte	17
3.4 Regression mit dem TI-Nspire CAS	18
3.5 Prognosemodell CO ₂ - Gehalt in der Atmosphäre.....	22
3.6 Temperaturabhängige Materialwerte.....	24
4 Modelle aus der Technik	27
4.1 Stirlingmotor	27
4.2 Erzwungene Konvektion.....	30
4.3 Berechnung einer Rohrverzweigung.....	33
4.4 Wärmeübergang an berippten Flächen.....	36
4.5 Ausflussmodell.....	38

Berechnungsblätter mit der Applikation Notes ^{TI-Nspire CAS}
 mathematisch, technische Anwendungen
 Benno Frei, T³-Schweiz, Oktober 2019
 Feedback an freibe@bluewin.ch

1 Überblick TI-Nspire CAS

1.1 TI-Datenbank mit Unterrichtsmaterialien

Der Link <https://ti-unterrichtsmaterialien.net/materialien> führt zur TI-Datenbank mit zahlreichen, wertvollen Unterrichtsmaterialien. Im Folgenden einige Beispiele von TI-Heften für einen CAS-gerechten Mathematikunterricht.

Quadratische Funktionen und Gleichungen, 2009

Lineare Funktionen und Gleichungen, 2011

Funktionen und Modelle, 2014

von Benno Frei, René Hugelshofer, Robert Märki

Diese drei Publikationen enthalten nebst kurzen theoretischen Einschüben vor allem eine reiche Auswahl von Aufgaben von verschiedenem Schwierigkeitsgrad so wie viele Anwendungen aus verschiedenen Gebieten. Das Material eignet sich deshalb bei geeigneter Auswahl durch die Lehrperson für verschiedene Ausbildungstypen und Leistungsniveaus. Auch im CAS-Zeitalter sind gewisse „handwerkliche“ Fähigkeiten unverzichtbar. Wir haben aus diesem Grunde auch viele Trainings-Aufgaben aufgenommen, welche ohne jegliche Hilfsmittel zu lösen sind.



Daneben haben wir aber einen CAS-gerechten Zugang zu vielen Themenbereichen gewählt. In Mathematik und Naturwissenschaften spielen Parameter eine wichtige Rolle. Die Variation von Parametern führt zu einer dynamischen Betrachtungsweise der Mathematik. Mit Hilfe von Schieberegler können die Studenten den Einfluss von Parametern erforschen. Der Wechsel zwischen graphischer Veranschaulichung mit Hilfe von Geometriewerkzeugen und der konkreten Lösung mit CAS erweist sich dabei als sehr motivierend und effizient für den Lernprozess.

Weitere zwei ausgezeichnete TI-Hefte für einen CAS-gerechten Mathematikunterricht.

Differenzial- und Integralrechnung, 2010

von Robert Märki

Komplexe Zusammenhänge und Systeme sind im Prinzip mit mathematischen Methoden in Modellen darstellbar und damit prognostizierbar und in einem gewissen Sinne „verstehbar“. Mathematik wird damit zu einem bedeutsamen Instrument für das Verständnis der Grundstrukturen der Welt.

Kombinatorik, mit einer kurzen Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, 2012

von Renato Burkart, René Hugelshofer

Zu jedem Thema wird zuerst ein Musterbeispiel vorgelegt. Damit können die Studierenden die nachfolgenden Aufgaben selbständig lösen. Diese Unterrichtseinheit eignet sich deshalb auch für selbstorientiertes Lernen (SOL).

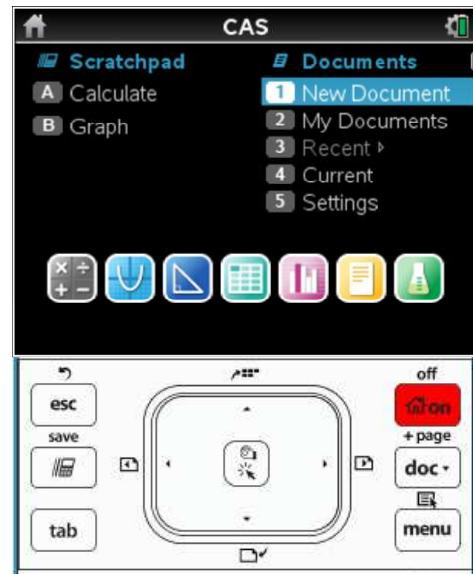


1.2 Dokumentstruktur des Rechners

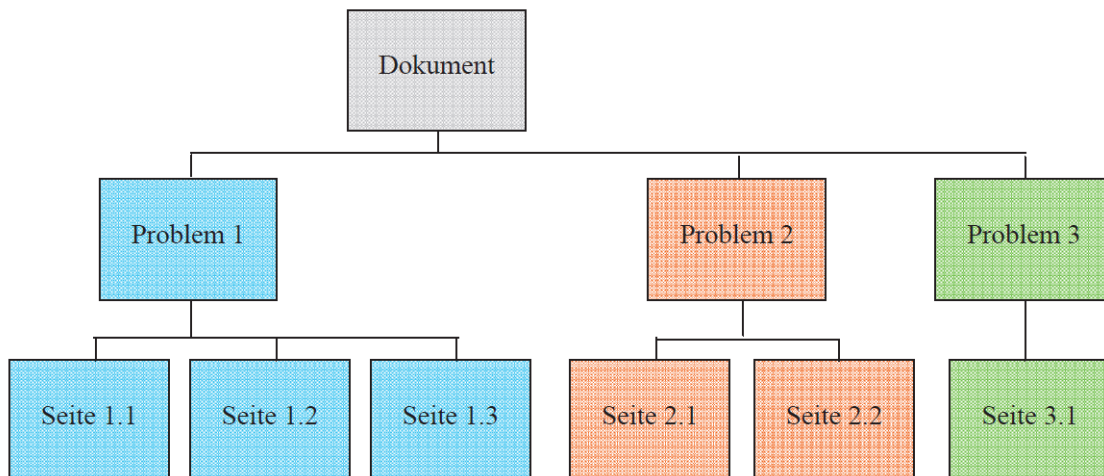
Dokument: Eine Datei, in der alles gesammelt wird heisst *Dokument*. Ein Dokument kann als *tns-Datei* gespeichert werden.

Probleme: Innerhalb eines Dokuments können verschiedene *Probleme* definiert werden. Jedes Problem kann aus mehreren *Seiten* bestehen.

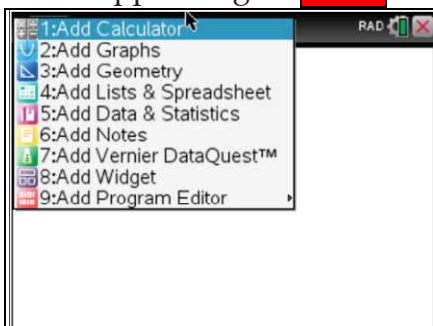
Seite, Applikationen (Apps): Jede Seite ist mit einer der sieben *Applikationen* verbunden (*Calculator, Graphs, Geometry, Lists & Spreadsheet, Data & Statistics, Notes, Vernier DataQuest*). Die Applikationen werden kurz als *Apps* bezeichnet.



Struktur eines Dokuments



Neue App einfügen: **Ctrl i**

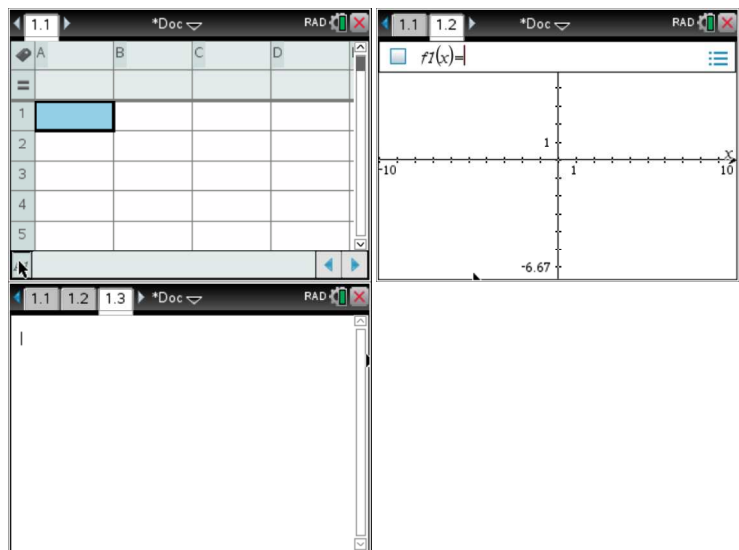


Apps

1.1 Lists & Spreadsheet

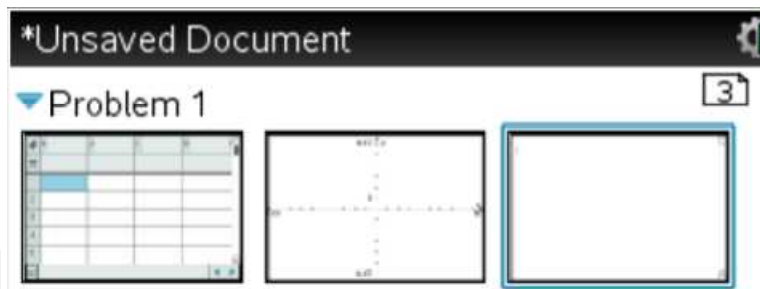
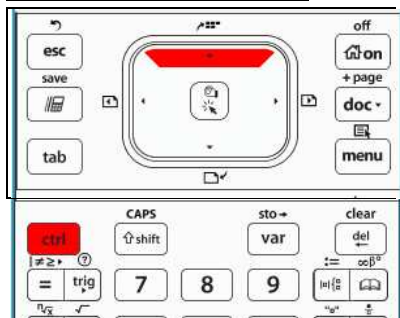
1.2 Graphs

1.3 Notes



1.3 Dokumentübersicht

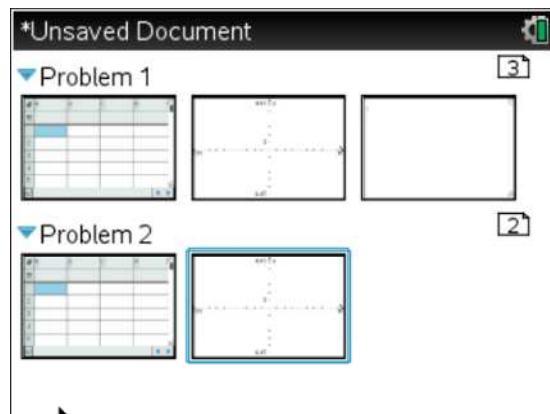
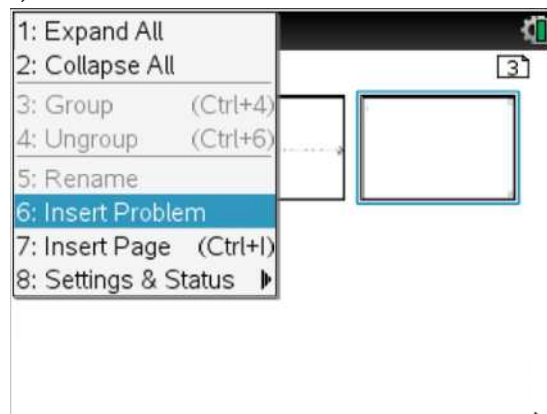
Ctrl, Pfeil nach oben



Apps: Lists & Spreadsheet, Graphs, Notes

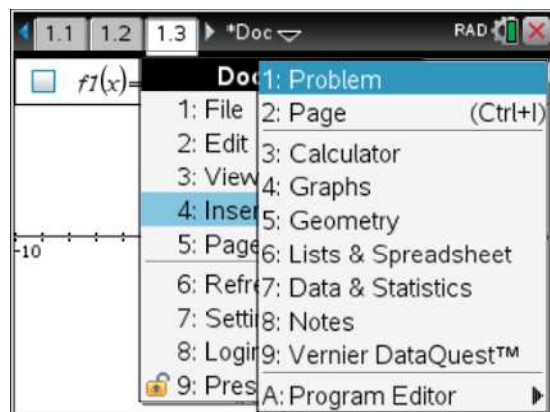
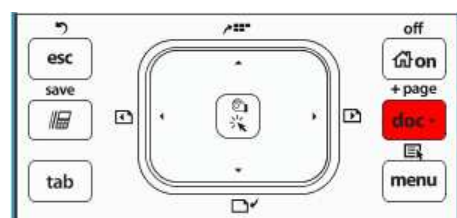
Einfügen eines neuen Problems in der Dokumentübersicht oder aus einer App

1) von der Dokumentübersicht



2) aus einer App

Doc 4:Insert 1:Problem





Der wichtigste Unterschied zwischen einem *Problem* und einer *Seite* liegt in der Behandlung von Variablen. Variable, die innerhalb eines Problems festgelegt werden, behalten über alle Seiten des Problems ihre Bedeutung. Das heisst, wenn der Wert einer Variablen auf irgendeiner Seite eines Problems verändert wird, dann gilt dieser neue Wert auch auf allen übrigen Seiten des Problems. Sobald ein neues Problem eröffnet wird, gelten in diesem die früheren Variablendefinitionen nicht mehr.

Beachte: TI-Nspire CX CAS macht keinen Unterschied zwischen Gross- und Kleinbuchstaben.

2 Arbeiten mit Notes

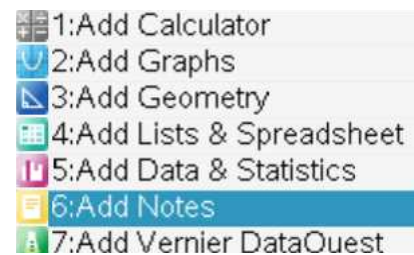
2.1 Vergleich der Applikation Calculator mit Notes

In zwei Apps können mathematische Berechnungen durchgeführt werden:

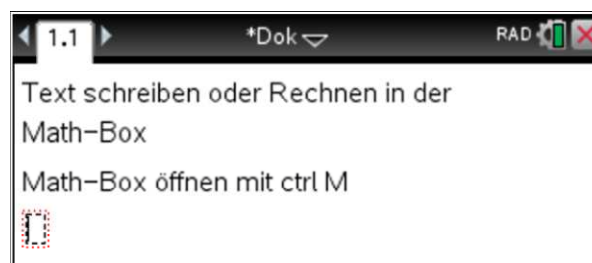
 <p>Calculator: Die <i>Calculator</i>-App ist eigentlich der CAS-Rechner.</p> <p>Berechnungen werden Zeile für Zeile ausgeführt und jede durchgeführte Berechnung hat keinerlei Auswirkung auf bereits durchgeführte Aufgaben und umgekehrt. Will man eine Folge von Berechnungen mit neuen Daten durchführen, dann muss man wieder von vorne beginnen.</p>	 <p>Notes: Text und Berechnungen mit der Mathe-Box Ctrl M</p> <p>Berechnungen werden aktualisiert! Wenn ein Wert verändert wird, dann werden alle bereits bestehenden Berechnungen mit diesem neuen Wert auf Neue ausgeführt.</p>
--	--

Beachte: Das Arbeiten in Notes ist komfortabler. Es können Berechnungen mit Text kommentiert werden. Mit Hilfe der Math Box können Berechnungen durchgeführt werden, welche bei nachträglichen Änderungen aktualisiert werden. Im Calculator gibt es kein refresh.

Wähle „new Document“ und dann „add Notes“ oder **Ctrl i**



Alternativ kann das gelbe Symbol mit der Maus angeklickt werden:

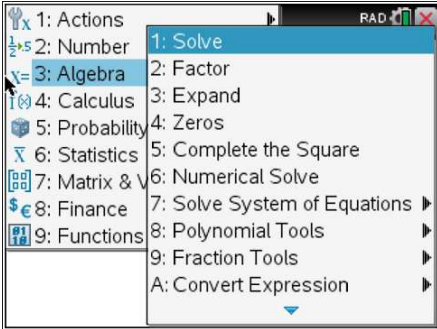
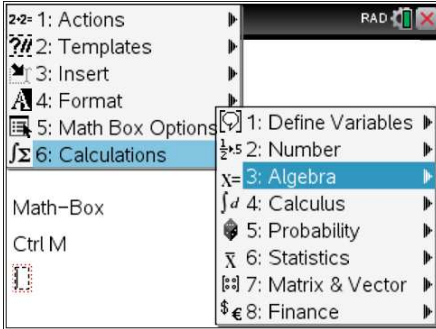


Achte darauf, dass du immer eine Math-Box öffnest, wenn du Berechnungen durchführen willst.

Befindet sich der Cursor in der Math-Box, so wird diese rot umrandet.

Der CAS-Baustein solve()

Mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems lassen sich Gleichungen und Gleichungssysteme mit dem solve()-Befehl lösen.

Im Calculator	In Notes, öffne eine Math Box
	
<p>Für den solve()-Befehl wähle „menu 3, 1“ (3)Algebra (1)Solve</p>	<p>„menu 6, 3, 1“ (6)Calculations (3)Algebra (1)Solve</p>

Syntax des Befehls solve(): **solve(Gleichung, Variable)**

Im solve-Befehl muss eine Gleichung und die Variable, nach der aufgelöst werden soll angegeben werden. Die Lösung einer Gleichung, die wir mit dem solve()-Befehl erhalten, ist eine Gleichung oder sind Gleichungen verbunden mit einem booleschen Operator (or, and)

2.2 Berechnungsstrategie in der App Notes

Ein Computer-Algebra-System kann symbolisch rechnen. Mathematische Objekte wie Zahlen, Terme, Gleichungen, Funktionen, usw. können Variablen zugeordnet werden. Werden in der Applikation „Notes“ die Werte von gespeicherten Variablen geändert, so wird die ganze Rechnung aktualisiert. Damit die Aktualisierung eines Berechnungsblattes funktioniert, müssen berechnete Zwischenresultate Variablen zugeordnet werden. So müssen auch Lösungen von Gleichungen durch Zuordnung an Variablen weitergegeben werden.

Beachte:

Den Variablen können mit „:=“ mathematische Objekte zuordnet werden.



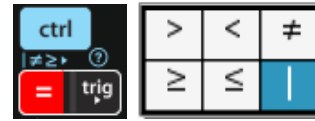
Berechnungsstrategie

1. Beim Lösen eines Problems ordnen wir die gegebenen Zahlenwerte einer Variablen zu. Damit werden sie gespeichert und beim Auswerten von Termen, setzt der Rechner die Werte ein.
2. Zwischenresultate (Auswertungen von Formeln, Lösungen von Gleichungen, usw.) werden auch Variablen zugeordnet, damit mit ihnen weitergerechnet werden kann.

Hilfsmittel für die Berechnungsstrategie

- Ein Term, der aus Variablen (Platzhaltern) besteht, kann mit Hilfe des **Mit-Operators „|“** mit Zahlen belegt werden.

Beachte die Tastenkombination für den Mit-Operator „|“ „Ctrl =“

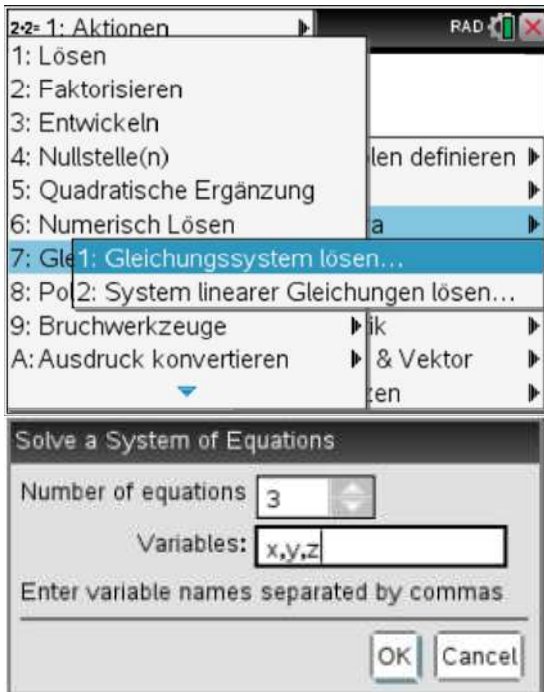


Syntax: Term|Gleichung

- Mit dem Befehl **right()** kann aus einer Gleichung ein Zahlenwert extrahiert werden.
Syntax: right(Gleichung) ergibt die rechte Seite der Gleichung.

- Mit dem Befehl **part()** können aus Gleichungen mit mehreren Lösungen oder Gleichungssystemen die Lösungen extrahiert werden.
Syntax: part(Lösungen von Gleichungen, Zahl 1 oder 2)

Beispiel: Lösung eines linearen 3x3 Gleichungssystems:
$$\begin{cases} x + 3y - 5z = 22 \\ 2x - y - 3z = 2 \\ 3x + 2y + z = 15 \end{cases}$$



Lösen von Gleichungssystemen in Notes: **Menu 6,3,7,1**

Es geht ein Fenster auf, in welchem die Anzahl Gleichungen und die Namen der Variablen eingefügt werden können. Bestätigen mit ok fügt eine Schablone in die Mathe-Box ein, in der die Gleichungen eingegeben werden können.

```

solve(
  {
    {x+3*y-5*z=22},
    {2*x-y-3*z=2},
    {3*x+2*y+z=15}
  }, {x,y,z}
)
xyz:=solve(
  {
    {x+3*y-5*z=22},
    {2*x-y-3*z=2},
    {3*x+2*y+z=15}
  }, {x,y,z}
)
▸ x=2 and y=5 and z=-1
xx:=right(part(xyz,1)) ▸ 2
yz:=part(xyz,2) ▸ y=5 and z=-1
yy:=right(part(yz,1)) ▸ 5
zz:=right(part(yz,2)) ▸ -1
    
```

Die Variable xyz ist ein boolescher Ausdruck (3 Gleichungen verbunden mit und) Trennen der Lösungen mit part() und abspeichern mit right().

2.3 Beispiel 1: Zwei Funktionsgraphen, Flächenschwerpunkt

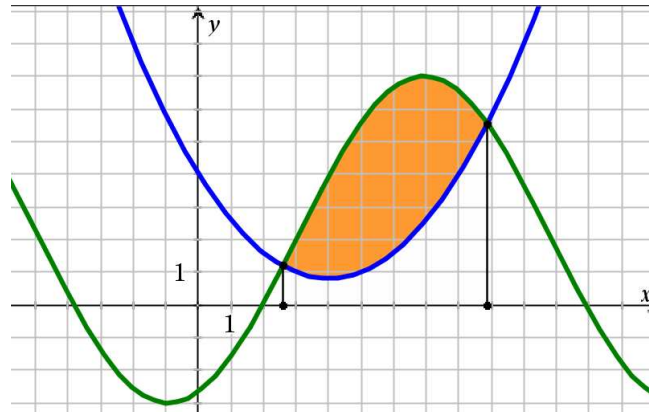
Aufgabenstellung

Gegeben sind die Funktionen:

$$f_1(x) = 5 \cdot \sin(0.4x - 1.2) + 2$$

$$f_2(x) = 0.2 \cdot x^2 - 1.6 \cdot x + 4$$

- Bestimme den Flächeninhalt zwischen den Funktionen.
- Bestimme die Koordinaten des Flächenschwerpunkts.



Lösung

- Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen.

$$f_1(x) = f_2(x) \rightarrow \underline{x_1 = 3.025}; \underline{x_2 = 11.02}; \quad A = \int_{x_1}^{x_2} [f_1(x) - f_2(x)] dx = \underline{\underline{44.56}}$$

- Flächenschwerpunkt

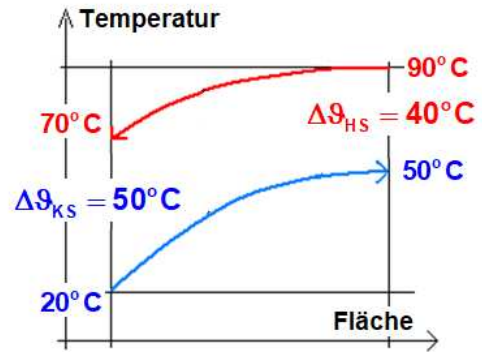
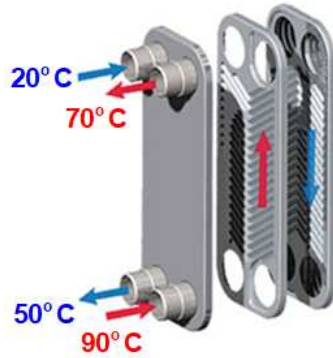
$$S_x = \frac{1}{A} \cdot \int_{x_1}^{x_2} x \cdot [f_1(x) - f_2(x)] dx = \underline{\underline{7.06}}; \quad S_y = \frac{1}{2 \cdot A} \cdot \int_{x_1}^{x_2} [f_1(x)^2 - f_2(x)^2] dx = \underline{\underline{5.43}}$$

Berechnungsblatt	Kommentar
<p>Eingabe: Zwei Funktionen</p> <p>$f1(x) := 5 \cdot \sin(0.4 \cdot x - 1.2) + 2$ ▶ <i>Fertig</i></p> <p>$f2(x) := 0.2 \cdot x^2 - 1.6 \cdot x + 4$ ▶ <i>Fertig</i></p> <p>Berechnungen</p> <p>Schnittpunkte der Graphen von f1 und f2</p> <p>$xs := \text{solve}(f1(x) = f2(x), x)$ ▶ $x = 2.595$ or $x = 8.876$ ⚠</p> <p>Trennen und abspeichern der beiden Lösungen</p> <p>$x1 := \text{right}(\text{part}(xs, 1))$ ▶ 2.595</p> <p>$x2 := \text{right}(\text{part}(xs, 2))$ ▶ 8.876</p> <p>Fläche zwischen f1 und f2</p> <p>$a := \int_{x1}^{x2} (f1(x) - f2(x)) dx$ ▶ 20.748</p> <p>x-Koordinate des Flächenschwerpunkts</p> <p>$sx := \frac{1}{a} \cdot \int_{x1}^{x2} (x \cdot (f1(x) - f2(x))) dx$ ▶ 5.822</p> <p>y-Koordinate des Flächenschwerpunkts</p> <p>$sy := \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \int_{x1}^{x2} ((f1(x))^2 - (f2(x))^2) dx$ ▶ 3.856</p>	<p>Für f1 und f2 können zwei Funktionen eingegeben werden.</p> <p>Die Fläche zwischen den Graphen und die Koordinaten des Flächenschwerpunktes wird dann berechnet.</p> <p>Die Lösung der Gleichung (boolescher Ausdruck) wird der Variablen xs zugeordnet.</p> <p>Mit den Befehlen right() und part() kann xs in die beiden Lösungen x1 und x2 (Zahlen) getrennt werden.</p> <p>Für die Integrationsgrenzen zur Berechnung der Fläche werden die beiden Lösungen x1 und x2 verwendet.</p> <p>Zur Berechnung der Koordinaten des Flächenschwerpunktes wird die Fläche a und die beiden Lösungen x1 und x2 verwendet.</p>

2.4 Beispiel 2: Wärmetauscher

Aufgabenstellung

Im Ölkühler eines Kompressors werden 200 kW Leistung mittels Heizungswasser von 20°C Zulauf- und 50°C Rücklauf-temperatur abgeführt. Das Öl wird im Gegenstrom von



90°C auf 70°C gekühlt. $c_w = 4190 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$, $c_{\text{öl}} = 1800 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$

Wärmedurchgang: $\lambda_{\text{Stahl}} = 50 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$, $s = 1\text{mm}$ $\alpha_{\text{ölseite}} = 200 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$, $\alpha_{\text{w-seite}} = 1000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$

- Welche Stoffmengen (Massenströme) werden umgesetzt?
- Welche Fläche benötigt der Wärmetauscher?

Berechnungsblatt

Heisses Medium **cöl:=1800** ▶ 1800 Eingang **t1a:=90** ▶ 90 Ausgang **t1w:=70** ▶ 70

Kaltes Medium **cwasser:=4190** ▶ 4190 Eingang **t2a:=20** ▶ 20 Ausgang **t2w:=50** ▶ 50

Wärmedurchgang **d:=0.001** ▶ 1.00E-3 **λ:=52** ▶ 52 **αöl:=200** ▶ 200 **αw:=1000** ▶ 1000

Übertragene Wärmeleistung **qp:=200000** ▶ 200000

logarithmische Mitteltemperaturdifferenz Gegenstrom

$$\text{dths} := t1a - t2w \quad \text{dtk} := t1w - t2a \quad \text{dtlm} := \frac{\text{dths} - \text{dtk}}{\ln\left(\frac{\text{dths}}{\text{dtk}}\right)} \quad \text{▶ } 44.81$$

$$\text{Massenströme } \text{mpöl} := \text{solve}(\text{qp} = \text{cöl} \cdot \text{mp} \cdot (t1a - t1w), \text{mp}) \quad \text{▶ } \text{mp} = 5.56$$

$$\text{mpwasser} := \text{solve}(\text{qp} = \text{cwasser} \cdot \text{mp} \cdot (t2w - t2a), \text{mp}) \quad \text{▶ } \text{mp} = 1.59$$

$$\text{U-Wert } \text{r} := \frac{1}{\alpha_{\text{öl}}} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_w} \quad \text{▶ } 6.02\text{E-}3 \quad \text{u} := \frac{1}{\text{r}} \quad \text{▶ } 166.13$$

$$\text{Fläche } \text{solve}(\text{qp} = \text{u} \cdot a \cdot \text{dtlm}, a) \quad \text{▶ } a = 26.86$$

Lösung

a) Stoffmengen (Wärmebilanz) $\dot{Q} = c \cdot \dot{m} \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)$

$$\dot{m}_w = \underline{1.59 \frac{\text{kg}}{\text{s}}}; \quad \dot{m}_{\text{öl}} = \underline{5.56 \frac{\text{kg}}{\text{s}}}$$

b) benötigte Fläche Wärmetauscher: $\dot{Q} = U \cdot A \cdot \Delta\vartheta_{\text{LM}} \rightarrow A = \frac{\dot{Q}}{U \cdot \Delta\vartheta_{\text{LM}}}$

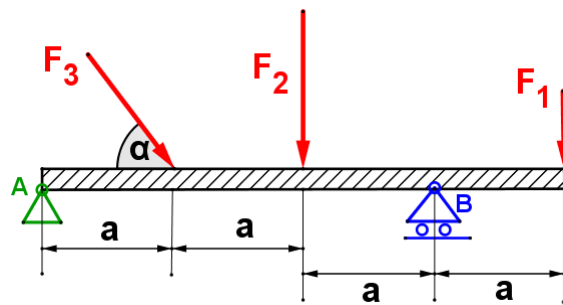
$$\text{U-Wert } U = \underline{166.1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}}$$

Logarithmische Mitteltemperatur für Gegenstrom: $\Delta\vartheta_{\text{LM}} = \underline{44.8 \text{K}}$

$$\text{Austauschfläche } A = \frac{\dot{Q}}{U \cdot \Delta\vartheta_{\text{LM}}} = \underline{26.9 \text{m}^2}$$

2.5 Beispiel 3: Auflagerkräfte beim Stützbalken

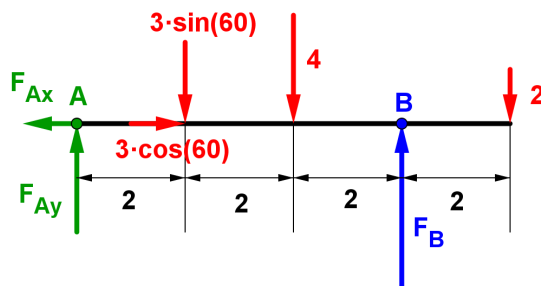
Aufgabenstellung: Ein Balken ist auf einer horizontalen Unterlage in zwei Punkten A und B gestützt. Dabei ist er in B auf der Unterlage verschiebbar (Loslager), während dies in A nicht möglich ist (Festlager). Der Träger ist durch die Kräfte $F_1 = 2 \text{ kN}$, $F_2 = 4 \text{ kN}$ und $F_3 = 3 \text{ kN}$ belastet. Weiter ist $a = 2 \text{ m}$



und $\alpha = 60^\circ$ gegeben.

Berechne mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen die Kräfte F_A und F_B , die von den beiden Lagern auf den Balken ausgeübt werden.

Lösung Balken frei machen, Kräfte in x- und y-Richtung zerlegen



Kräftegleichgewicht

$$\Sigma F_x : -F_{Ax} + 3 \cdot \cos(60^\circ) = 0$$

$$\Sigma F_y : F_{Ay} - 3 \cdot \sin(60^\circ) - 4 + F_B - 2 = 0$$

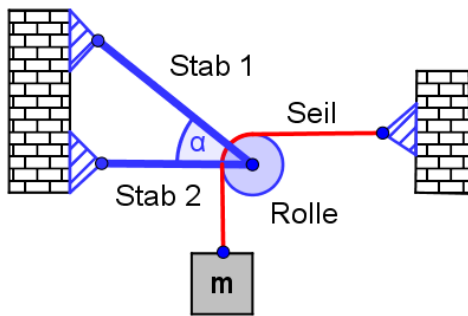
Drehmoment

$$\Sigma M(A) : -3 \cdot \sin(60^\circ) \cdot 2 - 4 \cdot 4 + F_B \cdot 6 - 2 \cdot 8 = 0$$

$$\Sigma M(B) : -2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot \sin(60^\circ) \cdot 4 - F_{Ay} \cdot 6 = 0$$

Berechnungsblatt	Kommentar
Kräftegleichgewicht $f_x := -f_{ax} + 3 \cdot \cos(60) = 0 \rightarrow 1.5 - f_{ax} = 0.$ $f_y := f_{ay} - 3 \cdot \sin(60) - 4 + f_b - 2 = 0 \rightarrow f_{ay} + f_b - 8.6 = 0.$ Drehmoment $m_a := -3 \cdot \sin(60) \cdot 2 - 4 \cdot 4 + f_b \cdot 6 - 2 \cdot 8 = 0 \rightarrow 6 \cdot f_b - 37.2 = 0.$ $m_b := -2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot \sin(60) \cdot 4 - f_{ay} \cdot 6 = 0 \rightarrow 14.4 - 6 \cdot f_{ay} = 0.$ Gleichungssystem $f_{axyfb} := \text{solve}(f_x \text{ and } f_y \text{ and } m_a, f_{ax}, f_{ay}, f_b)$ $\rightarrow f_{ax} = 1.5 \text{ and } f_{ay} = 2.4 \text{ and } f_b = 6.2$ Trennen und abspeichern der drei Lösungen $f_{ax} := \text{right}(\text{part}(f_{axyfb}, 1)) \rightarrow 1.5$ $f_{ayfb} := \text{part}(f_{axyfb}, 2) \rightarrow f_{ay} = 2.4 \text{ and } f_b = 6.2$ $f_{ay} := \text{right}(\text{part}(f_{ayfb}, 1)) \rightarrow 2.4$ $f_b := \text{right}(\text{part}(f_{ayfb}, 2)) \rightarrow 6.2$ Berechnung von fa (Betrag und Winkel) $f_a := \sqrt{f_{ax}^2 + f_{ay}^2} \rightarrow 2.83$ $\alpha := \tan^{-1}\left(\frac{f_{ay}}{f_{ax}}\right) \rightarrow 58.$	Zur Bestimmung der drei Unbekannten F_{Ax} , F_{Ay} , F_B können aus den oben aufgestellten 4 Gleichungen 3 Gleichungen ausgewählt werden. Den Variablen f_x, f_y, m_a, m_b werden Gleichungen zugeordnet. $F_{Ax} = 1.50, F_{Ay} = 2.40,$ $F_B = 6.20 \text{ kN}$ $F_A = 2.83 \text{ kN}$ $\alpha = 58.0^\circ$

2.6 Beispiel 4: Kräftegleichgewicht Wandkran



Aufgabenstellung: Ein Wandkran besteht aus zwei geraden, gelenkig gelagerten Stäben, die in einem Gelenk miteinander verbunden sind. Ein durch eine Masse m belastetes Seil wird über eine Umlenkrolle geführt. Der Rollenradius ist vernachlässigbar klein.

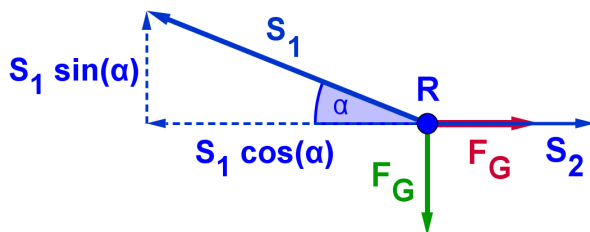
Gegeben: Masse m , Winkel α

Gesucht: Kräfte, welche die Stäbe 1 und 2 übertragen müssen.

Zahlenbeispiele: $m = 200 \text{ kg}$, $\alpha = 20^\circ$

(Verwende für $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

Lösung: Rolle freimachen (kleine Rolle = Punkt) und Kräfte zerlegen



Beim Einzeichnen von S_2 stellt sich die Frage in welche Richtung sie wirkt? Muss der Stab ziehen (S_2 wirkt nach links) oder drücken (S_2 wirkt nach rechts). In nebenstehender Skizze wurde S_2 nach rechts gezeichnet. Falls dies nicht

der Fall sein sollte, wird es durch die Rechnung korrigiert, indem S_2 negativ wird. Die Richtung von S_2 ist abhängig Winkel α (siehe Berechnungsblatt allgemein für α).

Kräftegleichgewicht in x- und y- Richtung

$$\begin{cases} -S_1 \cdot \cos(\alpha) + S_2 + F_G = 0 \\ S_1 \cdot \sin(\alpha) - F_G = 0 \end{cases} \quad (F_G = m \cdot g)$$

Berechnungsblatt mit Zahlen

$fg := 2 \rightarrow 2$ $\alpha := 20 \rightarrow 20$

$s12 := \text{solve}\left(\begin{cases} -s1 \cdot \cos(\alpha) + s2 + fg = 0 \\ s1 \cdot \sin(\alpha) - fg = 0 \end{cases}, s1, s2\right)$

$\rightarrow s1 = 5.85$ and $s2 = 3.49$

$s_1 := \text{right}\{\text{part}\{s12, 1\}\} \rightarrow 5.85$

$s_2 := \text{right}\{\text{part}\{s12, 2\}\} \rightarrow 3.49$

Zerlegung von S_1

$s1x := s_1 \cdot \cos(\alpha) \rightarrow 5.49$ (= $s_2 + fg \rightarrow 5.49$)

$s1y := s_1 \cdot \sin(\alpha) \rightarrow 2.$ (= $fg \rightarrow 2$)

Lösungen

$S_1 = \underline{\underline{5.85 \text{ kN}}}$

$S_2 = \underline{\underline{3.49 \text{ kN}}}$ (S_2 ist positiv, wirkt wie oben eingezeichnet nach rechts)

Zur Analyse der Stabkräfte in Abhängigkeit vom Winkel α , lässt sich das Gleichungssystem allgemein lösen.

Berechnungsblatt allgemein für α

$$s12 := \text{solve} \left(\begin{cases} -s1 \cdot \cos(\alpha) + s2 + fg = 0 \\ s1 \cdot \sin(\alpha) - fg = 0 \end{cases}, s1, s2 \right)$$

$$\triangleright s1 = \frac{fg}{\sin(\alpha)} \text{ and } s2 = \frac{fg \cdot (\cos(\alpha) - \sin(\alpha))}{\sin(\alpha)}$$

$$s_1 := \text{right}(\text{part}(s12, 1)) \triangleright \frac{fg}{\sin(\alpha)}$$

$$s_2 := \text{right}(\text{part}(s12, 2)) \triangleright \frac{fg \cdot (\cos(\alpha) - \sin(\alpha))}{\sin(\alpha)}$$

$$s1x := s_1 \cdot \cos(\alpha) \triangleright \frac{fg}{\tan(\alpha)}$$

$$s1y := s_1 \cdot \sin(\alpha) \triangleright fg \triangle$$

$$S_1(\alpha) = \frac{F_G}{\sin(\alpha)}$$

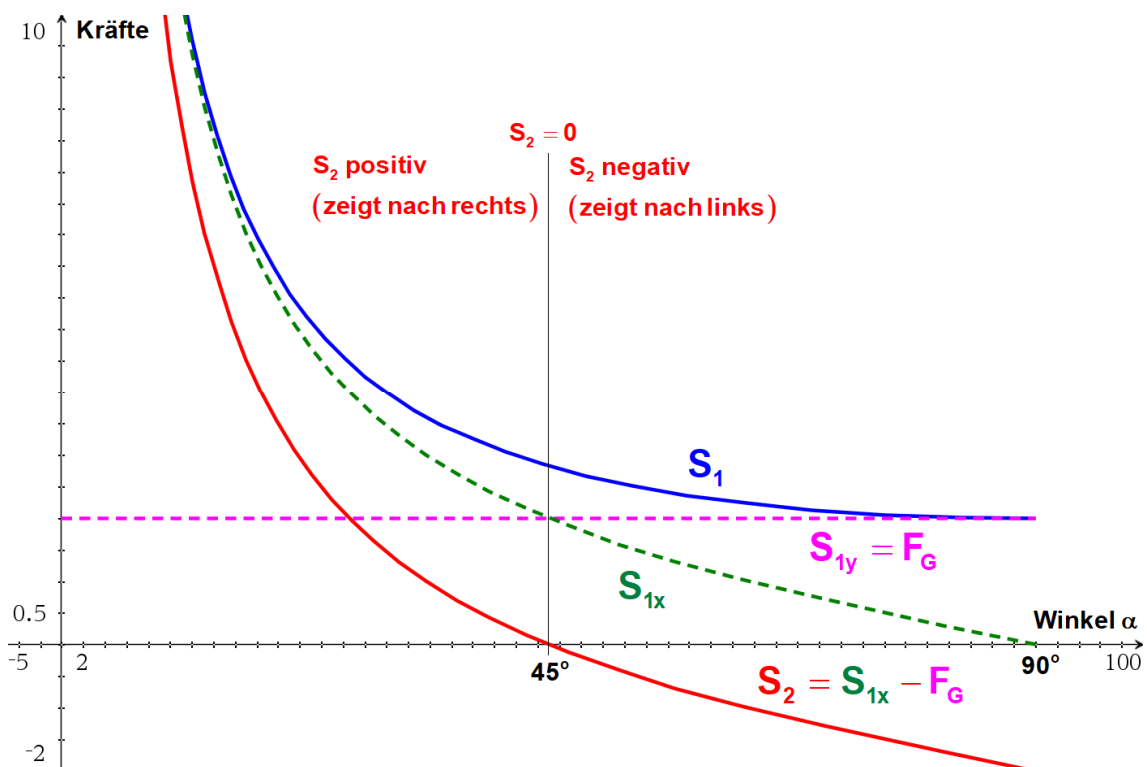
$$S_2(\alpha) = \frac{F_G \cdot (\cos(\alpha) - \sin(\alpha))}{\sin(\alpha)}$$

$$= \frac{F_G}{\tan(\alpha)} - F_G$$

$$S_{1x}(\alpha) = \frac{F_G}{\tan(\alpha)}$$

$$S_{1y}(\alpha) = F_G$$

Graphische Darstellung der Stabkräfte in Abhängigkeit des Winkels α ($F_G = 2\text{kN}$)



Je kleiner der Winkel α wird, desto grösser werden die Stabkräfte.

Fallunterscheidung	
$\alpha = 0^\circ$	die Stabkräfte sind nicht definiert (Division durch Null)
$\alpha \in]0^\circ, 45^\circ[$	S_2 ist positiv
$\alpha = 45^\circ$	S_2 ist Null
$\alpha \in]45^\circ, 90^\circ]$	S_2 ist negativ

2.7 Beispiel 5: Gleichmässig beschleunigte Bewegung

Aufgabenstellung: Algebraische Behandlung von Bewegungsaufgaben

Die gleichmässig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit kann durch fünf Grössen (a, v_A, v_E, s, t) beschrieben werden. Diese stehen in Beziehung zueinander durch das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz und Weg-Zeit-Gesetz:

$$v_E = v_A + a \cdot t$$

$$s = v_A \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$

Wir haben also zwei Bestimmungsgleichungen, d.h. wenn wir von den fünf Grössen drei vorgeben, dann können wir die restlichen zwei bestimmen. Bei der gleichmässig beschleunigten Bewegung können aus 5 Grössen auf 10 verschiedene Arten 2 ausgewählt werden d.h. es gibt 10 verschiedene Typen von Bewegungsaufgaben.

a	t	v_A	v_E	s
Gegeben	Gegeben	Gegeben	$v_A + a \cdot t$	$v_A \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$
Gegeben	Gegeben	$v_E - a \cdot t$	Gegeben	$v_E \cdot t - \frac{a}{2} \cdot t^2$
Gegeben	$\frac{v_E - v_A}{a}$	Gegeben	Gegeben	$\frac{v_E^2 - v_A^2}{2a}$
$\frac{v_E - v_A}{t}$	Gegeben	Gegeben	Gegeben	$\frac{v_E + v_A}{2} \cdot t$
Gegeben	Gegeben	$\frac{s - a \cdot t}{t} - \frac{a \cdot t}{2}$	$\frac{s}{t} + \frac{a \cdot t}{2}$	Gegeben
Gegeben	$\frac{\sqrt{2as + v_A^2} - v_A}{a}$	Gegeben	$\sqrt{2as + v_A^2}$	Gegeben
$\frac{2s}{t^2} - \frac{2v_A}{t}$	Gegeben	Gegeben	$\frac{2s}{t} - v_A$	Gegeben
Gegeben	$\frac{v_E - \sqrt{v_E^2 - 2as}}{a}$	$\sqrt{v_E^2 - 2as}$	Gegeben	Gegeben
$\frac{2v_E}{t} - \frac{2s}{t^2}$	Gegeben	$\frac{2s}{t} - v_E$	Gegeben	Gegeben
$\frac{v_E^2 - v_A^2}{2s}$	$\frac{2s}{v_E + v_A}$	Gegeben	Gegeben	Gegeben

Diese können alle durch einen CAS-Baustein erfasst werden. Der CAS-Baustein `gbb(x,y)` benötigt für die Platzhalter x und y als Eingabe zwei Grössen der gleichmässig beschleunigten Bewegung (a, v_A, v_E, s, t). Diese beiden Grössen werden dann vom Baustein berechnet.

CAS-Baustein gbb() gleichmässig beschleunigte Bewegung

$$\text{gbb}(x,y) := \text{solve} \left\{ \begin{array}{l} ve = va + a \cdot t \\ s = va \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2, x, y \end{array} \right. \rightarrow \text{Done}$$

Beispiele zum Aufruf des CAS-Bausteins:

Beispiel 1: Im technischen Datenblatt beim Maserati GranSport 4.2 V8 Coupé sind folgende Werte angegeben: Beschleunigung von 0 auf 100 km/h in 4,8 Sekunden.

$$\text{gbb}(a,s) \rightarrow s = \frac{(va+ve) \cdot t}{2} \text{ and } a = \frac{-(va-ve)}{t}$$

Gegeben: $v_A = 0 \frac{m}{s}$,
 $v_E = 27.8 \frac{m}{s}$, $t = 4.8 \text{ s}$
 Gesucht: a und s

$$\text{gbb}(a,s) | va=0 \text{ and } ve = \frac{100}{3.6} \text{ and } t=4.8 \rightarrow s=66.7 \text{ and } a=5.79$$

gbb(a,s): Der Baustein soll für uns die Beschleunigung a und den Weg s berechnen. Wenn wir nur gbb(a,s) eingeben, dann gibt uns der Rechner die Formeln für die Beschleunigung a und den Weg s. Wir können aber auch die gegebenen Grössen mitliefern („|“ Mitoperator), dann erhalten wir Zahlenwerte.

Beispiel 2: Abbremsen von 100km/h auf 0 auf einem Weg von 36 Metern.

$$\text{gbb}(a,t) \rightarrow t = \frac{2 \cdot s}{va+ve} \text{ and } a = \frac{-(va^2-ve^2)}{2 \cdot s}$$

Gegeben: $v_A = 27.8 \frac{m}{s}$,
 $v_E = 0 \frac{m}{s}$, $s = 36 \text{ m}$
 Gesucht: a und t

$$\text{gbb}(a,t) | ve=0 \text{ and } va = \frac{100}{3.6} \text{ and } s=36 \rightarrow t=2.59 \text{ and } a=-10.7$$

Das Weg-Zeit-Gesetz ist eine quadratische Gleichung in t. Wenn wir nach t auflösen, erhalten wir zwei Lösungen. Interpretiere diese!

$$\text{gbb}(t,ve)$$

$$\bullet \frac{2 \cdot a \cdot s + va^2}{2} \geq 0 \text{ and } t = \frac{\sqrt{2 \cdot a \cdot s + va^2} - va}{a} \text{ and } ve = \sqrt{2 \cdot a \cdot s + va^2} \text{ or}$$

$$\frac{2 \cdot a \cdot s + va^2}{2} \geq 0 \text{ and } t = \frac{-\left(\sqrt{2 \cdot a \cdot s + va^2} + va\right)}{a} \text{ and } ve = -\sqrt{2 \cdot a \cdot s + va^2}$$

Der CAS-Baustein kann auch im Programmeditor erstellt werden (siehe Kap. 3.2 Arbeiten mit dem Programmeditor S16). Wird das Programm im Ordner MyLib gespeichert, so ist es in jedem Dokument verfügbar. Es kann über den Katalog (6) aufgerufen werden.

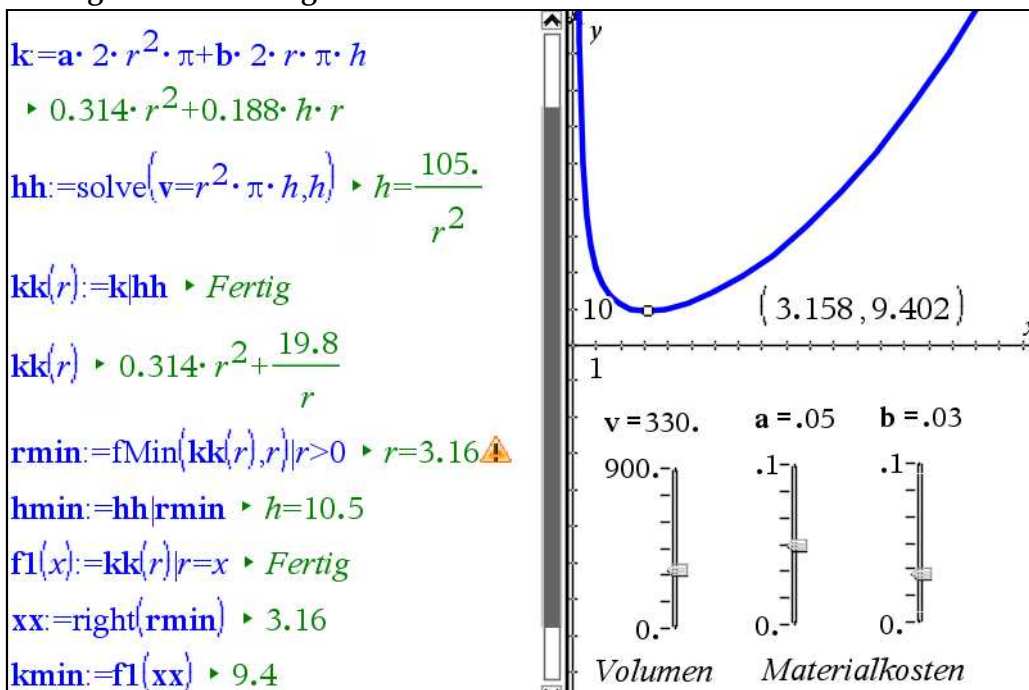
2.8 Beispiel 6: Optimierung, minimale Kosten

Aufgabenstellung: Ein Bierhersteller möchte eine neue Bierdose entwickeln, dessen Volumen $V = 330 \text{ cm}^3$ betragen soll. Du bekommst den Auftrag die Verpackung zu optimieren. Diese hat die Form eines Zylinders, wobei die Deckenflächen aus Metall und die Mantelfläche aus Karton bestehen soll. Die Kosten pro cm^2 betragen für Metall $a = 0.05$ Rappen und für Karton $b = 0.03$ Rappen.



- Wie müssen r und h gewählt werden, damit die Bierdose möglichst günstig kommt?
- Wie hoch ist der Preis für eine Dose?

Lösung als Berechnungsblatt



Das Volumen V und die Materialkosten a und b können mit Hilfe von Schiebereglern variiert werden. Dabei werden die Berechnungen und der Funktionsgraph jeweils aktualisiert.

Zielfunktion: Materialkosten für die Bierdose

$$k(r, h) = a \cdot 2r^2\pi + b \cdot 2\pi r \cdot h$$

Nebenbedingung: Volumen

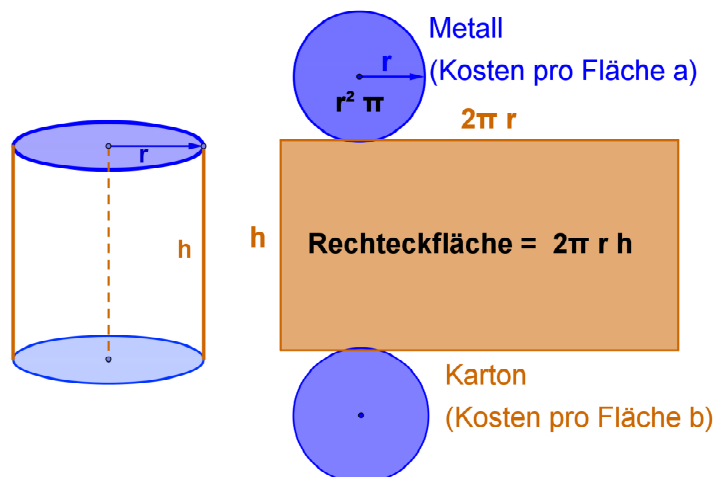
$$V = r^2\pi \cdot h \rightarrow h = \frac{V}{r^2\pi}$$

Resultate

a) $r_{\min} = \underline{\underline{3.16 \text{ cm}}}$

$h_{\min} = \underline{\underline{10.5 \text{ cm}}}$

b) $k_{\min} = \underline{\underline{9.4 \text{ Rappen}}}$

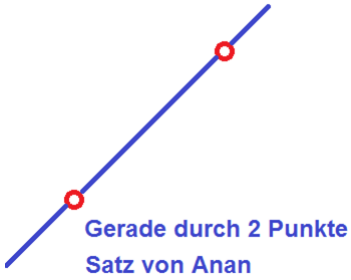
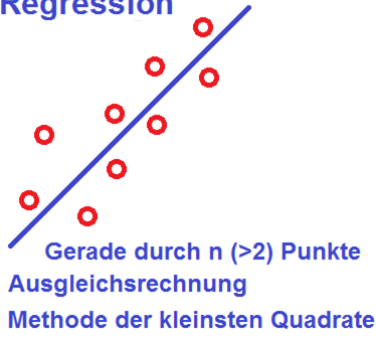


3 Von Daten zur Funktion

3.1 Kurvenanpassung durch Polynomfunktionen

Wir wollen in diesem Kapitel aus einer Menge von vorgegebenen Datenpunkten $(x|y)$ die Funktion $y = f(x)$ ermitteln. Dabei gehen wir davon aus, dass zwischen den Wertepaaren $(x|y)$ ein Zusammenhang besteht, welchen wir durch ein funktionales Modell beschreiben können. Wir unterscheiden zwei Methoden:

Wir verwenden als Ansatz Polynome mit Parametern und

nutzen Bestimmungsgleichungen (Gleichungssystem) um die Modellparametern zu bestimmen..	nutzen eine statistische Methode (Regression), um die Modellparameter zu bestimmen
Methode 1 (reine Mathematik) Zuordnungsaspekt von Funktionen	Methode 2 (schmutzige Mathematik) Ausgleichsrechnung
<p>Beispiel: Polynom 1. Grades Gegeben 2 Datenpunkte</p> <p>Gesucht: lineare Funktion</p> <p>Ansatz: $y(x) = m \cdot x + q$</p> <p>2x2 Gleichungssystem</p>  <p>Das Problem ist eindeutig bestimmt. Wir erhalten zwei Gleichungen für die beiden Modellparameter m und q.</p>	<p>Beispiel: Polynom 1. Grades Gegeben 9 Datenpunkte</p> <p>Gesucht: lineare Funktion</p> <p>Ansatz: lineare Regressionsgerade</p> <p>Regression</p>  <p>Das Problem ist überbestimmt. Wir erhalten neun Gleichungen für die beiden Modellparameter m und q.</p>

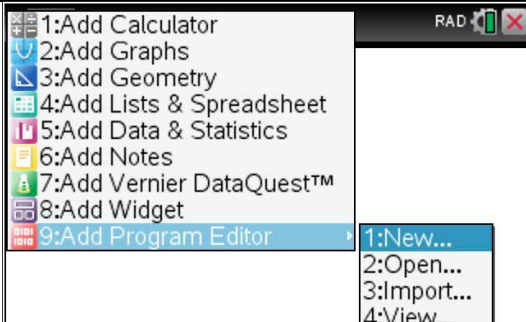
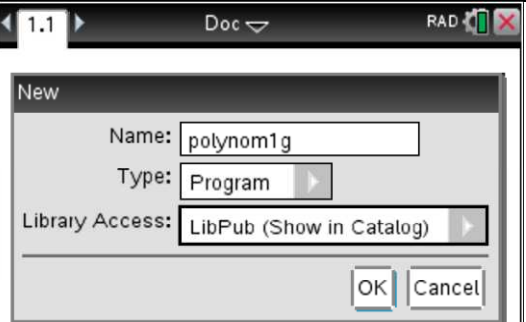
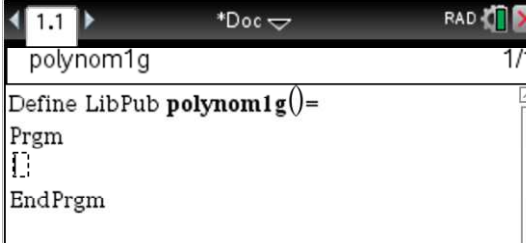
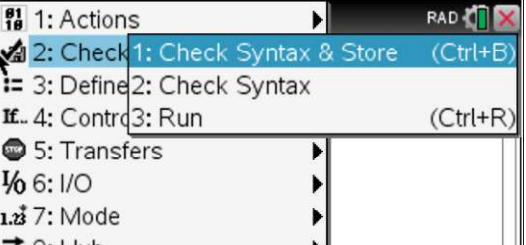
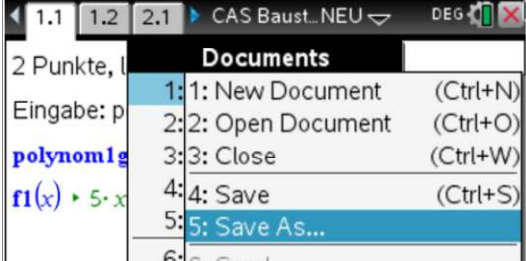
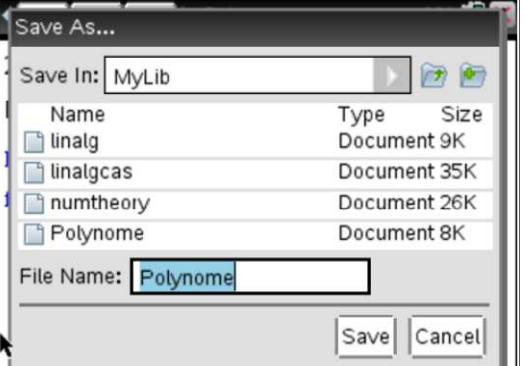
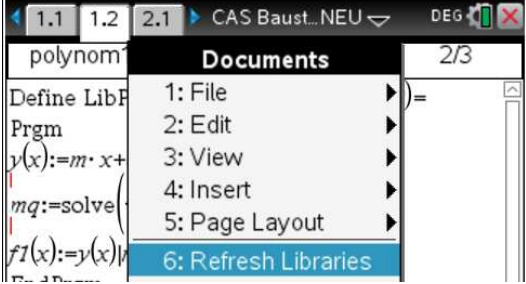
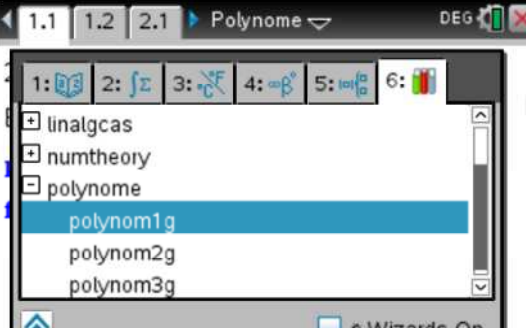
Satz von Anan:

Befindet sich der Punkt $P(x_0 | y_0)$ auf dem Graph der Funktion $y = f(x)$, so erfüllen seine Koordinaten x_0 und y_0 die Funktionsgleichung $y_0 = f(x_0)$. Umgekehrt erfüllen die Koordinaten eines Punktes $P(x|y)$ die Funktionsgleichung $y = f(x)$, so liegt P auf dem Graph der Funktion f .

Suchen wir den Funktionsgraph durch n gegebene Punkte, so liefert der Satz von Anan für jeden Punkt eine Gleichung, indem wir die Koordinaten der Punkte in den Ansatz einsetzen. Für n Punkte braucht es als Ansatz ein Polynom vom Grad $n-1$.

3.2 Arbeiten mit dem Programmierer

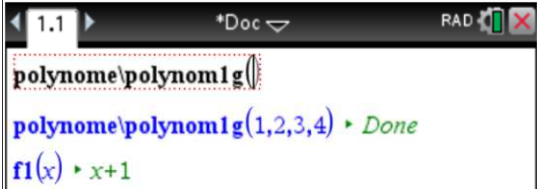
CAS-Bausteine (Rechnungssequenzen) können auch im Programmierer erstellt werden. Das Programm kann dann in Notes aufgerufen werden. So wird ein Berechnungsblatt übersichtlicher. Mit Hilfe des Programmierers können aber auch klassische Programmiererelemente, wie zum Beispiel die Iteration, benutzt werden.

	
<p>Ctrl i, Programmierer öffnen</p>	<p>Name des Programms LibPub (überall verfügbar über den Katalog)</p>
	
<p>Programm eingeben und Aufruf des Programms in Notes, siehe nächste Seite</p>	<p>Menü 2 (Check Syntax & Store), 1 Syntax überprüfen und speichern</p>
 <p>Doc 1 (File) 5 (Save As) Dokument im Ordner MyLib speichern Name wählbar (z.B. Polynome)</p>	
 <p>Doc 6 (Refresh Libraries) Bibliothek aktualisieren</p>	 <p>Die Programme können in jedem Dokument über den Katalog (6) aufgerufen werden.</p>

3.3 Polynom n-ten Grades als Ansatz für n+1 Datenpunkte

Wir entwickeln im Programmeditor CAS-Bausteine.

- 1) Definition des Polynoms
- 2) Gleichungssystem zur Bestimmung der Parametern
- 3) Einsetzen der Lösungen mit Hilfe des Mit-Operators „|“.

CAS-Baustein im Programmeditor	Aufruf des CAS-Bausteins in Notes
<p>Polynom 1. Grades durch 2 Punkte</p> <hr/> <p>polynom1g</p> <p>Define LibPub polynom1g(x1,y1,x2,y2)= Prgm $y(x) := m \cdot x + q$ $mq := \text{solve} \left(\begin{cases} y(x1) = y1 \\ y(x2) = y2 \end{cases}, m, q \right)$ $f1(x) := y(x) mq$ EndPrgm</p>	<p>2 Punkte, lineare Funktion (Gerade)</p> <p>Eingabe: <code>polynom1g(x1,y1,x2,y2)</code></p> <p><code>polynom1g(1,2,3,12)</code> ▶ <i>Fertig</i></p> <p><code>f1(x)</code> ▶ $5 \cdot x - 3$</p> <p>Aufruf in einem neuen Dokument über den Katalog (Erstellung siehe S16)</p> <p>f1(x) abrufen</p> 
<p>Polynom 2. Grades durch 3 Punkte</p> <hr/> <p>polynom2g</p> <p>Define LibPub polynom2g(x1,y1,x2,y2,x3,y3)= Prgm $y(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ $abc := \text{solve} \left(\begin{cases} y(x1) = y1 \\ y(x2) = y2 \\ y(x3) = y3 \end{cases}, a, b, c \right)$ $f1(x) := y(x) abc$ EndPrgm</p>	<p>3 Punkte, quadratische Funktion (Parabel)</p> <p>Eingabe: <code>polynom2g(x1,y1,x2,y2,x3,y3)</code></p> <p><code>polynom2g(1,2,2,6,3,8)</code> ▶ <i>Fertig</i></p> <p><code>f1(x)</code> ▶ $-x^2 + 7 \cdot x - 4$</p>
<p>Polynom 3. Grades durch 4 Punkte</p> <hr/> <p>polynom3g</p> <p>Define LibPub polynom3g(x1,y1,x2,y2,x3,y3,x4,y4)= Prgm $y(x) := a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ $abcd := \text{solve} \left(\begin{cases} y(x1) = y1 \\ y(x2) = y2 \\ y(x3) = y3 \\ y(x4) = y4 \end{cases}, a, b, c, d \right)$ $f1(x) := y(x) abcd$ EndPrgm</p>	<p>4 Punkte, kubische Funktion</p> <p>Eingabe: <code>polynom3g(x1,y1,x2,y2,x3,y3,x4,y4)</code></p> <p><code>polynom3g(-2,-38,-1,-17,2,10,3,47)</code> ▶ <i>Fertig</i></p> <p><code>f1(x)</code> ▶ $2 \cdot x^3 - x^2 + 4 \cdot x - 10$</p>

3.4 Regression mit dem TI-Nspire CAS

Beispiel: Bestimmung einer Federkonstanten

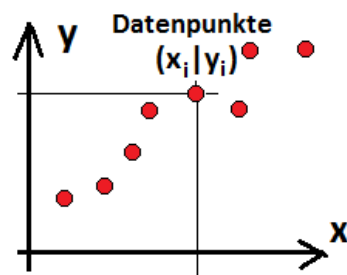
Hook'sches Gesetz

Die Kraft F , die auf eine Feder wirkt, ist proportional zur Auslenkung x : $F = D \cdot x$, wobei D die Federkonstante ist, welche durch eine Messreihe bestimmt werden kann.

Das Kraft-Auslenkungsdiagramm ist eine Gerade durch den Koordinatenursprung mit der Steigung D .

Messreihe:

Auslenkung s [m]	0.12	0.23	0.38	0.45	0.54
Kraft F [N]	0.39	0.69	1.18	1.37	1.67



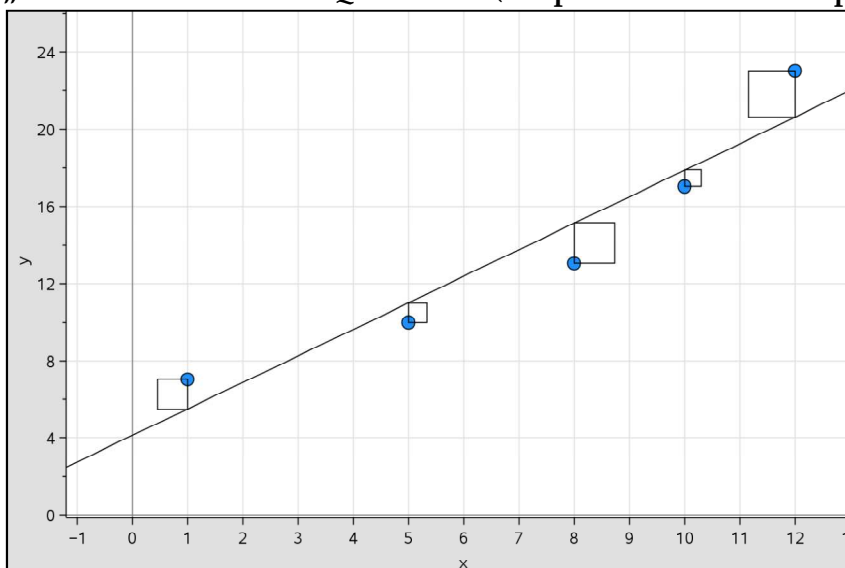
Gibt es einen funktionalen Zusammenhang $y = f(x)$?

Problem: Eine Gerade ist durch 2 Punkte bestimmt. Im Allgemeinen gibt es durch 5 Punkte keine Gerade, auf der alle Punkte liegen. Wir suchen die „bestmögliche“ Gerade, d.h. jene Gerade, die „möglichst nahe“ an allen Punkten verläuft. Die bestmögliche Gerade kann mit Hilfe der Regression (Methode der kleinsten Quadrate) bestimmt werden.

Dabei empfiehlt sich folgendes Vorgehen:

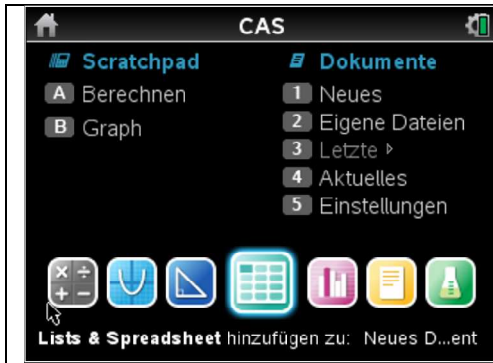
- 1) Daten in die Tabellenkalkulation eingeben
- 2) Daten in einem Streudiagramm beurteilen
- 3) Regression durchführen
- 4) Regressionskurve zu den Datenpunkten aufzeichnen lassen.

„Methode der kleinsten Quadrate“ (Graphik erstellt in der App Data & Statistics)

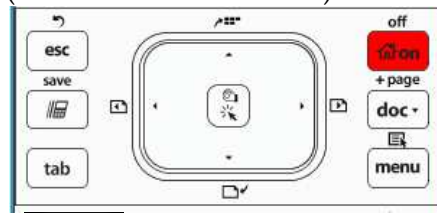


Die „bestmögliche Gerade“ erhalten wir mathematisch, wenn die Summe der quadratischen Abweichungen minimiert wird.

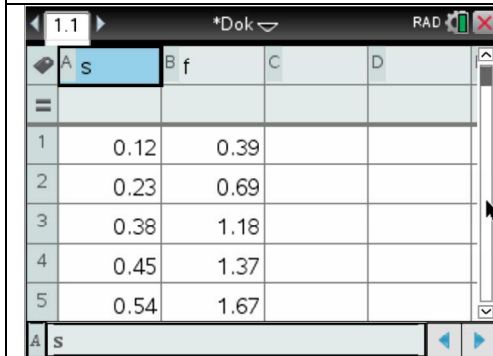
Der Korrelationskoeffizient r gibt an wie gut die Regression verlaufen ist.



Start mit dem Ausgangsbildschirm (home-Taste oben rechts)



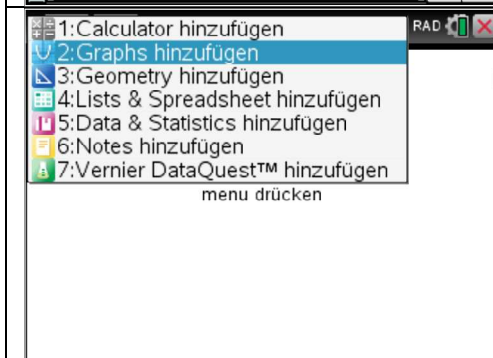
List & Spreadsheet (Tabellenkalkulation) auswählen, enter



Daten eingeben

Kolone A im Kopf der Tabelle mit s (Auslenkung) bezeichnen. s ist nun eine Listenvariable und kann in allen Apps unter diesem Namen aufgerufen werden.

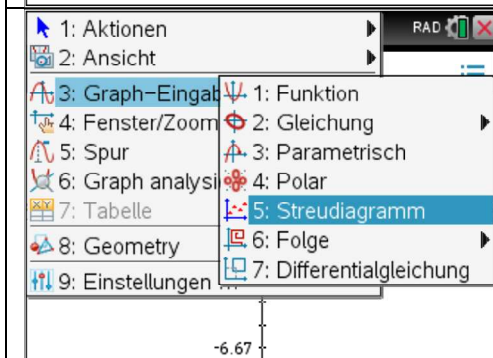
Kolone B mit f (Kraft) bezeichnen.



Neue Applikation einfügen **Ctrl i**

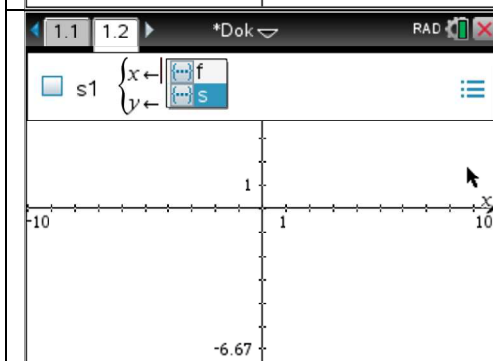


App Graphs hinzufügen



Darstellungswechsel:

Vom Graphtyp Funktion zum Streudiagramm
Menu/ 3 Graph- Eingabe / 5 Streudiagramm



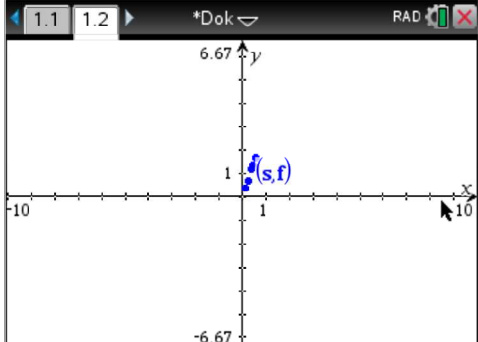
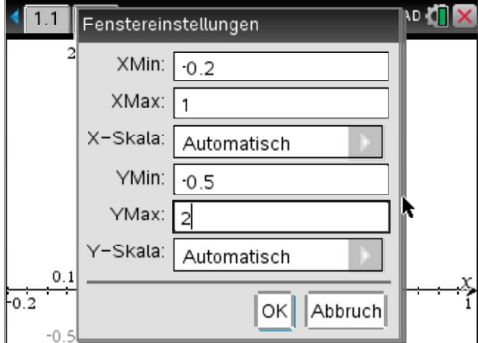
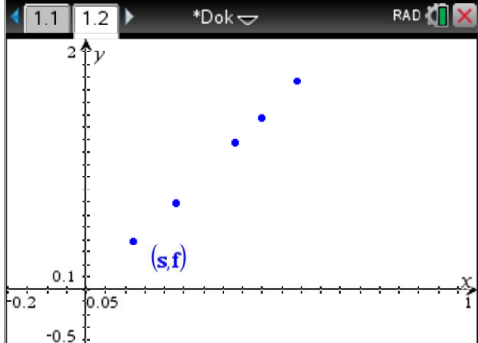


Die beiden Listen eingeben

x Liste = s (Auslenkung)

y Liste = f (Kraft)

Mit der Taste **Var** werden alle definierten Variablen angezeigt und können ausgewählt werden.

Bestätigen durch **enter**

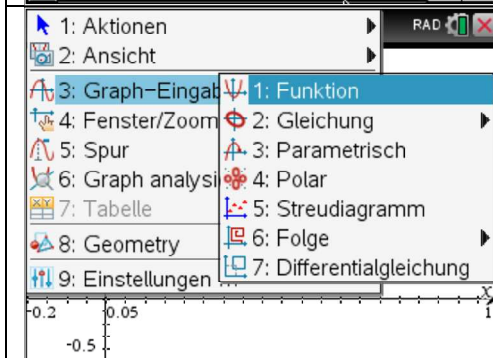
	<p>Es wird das Streudiagramm angezeigt, wobei der optimale Fensterausschnitt noch festgelegt werden muss. z.B. durch Menu/ 4 Fenster / 1 Fenstereinstellungen</p>
	<p>Fenstereinstellungen müssen überlegt werden (siehe Bild links) Die verschiedenen Eingaben können mit tab oder mit den Pfeiltasten erreicht werden. Bestätigen durch ok / enter</p>
	<p>Datenpunkte (s,f) bedeutet: (x,y) Auf der x-Achse ist die Grösse s aufgetragen, auf der y-Achse die Grösse f. Wir sehen das Streudiagramm für die fünf eingegebenen Datenpunkte, welche annähernd auf einer Geraden liegen (lineare Regression wählen). Wechsel vom App Graphs 1.2 in List & Spreadsheet 1.1 Ctrl, Pfeil links</p>
	<p>Regression in der Tabellenkalkulation durchführen. Menu / 4 Statistik/ 1 statistische Berechnungen/ 3 Lineare Regression</p>
	<p>Eingabe der Listen s und f Die Regressionsgerade wird unter f1 gespeichert. Letzte Zeile (Ergebnisspalte): Ausgabe der berechneten Regressionswerte in Spalte c[]</p>

	A s	B f	C	D
				=LinRegM
1	0.12	0.39	Titel	Lineare R.
2	0.23	0.69	RegEqn	m*x+b
3	0.38	1.18	m	3.06
4	0.45	1.37	b	0.008
5	0.54	1.67	r ²	0.999

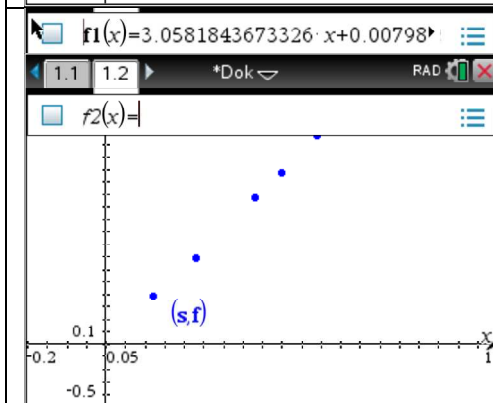
D1 = "Lineare Regression (mx+b)"

Regressionsgerade: $f_1(x) = m \cdot x + b$
 Steigung $m = 3.06$
 y-Achsenabschnitt $b = 0.008$

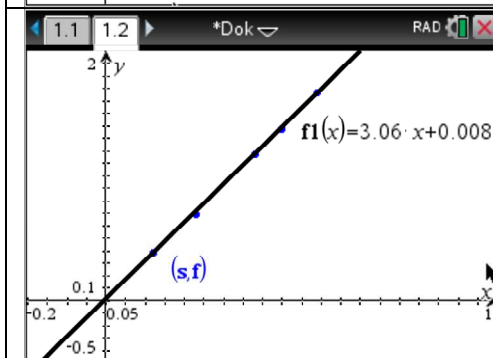
Die Federkonstante beträgt $D = 3.06 \frac{N}{m}$



Regressionsgerade zu den Datenpunkten im Streudiagramm einzeichnen.
 Darstellungswechsel:
 Vom Graphtyp Streudiagramm zu Funktion
Menu/ 3 Graph- Eingabe / 1 Funktion



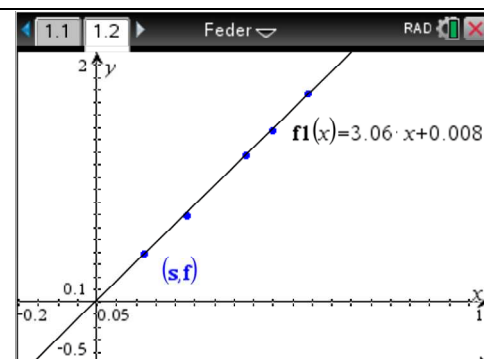
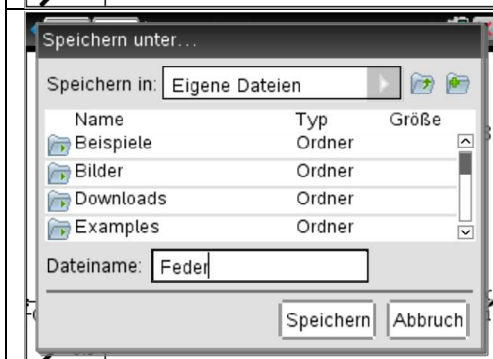
In der Anzeige wird eine Eingabe für $f_2(x)$ erwartet. Mit Pfeil nach oben erscheint $f_1(x)$ die Regressionsgerade. Bestätigen mit enter und die Gerade wird aufgezeichnet.



Die Gerade wird zusammen mit der Funktionsgleichung dargestellt.

Das Dokument kann gespeichert werden:
Ctrl S

Fenster unten links: Es können Ordner und Dateiname gewählt werden.
 Der Name erscheint in der Statusleiste oben.



3.5 Prognosemodell CO₂- Gehalt in der Atmosphäre

Der vom Menschen verursachte Treibhauseffekt

Wir wissen, dass der Mensch seit Beginn des industriellen Zeitalters die Umwelt auf verschiedene Weise negativ beeinflusst hat und damit in das seit Jahrtausenden stabile Gleichgewicht der Erde eingreift. Der Mensch beeinflusst den natürlichen Treibhauseffekt auf verschiedene Art und bewirkt damit einen Anstieg der Temperatur. Die Hauptursache des vom Menschen verursachten zusätzlichen Treibhauseffekts liegt in der Freisetzung von Kohlendioxid (CO₂).

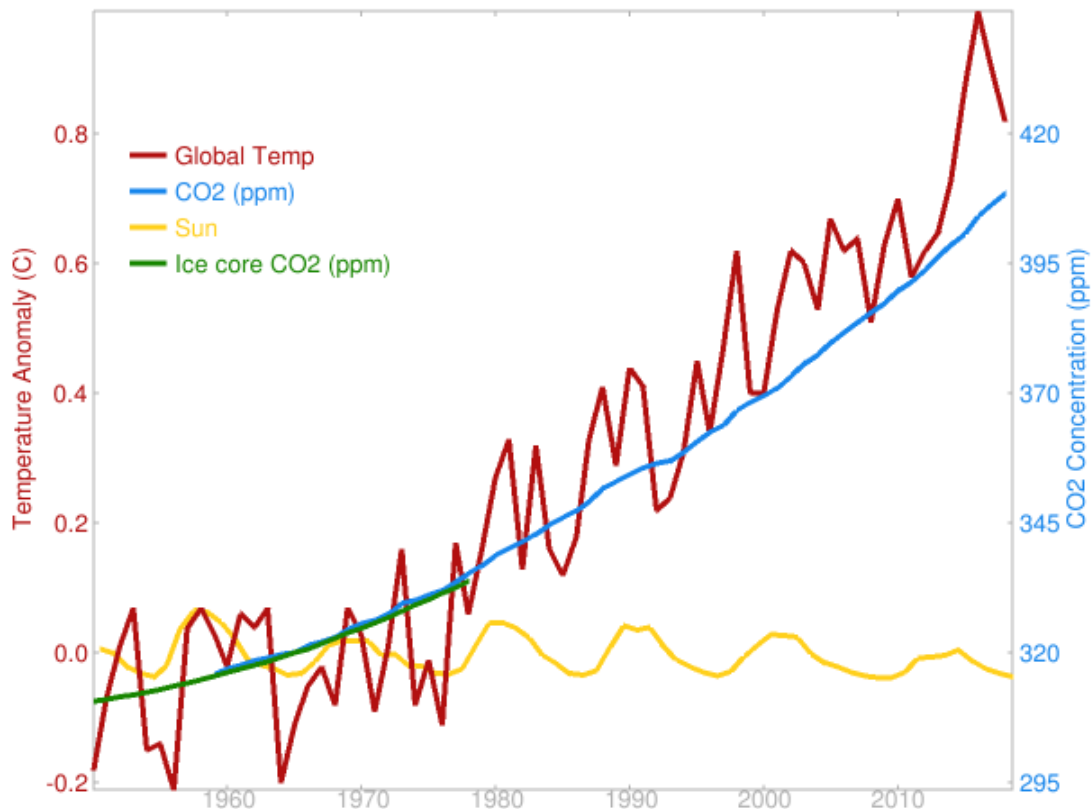


Diagramm: Quelle <http://herdsoft.com/climate/widget/>

Zeitliche Entwicklung Temperaturanstieg, CO₂-Konzentration, Sonnenstrahlung

Die Durchschnittstemperatur der Erdoberfläche stieg in den letzten 50 Jahren um etwa 0.8°C an. Die heutigen Bestrebungen sind den Temperaturanstieg unter 2°C zu halten.

Die CO₂-Konzentration in der Luft wird seit 1959 im Mauna Loa Observatory gemessen. In nebenstehender Tabelle sind die Jahresmittelwerte in parts per million (ppm) aufgeführt. Erst kürzlich hat die UNO davor gewarnt – jetzt ist es passiert: Der CO₂-Gehalt in der Atmosphäre hat erstmals die Schwelle von 400 ppm überschritten. Wohl-gemerkt: Erstmals seit 25 Millionen Jahren. Von einem weiterhin rasanten Anstieg ist auszugehen – wenn die Politik nicht reagiert. Aus Sicht der UNO wird jedoch nur ein Temperaturanstieg von höchstens zwei Grad für gerade noch tolerierbar gehalten. Um dieses Ziel nicht zu überschreiten, sollte die CO₂-Konzentration unter 450 ppm bleiben, so der Weltklimarat.

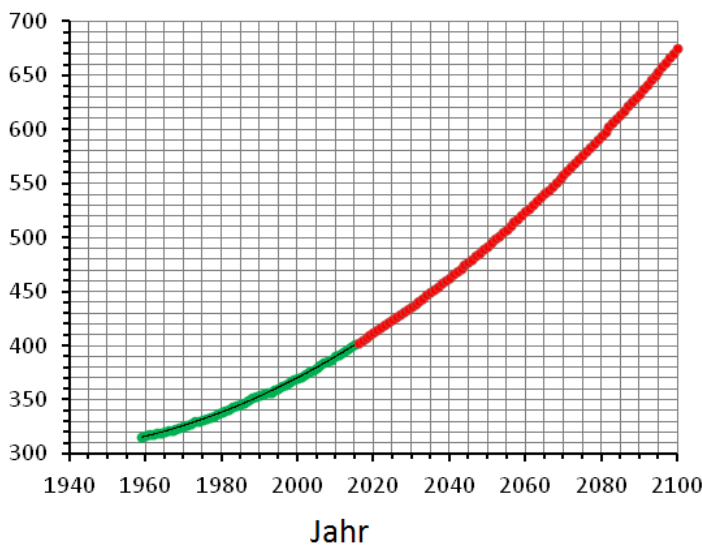
Die Daten (siehe Tabelle unten) zeigen einen quadratischen Verlauf. Aus den vorhandenen Messwerten lässt sich durch Regression die quadratische Funktion ermitteln.

Quadratische Funktion, welche den zeitlichen Verlauf des CO₂-Gehalts beschreibt

$$c(x) = 0.01210306896 \cdot x^2 - 46.5758842257 \cdot x + 45109.6817535$$

Die Funktion wurde durch eine quadratische Regression aus den Daten von 1959 bis 2015 berechnet. Damit lassen sich Prognosen erstellen. In welchem Jahr beträgt der CO₂ - Gehalt 450 ppm? Die Antwort des Modells ist im Jahr 2035.

CO₂- Konzentration in [ppm]



CO₂ -Konzentration in der Atmosphäre

Grüne Kurve: Messwerte

Rote Kurve: Prognose

Jahr	CO ₂ /ppm	Jahr	CO ₂ /ppm	Jahr	CO ₂ /ppm
1959	316.0	1979	336.8	1999	368.3
1960	316.9	1980	338.7	2000	369.5
1961	317.6	1981	340.1	2001	371.1
1962	318.5	1982	341.4	2002	373.2
1963	319.0	1983	343.0	2003	375.8
1964	319.6	1984	344.6	2004	377.5
1965	320.0	1985	346.0	2005	379.8
1966	321.4	1986	347.4	2006	381.9
1967	322.2	1987	349.2	2007	383.8
1968	323.0	1988	351.6	2008	385.6
1969	324.6	1989	353.1	2009	387.4
1970	325.7	1990	354.3	2010	389.8
1971	326.3	1991	355.6	2011	391.6
1972	327.5	1992	356.4	2012	393.8
1973	329.7	1993	357.1	2013	396.5
1974	330.2	1994	358.8	2014	398.6
1975	331.1	1995	360.8	2015	400.8
1976	332.1	1996	362.6		
1977	333.8	1997	363.7		
1978	335.4	1998	366.7		

Tabelle: Daten von 1959 bis 2015
Mauna Loa Observatory

Jahr	Prognose	Messwert
2016	402.7	404.2
2017	404.9	406.6
2018	407.2	408.5
2035	449.2	

Die Messwerte sind etwas höher als die prognostizierten Werte. Der Anstieg der CO₂ -Konzentration wird beschleunigt!

Eine Prognose mit Werten von 1959-2010 ergibt:

Jahr	Prognose	Messwert
2011	391.7	391.6
2012	393.8	393.8
2013	395.9	396.5
2014	398.0	398.6
2015	400.2	400.8
2035	448.6	

3.6 Temperaturabhängige Materialwerte

Es gibt viele Materialwerte, stoffabhängige Größen wie Dichte, Längenausdehnungszahl, spezifische Wärmekapazität, usw., die Funktionen der Temperatur sind. Möchten wir den Einfluss der Temperatur bei Berechnungen berücksichtigen, so verwenden wir häufig Tabellen, in denen die Temperaturabhängigkeit der Materialwerte beschrieben wird. Bei den Anwendungen in der Technik verwendet man häufig Polynome, um die Materialwerte temperaturabhängig darzustellen.

Anhand von zwei Beispielen diskutieren wir, wie der Einfluss der Temperatur bei Berechnungen berücksichtigt werden kann.

Beispiel 1: $\dot{m} = \rho(\vartheta) \cdot \dot{V}$ Umrechnung des Volumenstroms in einen Massenstrom

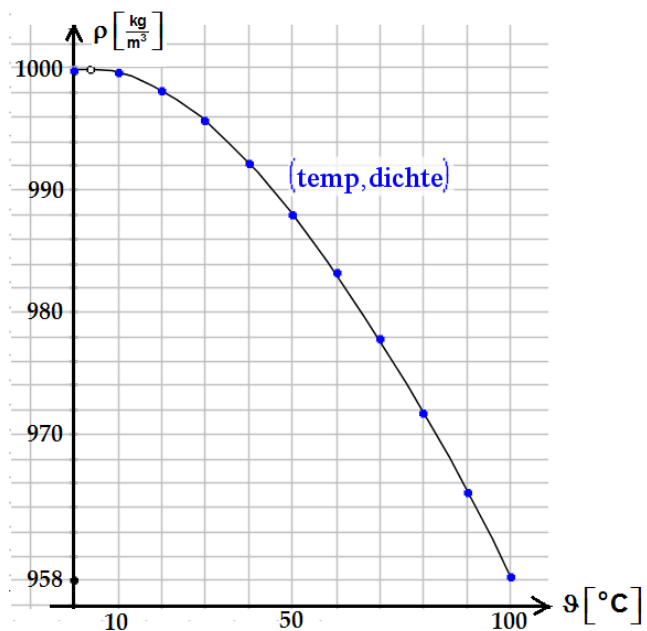
Aufgabenstellung: Durch ein Rohr fließt $\dot{V} = 0.15 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ Wasser der Temperatur $\vartheta = 67^\circ\text{C}$. Berechne den Massenstrom \dot{m} .

Da die Dichte, die wir für die Umrechnung brauchen, temperaturabhängig ist, müssen wir $\rho(67^\circ\text{C})$ mit Hilfe der untenstehenden Tabelle bestimmen. Die Tabelle enthält jedoch nur Werte in 10°C -Schritten. $\rho(67^\circ\text{C})$ lässt sich durch lineare Interpolation aus $\rho(60^\circ\text{C}) = 983.2$ und $\rho(70^\circ\text{C}) = 977.8$ bestimmen (Methode des kleinen Mannes).

$$\rho(67^\circ\text{C}) = \rho(60^\circ\text{C}) + \frac{\rho(70^\circ\text{C}) - \rho(60^\circ\text{C})}{10} \cdot 7 = 983.2 + \frac{-5.4}{10} \cdot 7 = 979.4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Dichte von Wasser bei 0,981 bar

ϑ	ρ
$^\circ\text{C}$	kg m^{-3}
0	999,8
10	999,7
20	998,2
30	995,7
40	992,2
50	988,0
60	983,2
70	977,8
80	971,8
90	965,3



Eine wesentliche Vereinfachung ergibt sich, wenn wir aus den Tabellenwerten eine Funktion $\rho(\vartheta)$ durch Regression bestimmen. Dann lässt sich die Dichte von Wasser zwischen 0 und 100 Grad in den Berechnungen durch einen Funktionsaufruf einsetzen. Dichte als Polynom 4. Grades (Regression 4. Grades mit den Tabellenwerten)

$$\rho(\vartheta) = -1.29953 \cdot 10^{-7} \vartheta^4 + 4.18609 \cdot 10^{-5} \vartheta^3 - 7.57139 \cdot 10^{-3} \vartheta^2 + 5.37277 \cdot 10^{-2} \vartheta + 999.853$$

Mit $\rho(67^\circ\text{C}) = 979.4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ erhalten wir für den Massenstrom

$$\dot{m} = \rho(67^\circ\text{C}) \cdot \dot{V} = 979.4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0.15 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = \underline{\underline{146.9 \frac{\text{kg}}{\text{s}}}}$$

Beispiel 2: $\Delta V = \gamma_m(\Delta\vartheta) \cdot V_0 \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)$ Volumenausdehnung von Wasser

Aufgabenstellung: $V_0 = 1\text{ m}^3$ Wasser wird von $10\text{ }^\circ\text{C}$ auf $50\text{ }^\circ\text{C}$ erwärmt.

Wie gross ist die Volumenänderung ΔV ?

Die Volumenausdehnungszahl γ ist temperaturabhängig (siehe Tabelle unten). Da die Erwärmung über einen Temperaturbereich stattfindet, ändert γ ständig.

Für die Rechnung braucht es einen Mittelwert $\gamma_m(\Delta\vartheta)$ für den Temperaturbereich $\Delta\vartheta$!

Auf welche Art können wir diesen Mittelwert finden?

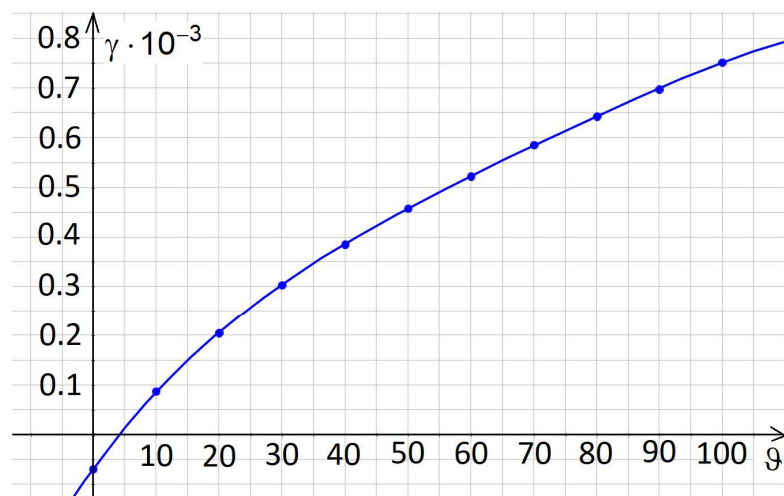
Zunächst bestimmen wir aus den Tabellendaten mit Hilfe der Regression ein Polynom 4. Grades für die Volumenausdehnungszahl $\gamma(\vartheta)$.

Volumenausdehnungszahl Wasser

Tabelle $\gamma(\vartheta)$

ϑ	$\gamma \cdot 10^{-3}$
$^\circ\text{C}$	K^{-1}
0	-0,07
10	0,088
20	0,206
30	0,303
40	0,385
50	0,457
60	0,523
70	0,585
80	0,643
90	0,698
100	0,752

Regressionspolynom $\gamma(\vartheta)$

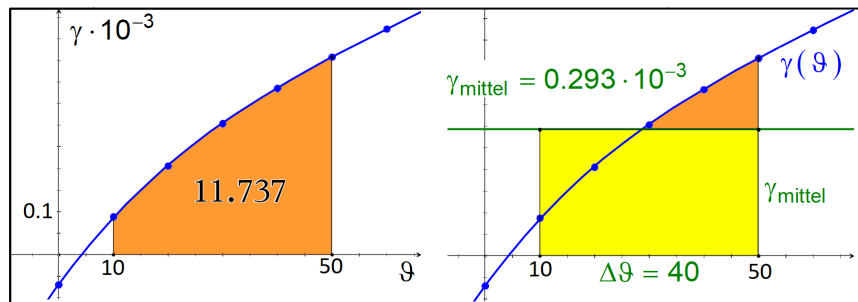


$$\gamma(\vartheta) = -6.75991 \cdot 10^{-9} \cdot \vartheta^4 + 2 \cdot 10^{-6} \cdot \vartheta^3 - 2.17 \cdot 10^{-4} \cdot \vartheta^2 + 0.017403 \cdot \vartheta - 0.068853$$

Bestimmung von

$$\gamma_{\text{mittel}} \Big|_{10}^{50}$$

Aus der orangen Fläche unter der Kurve von $\gamma(\vartheta)$ ein flächengleiches gelbes Rechteck bilden.



$$A = \Delta\vartheta \cdot \gamma_{\text{mittel}} \Big|_{10}^{50} \rightarrow \gamma_{\text{mittel}} \Big|_{10}^{50} = \frac{A}{\Delta\vartheta} \cdot 10^{-3} = \frac{11.737}{40} \cdot 10^{-3} = 0.293 \cdot 10^{-3}$$

Der so gebildete Mittelwert ist während der Ausdehnung von $10\text{ }^\circ\text{C}$ bis $50\text{ }^\circ\text{C}$ konstant, hat aber die gleiche Wirkung wie $\gamma(\vartheta)$.

$\gamma_{\text{mittel}} \Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}$ heisst linearer Mittelwert und kann mathematisch mit der Integralrechnung

bestimmt werden:
$$\gamma_{\text{mittel}} \Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = \frac{\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \gamma(\vartheta) d\vartheta}{\vartheta_2 - \vartheta_1}$$

Resultat: $\Delta V = \gamma_{\text{mittel}} \Big|_{10}^{50} \cdot V_0 \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1) = 0.293 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{K}} \cdot 1\text{ m}^3 \cdot (50 - 10)\text{K} = \underline{\underline{11.72 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}}$

Berechnungsblatt für temperaturabhängige Volumenausdehnung von Wasser

Mit den heutigen Rechnern ist es möglich geworden temperaturabhängige Mittelwerte für Materialwerte ohne grösseren Aufwand mittels Berechnungsblätter zu bestimmen.

Vorgehen

- Daten für temperaturabhängigen Materialwert beschaffen.
- Aus den Daten mittels Regression eine Funktion bestimmen.
- Mit Hilfe der Funktion den linearen Mittelwert für beliebige Temperaturbereiche berechnen.

Berechnungsblatt

The screenshot shows a spreadsheet with the following content:

- Input: $t1:=10 \rightarrow 10^\circ\text{C}$ bis $t2:=50 \rightarrow 50^\circ\text{C}$ (Eingabe Temperaturbereich)
- Input: $vo:=1 \rightarrow 1\text{m}^3$ (Eingabe Wasservolumen)
- Calculation: $\gamma_m := \frac{1}{t2-t1} \int_{t1}^{t2} \gamma(x) dx \rightarrow 0.000293$ (Berechnung des linearen Mittelwertes im Temperaturbereich [t1,t2])
- Calculation: $\text{delta}_v := \gamma_m \cdot vo \cdot (t2-t1) \rightarrow 0.011735$ (Berechnung der Volumenänderung)
- Regression polynomial: $\gamma(x) := (-6.76 \cdot 10^{-9} \cdot x^4 + 1.9285 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 - 2.1728 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 + 1.7403 \cdot 10^{-2} \cdot x - 6.8853 \cdot 10^{-2}) \cdot 10^{-3}$ (Regressionspolynom 4. Grades für temperaturabhängige Ausdehnungszahl)

Für die Berechnung der Volumenänderung $\Delta V = \gamma_m \cdot V_0 \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)$ muss der Temperaturbereich $[\vartheta_1; \vartheta_2]$ und das Wasservolumen V_0 eingegeben werden.

Die temperaturabhängige Volumenausdehnungszahl $\gamma(\vartheta)$ wurde durch Regression 4. ten Grades aus den vorhandenen Datenwerten ermittelt.

$$\gamma(\vartheta) = (-6.76 \cdot 10^{-9} \cdot \vartheta^4 + 1.9285 \cdot 10^{-6} \cdot \vartheta^3 - 2.1728 \cdot 10^{-4} \cdot \vartheta^2 + 1.7403 \cdot 10^{-2} \cdot \vartheta - 6.8853 \cdot 10^{-2}) \cdot 10^{-3}$$

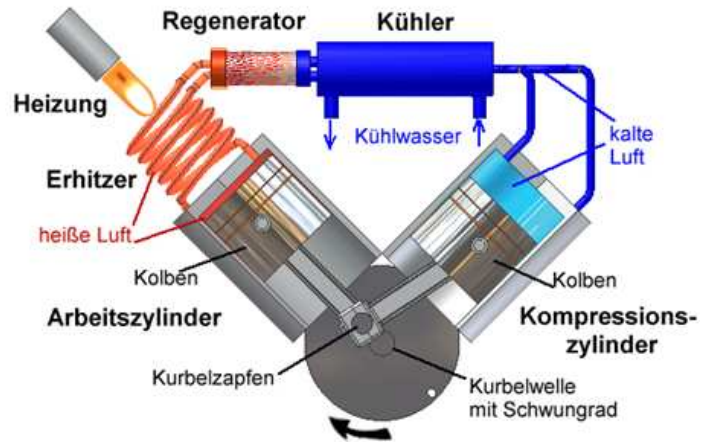
Die mittlere Volumenausdehnungszahl γ_m für den Temperaturbereich $[\vartheta_1; \vartheta_2]$ wird als

linearer Mittelwert aus $\gamma(\vartheta)$ berechnet: $\gamma_m = \gamma_{\text{mittel}} \Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} = \frac{1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \cdot \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \gamma(\vartheta) d\vartheta.$

4 Modelle aus der Technik

4.1 Stirlingmotor

Der Stirlingmotor ist eine periodisch arbeitende Wärmekraftmaschine, die Wärmeenergie in mechanische Energie umwandelt. Beim Stirlingmotor (Heissluftmotor) werden mit dem Arbeitsgas Luft folgende Zustandsänderungen durchgeführt:



Bildquelle: www.stirling-fette.de

Daten für Luft

$$R_{\text{Luft}} = 287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} ; c_V = 720 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$$

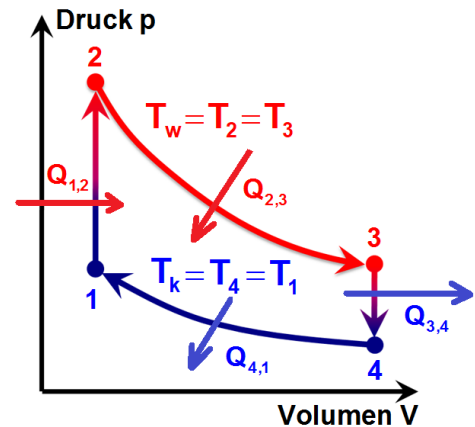
Zustand 1 nach Zustand 2 : Isochore Erwärmung
Die Wärme $Q_{1,2}$ wird zugeführt, um von der kalten Isothermen T_k auf die warme T_w zu gelangen.

Zustand 2 nach Zustand 3 : Isotherme Expansion
Die Wärme $Q_{2,3}$ wird bei T_w zugeführt.

Zustand 3 nach Zustand 4 : Isochore Abkühlung
Die Wärme $Q_{3,4}$ wird abgeführt.

Zustand 4 nach Zustand 1 : Isotherme Kompression
Die Wärme $Q_{4,1}$ wird bei T_k abgeführt, um von der warmen Isothermen T_w auf die kalte T_k zu gelangen.

Da sich das p-V-Diagramm schliesst (Motor arbeitet zyklisch) spricht man von einem Kreisprozess.



Berechnung Kreisprozess, gegebene Zustandsgrößen (gelb markierte Zellen)

Schritt 1: Berechnung der Drücke, Volumina und Temperaturen für die Anfangspunkte der vier Teilprozesse. Wir fassen die gegebenen und die berechneten Werte in einer Tabelle zusammen.

$$\text{isochor: } \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \rightarrow T_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot T_1 = \frac{12 \text{ bar}}{4 \text{ bar}} \cdot 300 \text{ K} = \underline{\underline{900 \text{ K}}}$$

$$\text{isotherm: } p_2 \cdot V_2 = p_3 \cdot V_3 \rightarrow p_3 = \frac{V_2}{V_3} \cdot p_2 = \frac{1.2 \text{ dm}^3}{2.4 \text{ dm}^3} \cdot 12 \text{ bar} = \underline{\underline{6 \text{ bar}}}$$

$$\text{isochor: } \frac{p_3}{T_3} = \frac{p_4}{T_4} \rightarrow p_4 = \frac{T_4}{T_3} \cdot p_3 = \frac{300 \text{ K}}{900 \text{ K}} \cdot 6 \text{ bar} = \underline{\underline{2 \text{ bar}}}$$

Zustandsgrößen	Zustand 1	Zustand 2	Zustand 3	Zustand 4
Volumen V in dm ³	1.2	1.2	2.4	2.4
Druck p in bar	4	12	6	2
Temperatur in K	300	900	900	300

Schritt 2: Berechnung der Gasmasse.

$$p_1 \cdot V_1 = m \cdot R \cdot T_1 \rightarrow m = \frac{p_1 \cdot V_1}{R \cdot T_1} = \frac{4 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 1.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 300\text{K}} = 0.00557 \text{ kg} = \underline{\underline{5.57\text{g}}}$$

Schritt 3: Berechnung der zu- und abgeführten Wärme für die vier Teilprozesse.

1 → 2 : Isochore Erwärmung

$$Q_{1,2} = c_v \cdot m \cdot (T_2 - T_1) = 720 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 0.00557 \text{ kg} \cdot (900 - 300) = \underline{\underline{2406.2\text{J}}}$$

2 → 3 : Isotherme Expansion

$$Q_{2,3} = m \cdot R_{\text{Luft}} \cdot T_2 \cdot \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = 0.00557 \text{ kg} \cdot 287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 900 \text{ K} \cdot \ln\left(\frac{2.4 \text{ dm}^3}{1.2 \text{ dm}^3}\right) = \underline{\underline{997.3\text{J}}}$$

3 → 4 : Isochore Abkühlung

$$Q_{3,4} = c_v \cdot m \cdot (T_4 - T_3) = 720 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 0.00557 \text{ kg} \cdot (300 - 900) = \underline{\underline{-2406.2\text{J}}}$$

Beachte: $Q_{3,4} = -Q_{1,2}$ (zu- bzw. abgeführte Wärme zwischen zwei Isothermen).

4 → 1 : Isotherme Kompression

$$Q_{4,1} = m \cdot R_{\text{Luft}} \cdot T_4 \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_4}\right) = 0.00557 \text{ kg} \cdot 287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 300 \text{ K} \cdot \ln\left(\frac{1.2 \text{ dm}^3}{2.4 \text{ dm}^3}\right) = \underline{\underline{-332.4\text{J}}}$$

Schritt 4: Berechnung der Nutzarbeit pro Zyklus und der Leistung des Motors mit Energiestromdiagramm:

$$W = Q_{\text{zu}} - Q_{\text{ab}} = 664.9\text{J}$$

$$\text{mit } Q_{\text{zu}} = Q_{2,3} + Q_{1,2} = 3403.5\text{J} \text{ und } Q_{\text{ab}} = |Q_{3,4}| + |Q_{4,1}| = 2738.6\text{J}$$

Die Leistung des Motors ergibt sich aus der Drehfrequenz f (Anzahl Zyklen pro Sekunde). Für $f = 3\text{Hz} = 3 \frac{1}{\text{s}}$ ergibt sich eine Leistung:

$$P = f \cdot W = 3 \frac{1}{\text{s}} \cdot 664.9\text{J} = 1994.7 \frac{\text{J}}{\text{s}} \approx \underline{\underline{2\text{kW}}}$$

Schritt 5: Berechnung des Wirkungsgrads des Motors

$$\eta = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} = \frac{|W|}{Q_{1,2} + Q_{2,3}} = \frac{664.9\text{J}}{2406.2\text{J} + 997.3\text{J}} = \underline{\underline{0.20}}$$

Vergleich mit dem bestmöglichen Wirkungsgrad η_{Carnot}

$$\eta_{\text{Carnot}} = \frac{T_w - T_k}{T_w} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{900\text{K} - 300\text{K}}{900\text{K}} = \underline{\underline{0.67}} \quad \eta \text{ beträgt ca. } 30\% \text{ von } \eta_{\text{Carnot}}!$$

Schritt 6: Wärmerückgewinnung

Regenerator: Der Arbeitsprozess des Stirlingmotors kann durch einen Regenerator optimiert werden. Dieser ist ein Drahtgeflecht, das die Wärme der Luft zwischen speichert, wenn diese vom heißen in den kalten Bereich des Motors verdrängt wird. Auf dem Rückweg in den heißen Bereich wird die Luft im Regenerator vorgewärmt, so dass weniger Wärme zugeführt werden muss.

Würde die Zwischenspeicherung von $Q_{3,4}$ im Regenerator zu 100% gelingen, so ergibt sich mit $Q_{1,2} = -Q_{3,4}$ für den Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} = \frac{|W|}{Q_{2,3}} = \frac{664.9\text{J}}{997.3\text{J}} = \underline{\underline{0.67}} = \eta_{\text{Carnot}}$$

Berechnungsblatt

Zustandsgrößen (4 Eckpunkte im pV-Diagramm)

$$v1:=1.2 \cdot 10^{-3} \rightarrow 0.0012 \quad v2:=v1 \rightarrow 0.0012 \quad v3:=\text{right}(\text{solve}(p2 \cdot v2=p3 \cdot x, x)) \rightarrow 0.0024 \quad v4:=v3 \rightarrow 0.0024$$

$$p1:=4 \cdot 10^5 \rightarrow 4 \cdot \text{E}5 \quad p2:=12 \cdot 10^5 \rightarrow 1.2 \cdot \text{E}6 \quad p3:=6 \cdot 10^5 \rightarrow 6 \cdot \text{E}5 \quad p4:=\text{right}(\text{solve}(\frac{p3}{t3}=\frac{x}{t4}, x)) \rightarrow 2 \cdot \text{E}5$$

$$t1:=300. \rightarrow 300. \quad t2:=\text{right}(\text{solve}(\frac{p1}{t1}=\frac{p2}{x}, x)) \rightarrow 900. \quad t3:=t2 \rightarrow 900. \quad t4:=t1 \rightarrow 300.$$

$$\text{Daten Luft: } r:=287 \rightarrow 287 \quad cv:=720 \rightarrow 720 \quad m:=\text{right}(\text{solve}(p1 \cdot v1=x \cdot r \cdot t1, x)) \rightarrow 0.005575$$

$$\text{Kontrolle (Massenerhaltung) } \text{right}(\text{solve}(p2 \cdot v2=x \cdot r \cdot t2, x)) \rightarrow 0.005575$$

$$\text{right}(\text{solve}(p3 \cdot v3=x \cdot r \cdot t3, x)) \rightarrow 0.005575 \quad \text{right}(\text{solve}(p4 \cdot v4=x \cdot r \cdot t4, x)) \rightarrow 0.005575$$

$$q12:=cv \cdot m \cdot (t2-t1) \rightarrow 2408.36 \quad q23:=m \cdot r \cdot t2 \cdot \ln\left(\frac{v3}{v2}\right) \rightarrow 998.132 \quad qzu:=q12+q23 \rightarrow 3406.49$$

$$q34:=cv \cdot m \cdot (t4-t3) \rightarrow -2408.36 \quad q41:=m \cdot r \cdot t4 \cdot \ln\left(\frac{v1}{v4}\right) \rightarrow -332.711 \quad qab:=|q34+q41| \rightarrow 2741.07$$

$$wnutz:=qzu-qab \rightarrow 665.421 \quad f:=3 \rightarrow 3 \quad \text{leistung}:=f \cdot wnutz \rightarrow 1996.26$$

$$\eta_a:=\frac{wnutz}{qzu} \rightarrow 0.2 \quad \eta_{\text{carnot}}:=\frac{t2-t1}{t2} \rightarrow 0.67$$

$$\text{Regenerator (p\%): } \eta_{a,r}:=\frac{wnutz}{(1-p) \cdot q12+q23} \rightarrow 0.2$$

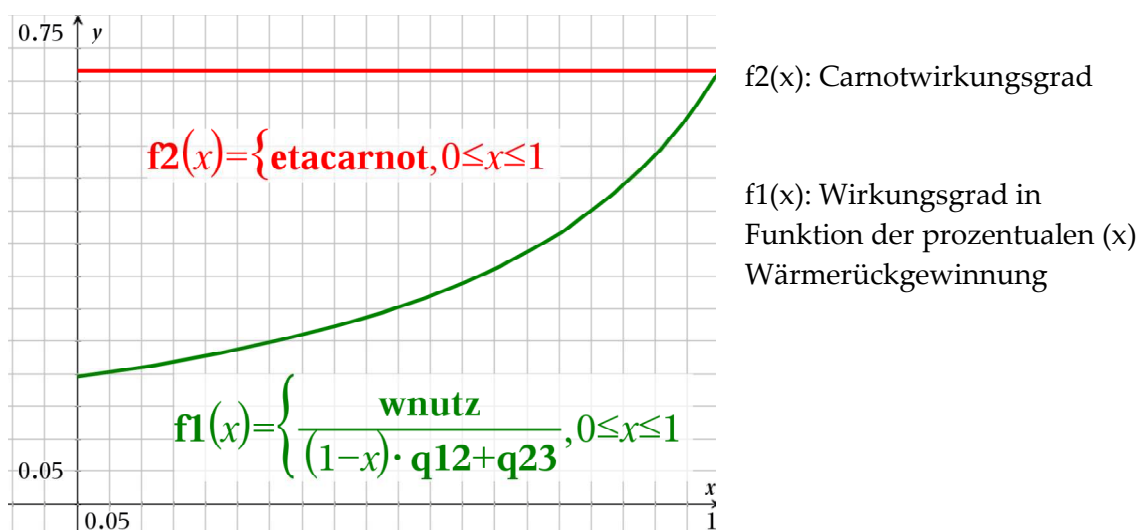
$$\text{Regenerator (50\%)} \quad \frac{wnutz}{0.5 \cdot q12+q23} \rightarrow 0.3 \quad \text{Regenerator (100\%)} \quad \frac{wnutz}{q23} \rightarrow 0.67$$

$$f1(x):=\begin{cases} \frac{wnutz}{(1-x) \cdot q12+q23}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \rightarrow \text{Done} \quad f2(x):=\begin{cases} \eta_{\text{carnot}}, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \rightarrow \text{Done}$$

Vergleich thermischer Wirkungsgrad mit Carnotwirkungsgrad

Graphische Darstellung des Wirkungsgrades in Abhängigkeit der prozentualen Wärmerückgewinnung im Regenerator.

Bei 100%-iger Wärmerückgewinnung ist $\eta = \eta_{\text{Carnot}}$.



4.2 Erzwungene Konvektion

Erzwungene Konvektionen lassen sich rezeptartig in 4 Schritten berechnen:

- 1) Berechnung der Reynoldszahl $Re = \frac{v \cdot x}{\nu}$
- 2) Charakterisierung der Strömung (laminar, turbulent)
- 3) Berechnung der Nusseltzahl Nu
- 4) Berechnung der Wärmeübergangszahl $\alpha = \frac{\lambda}{x} \cdot Nu$

Für eine überströmte Platte gilt:

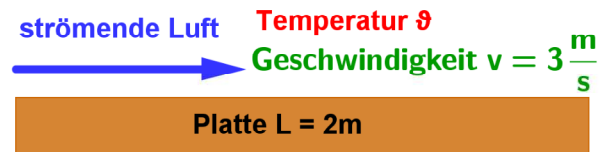
Charakteristische Länge $x = L =$ Plattenlänge

Reynoldszahl und Nusseltzahl

Reynoldszahl	Nusseltzahl	
$Re = \frac{v \cdot L}{\nu}$	laminar	turbulent
$Re_{kritisch} = 3 \cdot 10^5$	$Nu = 0.644 \cdot \sqrt{Re} \cdot \sqrt[3]{Pr}$	$Nu = 0.037 \cdot Re^{0.8} \cdot Pr^{0.48}$

Problemstellung: Temperaturabhängige Konvektion

Über eine $L = 2$ m lange Platte strömt Luft der Temperatur ϑ mit der Geschwindigkeit $v = 3 \frac{m}{s}$.



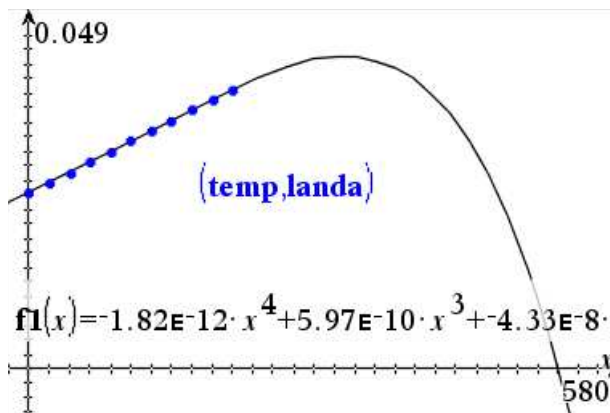
Daten von Luft von 0 bis 200 Grad

Wärmeleitfähigkeit (λ): λ_{anda} , kinematische Viskosität (ν): $\nu_{ü}$, Prandelzahl (Pr): pr
 Aus den temperaturabhängigen Daten der Tabelle können mittels der Regression Funktionen ermittelt werden (hier Regression 4. Grades).

	A temp	B λ_{anda}	C $\nu_{ü}$	D pr	E	F	G	H	I	J
						=QuartRe	=QuartRe	=QuartRe		
1	0	0.0243	13.3...	0.711	Title...	Quartic R...	Title...	Quartic R...	Title...	Quartic R...
2	20	0.0257	15.1...	0.713	Reg...	$a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$	Reg...	$a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$	Reg...	$a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$
3	40	0.0271	16.9...	0.711	a	-1.8211E-08	a	-2.09426E-08	a	-2.36742E-08
4	60	0.0285	18.9...	0.709	b	5.97319E-08	b	7.02943E-08	b	1.4593E-08
5	80	0.0299	20.9...	0.708	c	-4.3269E-08	c	2.80813E-08	c	-0.00000E-08
6	100	0.0314	23.0...	0.704	d	0.000071	d	8.97229E-08	d	0.000124
7	120	0.0328	25.2...	0.7	e	0.024299	e	0.000013	e	0.711084
8	140	0.0343	27.5...	0.694	R^2	0.999985	R^2	0.999994	R^2	0.990397
9	160	0.0358	29.8...	0.693	Res...	{6.99300E-08}	Res...	{1.11888E-08}	Res...	{-8.3916E-08}
10	180	0.0372	32.2...	0.69						
11	200	0.0386	34.6...	0.685						

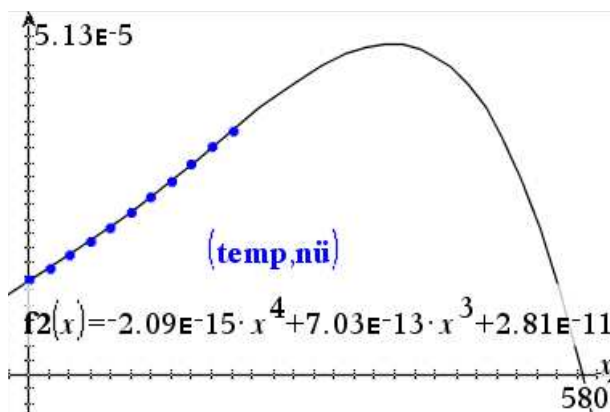
f1(x): Polynom 4. Grades für die Wärmeleitfähigkeit in Funktion der Temperatur

$$\lambda(\vartheta) = -1.8211 \cdot 10^{-12} \cdot \vartheta^4 + 5.97319 \cdot 10^{-10} \cdot \vartheta^3 - 4.32692 \cdot 10^{-8} \cdot \vartheta^2 + 0.000071 \cdot \vartheta + 0.024299$$



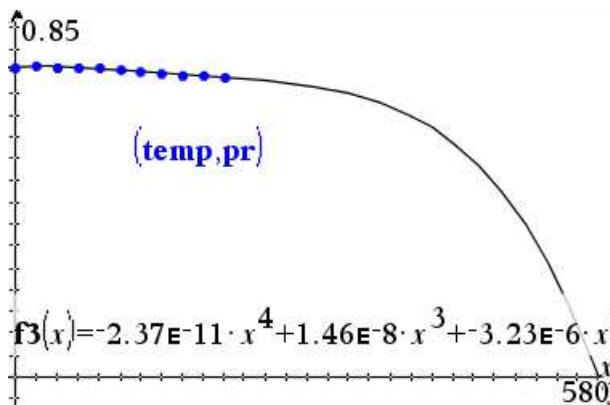
f2(x): Polynom 4. Grades für die kinematische Viskosität in Funktion der Temperatur

$$\nu(\vartheta) = -2.09426 \cdot 10^{-15} \cdot \vartheta^4 + 7.02943 \cdot 10^{-13} \cdot \vartheta^3 + 2.80813 \cdot 10^{-11} \cdot \vartheta^2 + 8.97229 \cdot 10^{-8} \cdot \vartheta + 0.000013$$



f3(x): Polynom 4. Grades für die Prantelzahl in Funktion der Temperatur

$$Pr(\vartheta) = -2.36742 \cdot 10^{-11} \cdot \vartheta^4 + 1.4593 \cdot 10^{-8} \cdot \vartheta^3 - 0.000003 \cdot \vartheta^2 + 0.000124 \cdot \vartheta + 0.711084$$



Temperaturabhängige Berechnung

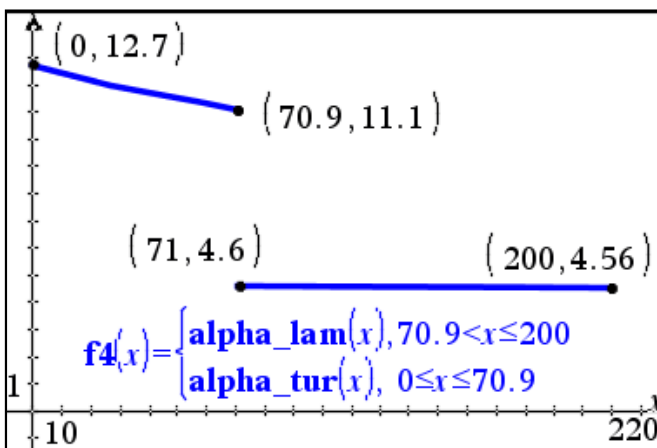
Verwenden wir für die Berechnung die ermittelten Funktionen, so kann die Wärmeübergangszahl temperaturabhängig bestimmt werden.

```

v:=3 ▶ 3  l:=2 ▶ 2
n(x):=f2(x) ▶ Done  la(x):=f1(x) ▶ Done  pra(x):=f3(x) ▶ Done
re(x):= $\frac{v \cdot l}{n(x)}$  ▶ Done  re_kritisch:=3 · 105 ▶ 300000
turbulent: solve(re(x)>re_kritisch,x)|0≤x≤200 ▶ 0≤x<70.9098
nu_tur(x):=0.037 · (re(x))0.8 · (pra(x))0.48 ▶ Done
alpha_tur(x):= $\frac{nu_tur(x) \cdot la(x)}{1}$  ▶ Done  []
laminar: solve(re(x)<re_kritisch,x)|0≤x≤200 ▶ 70.9098<x≤200
nu_lam(x):=0.644 · (re(x))0.5 · (pra(x)) $\frac{1}{3}$  ▶ Done
alpha_lam(x):= $\frac{nu_lam(x) \cdot la(x)}{1}$  ▶ Done

f4(x):= $\begin{cases} \alpha_{lam}(x), & 70.9 < x \leq 200 \\ \alpha_{tur}(x), & 0 \leq x \leq 70.9 \end{cases}$  ▶ Done

alpha_tur(0) ▶ 12.74  alpha_tur(70) ▶ 11.07
alpha_lam(71) ▶ 4.60  alpha_lam(200) ▶ 4.56
    
```



f4(x): Berechnete Wärmeübergangszahl in Funktion der Temperatur

Von 0°C – 70.9°C ist die Strömung turbulent. Die Wärmeübergangszahl α sinkt mit steigender Temperatur von $12.7 \frac{W}{m^2K}$ auf $11.1 \frac{W}{m^2K}$.

Von 71°C – 200°C ist die Strömung laminar. Die Wärmeübergangszahl α macht einen Sprung auf $4.6 \frac{W}{m^2K}$ und bleibt konstant.

4.3 Berechnung einer Rohrverzweigung

Strömungstechnische Grundlagen

Kontinuitätsgleichung $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$

Bernoulli-Gleichung $\rho \cdot g \cdot h_1 + p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = \rho \cdot g \cdot h_2 + p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 + \Delta p$

Berechnung des reibungsbedingten Druckabfalls Δp für turbulente Strömungen in einem geraden Rohr der Länge L mit dem Durchmesser d .

Druckverlust: $\Delta p = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2$

Die Rohrreibungszahl λ ist eine dimensionslose Kennzahl. Bei turbulenter Strömung gibt es zur Bestimmung der Rohrreibungszahl mehrere Näherungsformeln, die je nach Rauheit des Rohrs angewendet werden.

Übergangsbereich: $65 < \text{Re} \cdot \frac{k}{d} < 1300$, $\lambda = f(\text{Re}, \frac{k}{d})$

Das gesamte Gebiet zwischen hydraulisch glatt und hydraulisch rau bezeichnet man als Übergangsbereich. Bei diesem Übergangsbereich hängt die Rohrreibungszahl λ sowohl von der Reynolds-Zahl Re als auch von der Rohrrauigkeit $\frac{k}{d}$ ab.

Es gilt das folgende empirische Gesetz nach Colebrook:

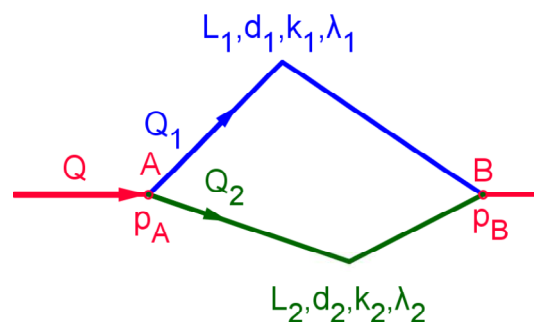
Colebrook-White Gleichung $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \log_{10} \left(\frac{2.51}{\text{Re} \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{k}{d} \cdot 0.269 \right)$

Anstelle der Formel kann man den Wert für λ aus dem Moody-Diagramm bestimmen.

Problemstellung: Rohrverzweigung

Voraussetzungen

- Keine Armaturen- und Fittingsverluste
- Leitung liegt horizontal, also keine Höhenunterschiede zwischen A und B.



Gesucht: Q_1 , Q_2 Verteilung der Durchflussmengen auf die beiden Stränge 1 und 2
 p_B Druck bei B

Gegeben: $Q = 9000 \frac{\text{Liter}}{\text{min}}$, $p_A = 11 \text{ bar}$, Wasser (20°C) $\rho = 998 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\nu = 1.004 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

Rohr 1: $L_1 = 1200 \text{ m}$, $d_1 = 0.2 \text{ m}$, $k_1 = 0.5 \text{ mm}$

Rohr 2: $L_2 = 900 \text{ m}$, $d_2 = 0.125 \text{ m}$, $k_2 = 0.3 \text{ mm}$

Lösung: Wir erhalten durch folgende Überlegungen ein Gleichungssystem für die Strömungsgeschwindigkeiten c_1 und c_2 .

Die Rohre 1 und 2 sind parallel geschaltet, d.h. der Druckabfall ist in beiden gleich.

$\lambda_1 \cdot \frac{L_1}{d_1} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 = \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{d_2} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2$ und das Kontinuitätsgesetz liefert

$$\frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} \cdot c_1 + \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} \cdot c_2 = Q.$$

Im Gleichungssystem für die Strömungsgeschwindigkeiten c_1 und c_2 gibt es jedoch noch zwei weitere Unbekannte, die beiden Rohrreibungszahlen λ_1 und λ_2 .

Diese lassen sich mit folgendem Programm durch eine Iteration bestimmen.

rohrreibungszahl	0/18
------------------	------

```

Define rohrreibungszahl()=
Prgm
Local i,c1c2,v1v2,re1,re2,lambda1,lambda2a
lambda1:=1
lambda2:=1
For i,1,50
    c1c2:=solve(
        {
            lambda1 * (l1 / d1) * (rho / 2) * c1^2 = lambda2 * (l2 / d2) * (rho / 2) * c2^2
            (d1^2 * pi / 4) * c1 + (d2^2 * pi / 4) * c2 = qein
        }, c1, c2
    )
    v1v2:=part(c1c2,1)
    v1:=right(part(v1v2,1))
    v2:=right(part(v1v2,2))
    re1:= (v1 * d1) / nu
    re2:= (v2 * d2) / nu
    lambda1a:=right(solve(
        {
            1 / sqrt(lambda) = -2 * log(
                10(
                    (2.51 / (re1 * sqrt(lambda)) + (k1 / (1000 * d1)) * 0.269
                ), lambda
            )
        }, lambda
    ))
    lambda2a:=right(solve(
        {
            1 / sqrt(lambda) = -2 * log(
                10(
                    (2.51 / (re2 * sqrt(lambda)) + (k2 / (1000 * d2)) * 0.269
                ), lambda
            )
        }, lambda
    ))
    If |lambda1a - lambda1| < 10^-5 and |lambda2a - lambda2| < 10^-5 Then
        Exit
    EndIf
    lambda1:=lambda1a
    lambda2:=lambda2a
EndFor
EndPrgm
    
```

Wir beginnen mit einem Startwert für die beiden Rohrreibungszahlen λ_1 und λ_2 . Das Gleichungssystem für die Strömungsgeschwindigkeiten c_1 und c_2 und die Colebrook-White Gleichungen für die beiden Rohrreibungszahlen λ_1 und λ_2 werden solange gelöst, bis sich λ_1 und λ_2 nicht mehr ändern.

Schon nach wenigen Schritten sind so λ_1 und λ_2 bestimmt und somit auch die Strömungsgeschwindigkeiten v_1 und v_2 .

Das Programm kann als CAS-Baustein **rohrreibungszahl()** im Notes aufgerufen werden. Dadurch lässt sich ein Berechnungsblatt für die Problemstellung Rohrverzweigung erstellen.

Berechnungsblatt Rohrverzweigung, Durchflussmenge, Druckabfall

Durchflussmenge: $q := 9000 \rightarrow 9000$ Liter/min Druck bei A: $p_a := 11 \rightarrow 11$ bar

$$q_{\text{ein}} := \frac{q}{1000 \cdot 60} \rightarrow 0.15 \text{ m}^3/\text{Sekunde}$$

Rohr 1: $d_1 := 0.2 \rightarrow 0.2$ m $l_1 := 1200 \rightarrow 1200$ m $k_1 := 0.5 \rightarrow 0.5$ (Rauhheit in mm)

Rohr 2: $d_2 := 0.125 \rightarrow 0.125$ m $l_2 := 900 \rightarrow 900$ m $k_2 := 0.3 \rightarrow 0.3$ (Rauhheit in mm)

Wasser (20°C): $\rho := 998 \rightarrow 998$ kg/m³ $\nu := 1.004 \cdot 10^{-6} \rightarrow 1.004E-6$ m²/s

Berechnungen CAS-Baustein rohrreibungszahl() \rightarrow Fertig

$\lambda_1 \rightarrow 0.0251$ $\lambda_2 \rightarrow 0.025$ $v_1 \rightarrow 3.518$ m/s $v_2 \rightarrow 3.218$ m/s

Resultate Durchflussmenge Rohr 1 und 2

$$q_1 := \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} \cdot v_1 \cdot 1000 \cdot 60 \rightarrow 6631. \text{ Liter/min}$$

$$q_2 := \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} \cdot v_2 \cdot 1000 \cdot 60 \rightarrow 2369. \text{ Liter/min} \quad \text{total: } q_1 + q_2 \rightarrow 9000. \text{ Liter/min}$$

$$\text{Druckabfall A-B: } p_{ab} := \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 \cdot 10^{-5} \rightarrow 9.288 \text{ bar}$$

Druck bei B: $p_b := p_a - p_{ab} \rightarrow 1.712$ bar

CAS-Baustein rohrreibungszahl()

Iterative Lösung mit Startwerten $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 1$

$$\left| \begin{array}{l} \lambda_1 \cdot \frac{L_1}{d_1} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 = \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{d_2} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 \\ \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} \cdot c_1 + \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} \cdot c_2 = Q \end{array} \right| \rightarrow v_1 = c_1, v_2 = c_2$$

$$Re_1 = \frac{v_1 \cdot d_1}{\nu}, Re_2 = \frac{v_2 \cdot d_2}{\nu}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = -2 \cdot \log_{10} \left(\frac{2.51}{Re_1 \cdot \sqrt{\lambda_1}} + \frac{k_1}{d_1} \cdot 0.269 \right) \rightarrow \lambda_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = -2 \cdot \log_{10} \left(\frac{2.51}{Re_2 \cdot \sqrt{\lambda_2}} + \frac{k_2}{d_2} \cdot 0.269 \right) \rightarrow \lambda_2$$

λ_1 und λ_2 konvergieren: $\lambda_1 = 0.0251$, $\lambda_2 = 0.0250$

$v_1 = 3.53 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_2 = 3.22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Resultat: Verteilung der Durchflussmengen auf die beiden Stränge 1 und 2:

$$Q_1 = \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} \cdot v_1 \cdot 1000 \cdot 60 = 6'631 \frac{\text{Liter}}{\text{min}}, Q_2 = \frac{d_2^2 \cdot \pi}{4} \cdot v_2 \cdot 1000 \cdot 60 = 2'369 \frac{\text{Liter}}{\text{min}}$$

$$\text{Druckabfall } \Delta p = \lambda_1 \frac{L_1}{d_1} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 \cdot 10^{-5} = \lambda_2 \cdot \frac{L_2}{d_2} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 \cdot 10^{-5} = 9.29 \text{ bar}$$

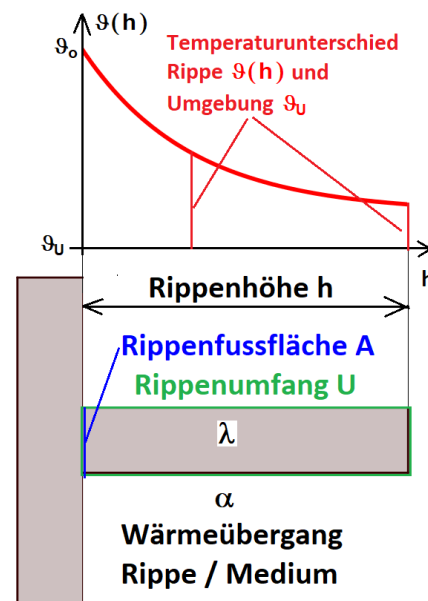
Druck bei B: $p_B = p_A - \Delta p = 1.71 \text{ bar}$

4.4 Wärmeübergang an berippten Flächen

Mit Rippen lässt sich die Oberfläche einer Wand vergrössern, damit für den Wärmeübergang mehr Fläche zur Verfügung steht.

Berippte Flächen oder Rippenrohre sind nur sinnvoll, wenn sich die Wärmeübergangszahl α der beiden Medien wesentlich voneinander unterscheidet. Die Rippen gehören auf die Seite mit dem kleineren α . Rippen auf beiden Seiten einer Wand sind nicht sinnvoll. Es ist besser, durch konstruktive Massnahmen die Wandfläche zu vergrössern. Infolge der endlichen Leitfähigkeit λ des Rippenwerkstoffes ergibt sich eine ungleichmässige Temperaturverteilung an der Rippe. Diese reduziert das wirksame Temperaturgefälle Wand – Medium.

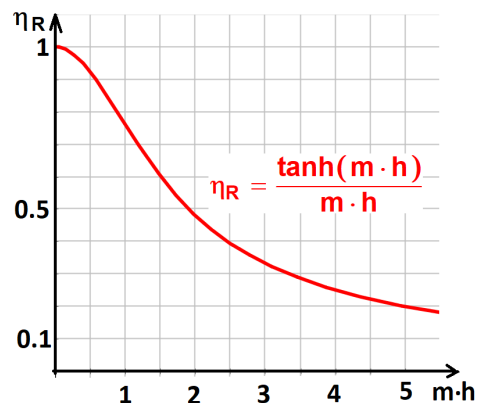
Die dadurch entstehende Minderleistung im Abführen oder Zuführen von Wärme wird zweckmässig mit einem Rippenwirkungsgrad η_R berücksichtigt. Das Herleiten des Rippenwirkungsgrades ist sehr kompliziert, so dass wir uns auf die Anwendung der resultierenden Formeln beschränken.



$$\eta_R = \frac{\tanh(m \cdot h)}{m \cdot h} \text{ mit}$$

$\tanh()$ Tangenshyperbolicus

$$m = \sqrt{\frac{\alpha \cdot U}{\lambda \cdot A}} \text{ und } h = \text{Rippenhöhe}$$



$U [m]$ = Rippenumfang (2 x Länge der Rippe + 2 x Fussbreite der Rippe)

$A [m^2]$ = Rippenfussfläche (Länge der Rippe x Fussbreite der Rippe)

$\lambda \left[\frac{W}{mK} \right]$ = Wärmeleitwert des Rippenmaterials

$\alpha \left[\frac{W}{m^2K} \right]$ = Wärmeübergang Rippe umgebendes Medium

Mit dem Produkt $m \cdot h$ aus dem Wert m und der Rippenhöhe $h [m]$ kann der Rippenwirkungsgrad η_R berechnet.

Wirksame Mehrfläche = (Rippenoberfläche x η_R) – die verlorene Wurzelfläche A

Der Rippenwirkungsgrad η_R ist ein Idealwert für eine rechteckige Rippe und verschlechtert sich, wenn die Rippe Giessanzug hat, dreieckig ist oder um ein Rohr herumläuft (Zylinderkopf eines luftgekühlten Motors).

Beispiel: Passive Kühlung Variantenanalyse

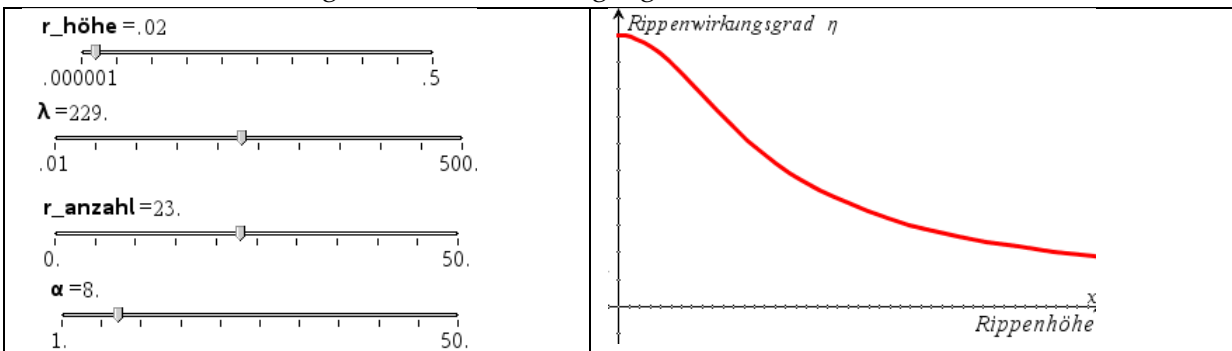
Problemstellung: Ein Computer soll passiv über das Gehäuse (24cm x 22cm x 6cm) einen Wärmestrom von 30W abführen. Die Kühlung muss bis zu einer Aussentemperatur von 50°C gewährleistet werden und die Innentemperatur darf nicht über 60°C ansteigen.



Berechnung mit der Software TI-Nspire CAS

Durch die Schieberegler können folgende Parameter variiert werden:

Design Gehäuse: Rippenhöhe, Anzahl Rippen,
Material: Wärmeleitfähigkeit λ , Wärmeübergang α



Innentemperatur ohne Rippen

$$q_p = \alpha \cdot a \cdot (t_i - t_a) \Rightarrow 30 = 1.2864 \cdot (t_i - 50)$$

Wärmestrom (Wärmeleistung in Watt): $q_p = 30$

$$\text{Wärmeübergangskoeffizient } \alpha = 8 \cdot \frac{W}{m^2 K}$$

$$\text{Oberfläche des Gehäuses } a = 2 \cdot (0.24 \cdot 0.22 + 0.24 \cdot 0.06 + 0.22 \cdot 0.06) \text{ m}^2$$

Aussentemperatur $t_a = 50 \text{ }^\circ\text{C}$

$$\text{Innentemperatur (}^\circ\text{C), maximal 60}^\circ\text{C: solve}(q_p = \alpha \cdot a \cdot (t_i - t_a), t_i) \Rightarrow t_i = 73.3209$$

Oberflächenvergrößerung durch Rippen

$$r_{\text{breite}} = 0.002 ; r_{\text{höhe}} = 0.02 ; r_{\text{länge}} = 0.238 ; r_{\text{anzahl}} = 23.$$

Wärmeleitfähigkeit Rippe (Stahl=30, Aluminium=229, Kupfer=393, Silber=410): $\lambda = 229.$

$$r_{\text{umfang}} = 2 \cdot (r_{\text{länge}} + r_{\text{breite}}) = 0.48$$

$$r_{\text{querschnitt}} = r_{\text{länge}} \cdot r_{\text{breite}} = 0.000476$$

$$m = \sqrt{\frac{\alpha \cdot r_{\text{umfang}}}{\lambda \cdot r_{\text{querschnitt}}}} = 5.93532$$

$$\text{Rippenwirkungsgrad } \eta_r = \frac{\tanh(m \cdot r_{\text{höhe}})}{m \cdot r_{\text{höhe}}} = 0.995329$$

$$r_{\text{oberfläche}} = r_{\text{querschnitt}} + 2 \cdot r_{\text{höhe}} \cdot (r_{\text{breite}} + r_{\text{länge}}) = 0.010076$$

Wirksame Mehrfläche

$$\text{mehrfläche} = r_{\text{anzahl}} \cdot (r_{\text{oberfläche}} \cdot \eta_r - r_{\text{querschnitt}}) = 0.219718$$

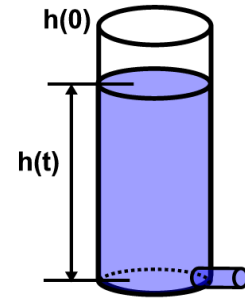
$$a_{\text{neu}} = a + \text{mehrfläche} = 0.380518$$

$$\text{Innentemperatur mit Rippen maximal 60}^\circ\text{C: solve}(q_p = \alpha \cdot a_{\text{neu}} \cdot (t_i - t_a), t_i) \Rightarrow t_i = 59.855$$

4.5 Ausflussmodell

Problemstellung: Ausfluss eines Wasserbehälters

Wir füllen einen Zylinder mit Wasser. Am Boden des Zylinders befindet sich ein Ausfluss. Zum Zeitpunkt $t = 0$ öffnen wir den Ausfluss, wobei die Anfangshöhe der Wassersäule $h(0)$ beträgt. Wir stellen uns die Frage, wie sich die Wasserhöhe $h(t)$ in Funktion der Zeit beim Ausfließen verhält. Dazu betrachten wir die Wassersäule als System (Wasserspeicher), wobei die Höhe $h(t)$ den Wasserbestand beschreibt. Der Wasserbestand $h(t)$ wird durch den Ausfluss (Änderungsrate von h) geändert. Da der Querschnitt des Zylinders konstant ist, beschreibt die Änderungsrate von h auch die Änderungsrate des Wasservolumens ($V = A \cdot h$) im Speicher.



Verschiedene Modellansätze: Die Änderungsrate bestimmt den Bestand. Aus der Änderungsrate $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ kann der Bestand $h(t)$ mathematisch berechnet werden.

Die Gleichung mit der Änderungsrate heisst Differentialgleichung. Sie kann mit dem Rechner mit Hilfe des Befehles „deSolve()“ gelöst werden. Für das Lösen einer Differentialgleichung muss ein Anfangswert $h(0)$ angegeben werden.

Welchen der folgenden drei Ansätze erwartest du für unser Ausflussmodell?
Begründe kurz!

Änderungsrate als Ansatz	Bestand
Änderungsrate konstant $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -k$, $h(0) = h_0$ Wasserhöhe nimmt linear ab. $\text{deSolve}(h' = -k \text{ and } h(0) = h_0, t, h) \rightarrow h = h_0 - k \cdot t$	
Änderungsrate proportional zur Höhe $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -k \cdot h$, $h(0) = h_0$ Wasserhöhe nimmt exponentiell ab. $\text{deSolve}(h' = -k \cdot h \text{ and } h(0) = h_0, t, h) \rightarrow h = h_0 \cdot e^{-k \cdot t}$	
Änderungsrate proportional zur Wurzel aus der Höhe $\frac{\Delta h}{\Delta t} = -k \cdot \sqrt{h}$, $h(0) = h_0$ Wasserhöhe nimmt quadratisch ab $\text{deSolve}(h' = -k \cdot \sqrt{h} \text{ and } h(0) = h_0, t, h) \rightarrow \sqrt{h} = \sqrt{h_0} - \frac{k \cdot t}{2}$	

Begründung des Modellansatzes mit dem Energiesatz

Das Wasser (Masse m) fällt aus der Höhe h und bekommt dadurch eine Geschwindigkeit v . Die Lageenergie $m \cdot g \cdot h$ wird in Bewegungsenergie $\frac{m}{2} \cdot v^2$ umgewandelt. Mit der Energieerhaltung lässt sich die Ausflussgeschwindigkeit v berechnen:

$$\frac{m}{2} \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (\text{Ausflussgesetz von Torricelli})$$

Die Ausflussgeschwindigkeit v ist proportional zur Wurzel des Füllstandes h .

Somit ist die Änderungsrate $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ proportional zur Wurzel aus dem Füllstand h und der Bestand $h(t)$ eine quadratische Funktion.

$$\text{Änderungsrate: } \frac{\Delta h}{\Delta t} = -k \cdot \sqrt{h} \quad \text{und} \quad \text{Bestand: } h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{k}{2} \cdot t \right)^2$$

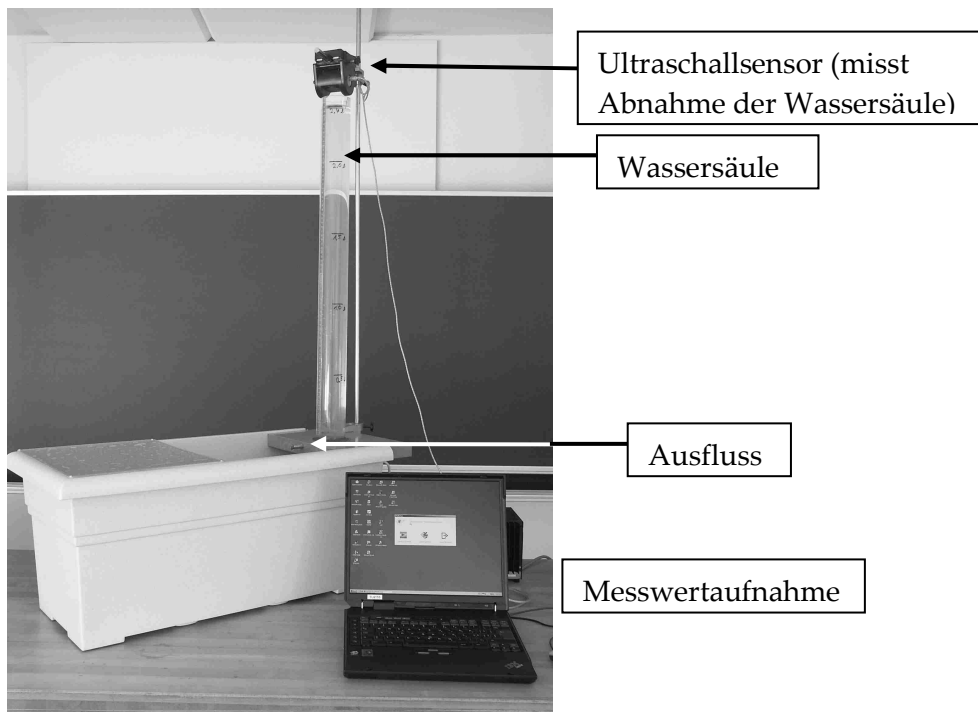
Experimentelle Bestätigung

In einem Experiment befragen wir die Natur, ob die Hypothese mit dem Energiesatz zutrifft. Wir überprüfen das Modell experimentell. Die Messung von $h(t)$ kann mit



dem TI-Nspire CAS in der App *Vernier DataQuest* mit Hilfe des Bewegungssensors durchgeführt werden. Die Datenaufnahme kann mit 20Hz erfolgen. Somit werden 20 Datenpunkte pro Sekunde erfasst.

Experimentelle Anordnung, Messung mit Bewegungssensor

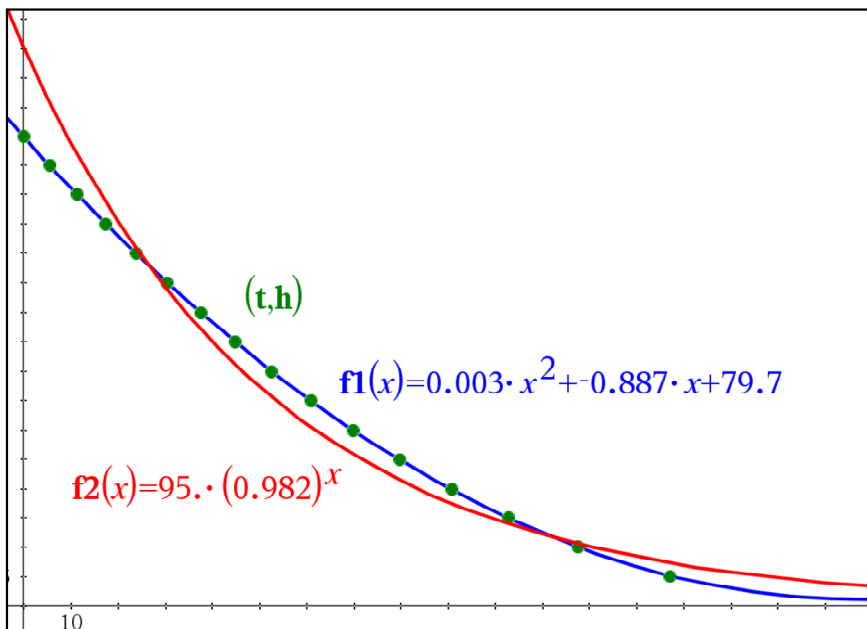


Für unsere Zwecke genügt ein geringerer Datensatz. Durch eine Zeitmessung jeweils nach 5cm Abnahme der Wassersäule erhalten wir 16 Messwerte, mit denen sich eine exponentielle und eine quadratische Regression durchführen lassen. Damit lässt sich zeigen, dass der Wasserbestand nicht exponentiell abnimmt, sondern quadratisch.

Quadratische und exponentielle Regression der Messdaten

	A h	B t	C	D	E	F	G
=				=QuadReg		=ExpReg('	
1	80	0	Titel	Quadrati...	Title	Exponen...	
2	75	5.4	RegEqn	a*x^2+b*...	RegEqn	a*b^x	
3	70	11.2	a	0.0025	a	94.9984	
4	65	17.2	b	-0.887121	b	0.981503	
5	60	23.7	c	79.7058	r ²	0.965104	
6	55	30.4	R ²	0.999977	r	-0.982397	
7	50	37.4	Resid	{0.29415...	Resid	{-14.998...	
8	45	44.7			ResidTra...	{-0.1718...	
9	40	52.5					
10	35	60.8					
11	30	69.8					
12	25	79.6					
13	20	90.7					
14	15	102.7					
15	10	117.4					
16	5	137.					

Graphische Darstellung der Messpunkte mit den Regressionsfunktionen



Auswertung und Interpretation der Messdaten

Die grünen Punkte im Diagramm stellen die gemessenen Daten dar.

Die Regressionsparabel ist im Diagramm blau dargestellt.

Die exponentielle Regressionsfunktion ist im Diagramm rot dargestellt.

Die Regressionsparabel

Regressionsfunktion	$h(t) = 0.0025 \cdot t^2 - 0.8871 \cdot t + 79.71$ $h(t) = (\sqrt{78.7} - 0.05 \cdot t)^2 + 1.01$ (Scheitelform) Anfangsbestand $h_0 = 78.7$ cm
Korrelationskoeffizient R	$R^2 = 0.999977$, $R = -0.999886 \approx -1.00$ (R ist negativ = Abnahme, nur linke Seite der Parabel)

Die exponentielle Regressionsfunktion

Regressionsfunktion	$h(t) = 95.00 \cdot 0.9825^t$ Der Rechner liefert die Exponentialfunktion in Form $a \cdot q^t$ mit dem Wachstumsfaktor $q = 0.9825$ (h nimmt pro Sekunde um 1.75% ab!) und dem Anfangsbestand $h_0 = 95$ cm. Umrechnung in die Form $a \cdot e^{-k \cdot t}$ ($e = 2.718...$) $h(t) = 95.00 \cdot e^{-0.01867t}$ mit $\tau = \frac{1}{0.01867} = 53.6$ s
Korrelationskoeffizient r	$r^2 = 0.965104$, $r = -0.982397 \approx -0.98$ (r ist negativ = Abnahme)

Die graphische Darstellung zeigt, dass die quadratische Funktion, die Datenpunkte besser beschreibt, als die exponentielle Funktion.

Dies wird durch die Rechnung bestätigt, die quadratische Regressionsfunktion liefert ein $R = -1.00$, die exponentielle $r = -0.98$.

Systeme mit Zu- und Abfluss

Interessantes Verhalten zeigen Systeme, die zusätzlich zum Abfluss auch einen Zufluss besitzen. Rückkopplungen und Zeitverzögerungen ergeben erstaunliches Verhalten.

Bestand $h(t)$

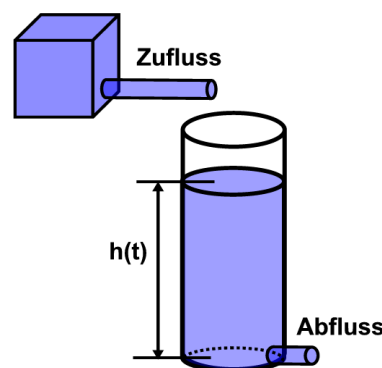
$$\text{Abfluss: } \frac{\Delta h_{\text{ab}}}{\Delta t}, \quad \text{Zufluss: } \frac{\Delta h_{\text{zu}}}{\Delta t}$$

Änderungsrate des Systems

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\Delta h_{\text{zu}}}{\Delta t} - \frac{\Delta h_{\text{ab}}}{\Delta t}$$

Solche Problemstellungen lassen sich rekursiv nach folgendem Muster lösen:

$\text{Bestand}_{\text{neu}} = \text{Bestand}_{\text{alt}} + \text{Änderungsrate} \cdot \Delta t$



Mit solchen Modellen lassen sich zahlreiche Vorgänge aus der Natur und Technik beschreiben zum Beispiel die Ausbreitung von Infektionen, radioaktive Zerfallsketten oder die Aufnahme eines Medikaments. Siehe TI-Hefte (S1) Funktionen und Modelle (Kap. 4 Mathematische Modellbildung dynamischer Systeme) und Differential- und Integralrechnung (Kap.1 Ein mathematisches Modell und die Änderungsrate, Kap. 5 Differenzialgleichungen und Modelle, Kap. 7 Dynamische Systeme).