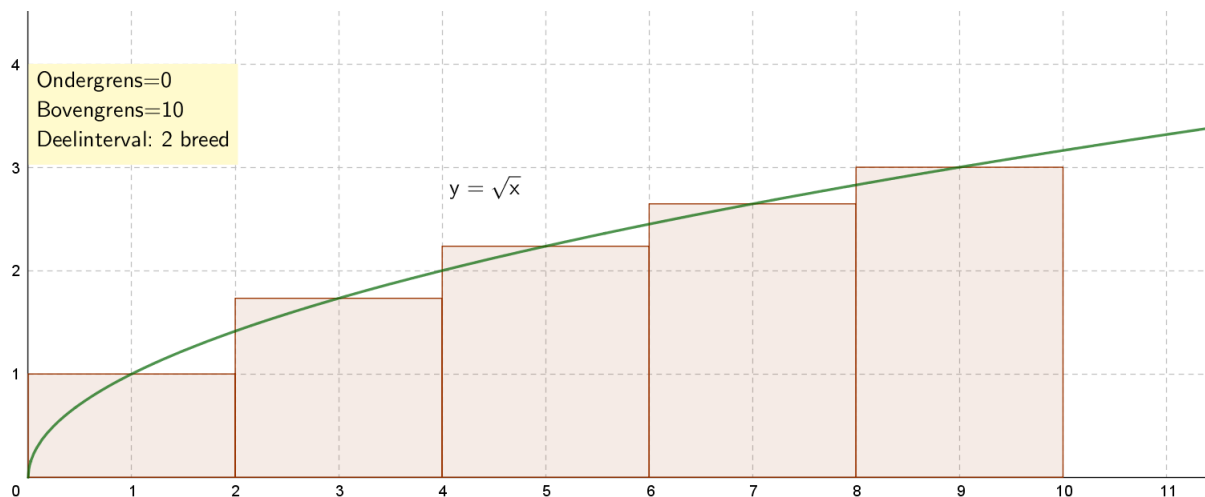


Oppervlakte benaderen met een Riemann-som

Als inleiding voor integraalrekening wordt in de wiskundeboeken meestal eerst een start gemaakt met Riemansommen. Aan de hand van een of twee statische voorbeelden wordt dan de leerling voorgehouden hoe je van Riemann naar een integraal komt. Met dit programma kan je als docent dynamischer werken en de leerling laten zien dat je naar een steeds kleinere foutmarge gaat als je het aantal intervallen laat toenemen.

Voorbeeld:

Benader de oppervlakte onder de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{x}$ op het interval $[0,10]$. Gebruik 5 deel-intervallen. Gebruik de Riemann-methode.



De Riemann-methode gaat er van uit dat je de oppervlakte bepaald door de ruimte onder de grafiek op te vullen met rechthoeken. Van deze rechthoeken kan je immers de oppervlakte eenvoudig bepalen.

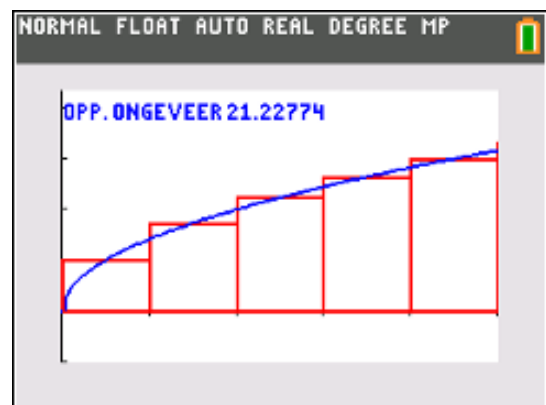
In het voorbeeld gaat het om de som van de oppervlakten van 5 staven met een breedte van 2 en een hoogte van $f(x)$, met x het midden van iedere staaf.

In het voorbeeld wordt dat:

$$Opp = (f(1) + f(3) + f(5) + f(7) + f(9)) \times 2$$

$$Opp = (1 + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + 3) \times 2 \approx 21,2 .$$

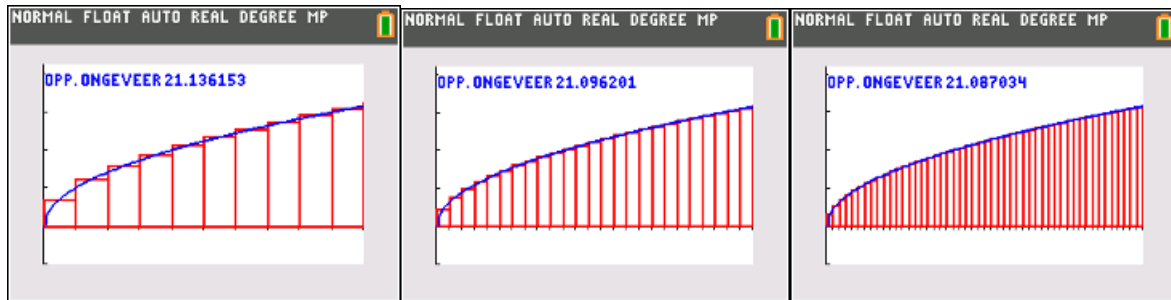
Een grove benadering omdat de staven niet mooi aansluiten aan de grafiek.



Deze aanpak geeft een nauwkeuriger resultaat als je de deelintervallen kleiner maakt.

Dus in plaats van een deelinterval met breedte 2 overgaan op deelintervallen met breedte 1 ; 0,5 of 0,2. Het aantal staven wordt daardoor verhoogd van 5 naar 10, 20 of 50.

De benadering wordt zo steeds betrouwbaarder omdat er een beter aansluiting komt tussen de grafiek en de (steeds smallere) staven.



Om dit proces grafisch weer te geven op de TI84 is het programma **RIEMANSM** geschreven.

programma RIEMANSM

Disp "BENADER DE OPPERVLAKTE"

Disp "MBV EEN RIEMANNSOM"

Disp "ZET DE FUNCTIE IN Y₁"

Disp "ONDERGRENS GEBIED=O"

Prompt O

Disp "BOVENGRENS=B"

Prompt B

Disp "AANTAL INTERVALLEN=N"

Disp "VOOR EEN PLOT KIES"

Disp "N=5, 10, 20, 50 OF 100"

Prompt N

PlotsOff

Zet overige plots uit.

FnOff

Zet overige functies uit.

GridOff

Zet roosterlijnen uit.

ClrAllLists

Maak alle lijsten leeg.

If B≤O

Als de waarde voor bovengrens kleiner is dan ondergrens, dan deze waarschuwing.

Then

Disp "BOVENGRENS MOET GROTER"

Disp "DAN "+toString(O)+" ZIJN"

Stop

Else

fnInt(Y₁,X,O,B)→X

Bepaal de oppervlakte via een integraal.

(B-O)/N→S

Bepaal de breedte van het interval (staaf).

O+S/2→P

Bepaal het midden van de eerste "staaf".

B-S/2→Q

Bepaal het midden van de laatste "staaf".

sum(seq(Y₁,X,P,Q,S)*S)→T

Bereken de hoogte per interval. Sommeer dat en vermenigvuldig met breedte.

Disp "BENADERING VAN DE"

Disp "OPPERVLAKTE IS"

Disp "O=",T

If X≠0

Als integraal≠0 ,dit deel programma uitvoeren.

Then

abs(round((X-T)/X*100,2))→Y

Bepaal de procentuele afwijking van echte waarde.

Disp "DAT WIJKT "+toString(Y)+" PROCENT AF"

Disp "VAN ECHTE OPP."

Goto Z

Else

Goto Z

Lbl Z

Pause

If N=5 or N=10 or N=20 or N=50 or N=100 *1 Voor deze waarden van N een plot uitvoeren.

Then

Goto W

Else

Stop

Lbl W

seq(X,X,P,Q+S,S)→L₁	*2	Vul lijst 1 met de x-waarden voor de Riemansom.
L₁-0.5S→L₂	*3	Vul lijst 2 met rechtergrens van het interval.
seq(Y₁(X),X,P,Q+S,S)→L₃		Vul lijst 3 met functiewaarden=hoogte.
If min(L₃)<0	*4	Bij negatieve functiewaarden, stop hier.
Then		
Disp "PLOT LUKT HELAAS NIET"		
Stop		
Else		
O→Xmin		Pas window aan op gekozen interval.
B→Xmax		
-1→Ymin		Plot kan niet bij negatieve waarden, dus -1 is oké.
max(L₃+1)→Ymax		
S→Xscl	*5	Pas waarde Xscl aan op breedte interval.
FnOn 1		Zet functie 1 weer aan en plot deze.
Plot2(Histogram,L₂,L₃)		Plot histogram met data uit L2 en L3
DispGraph		
Text(5,2,"OPP. ONGEVEER ",T)		Zet tekst in de plot.
End		

Opmerkingen:

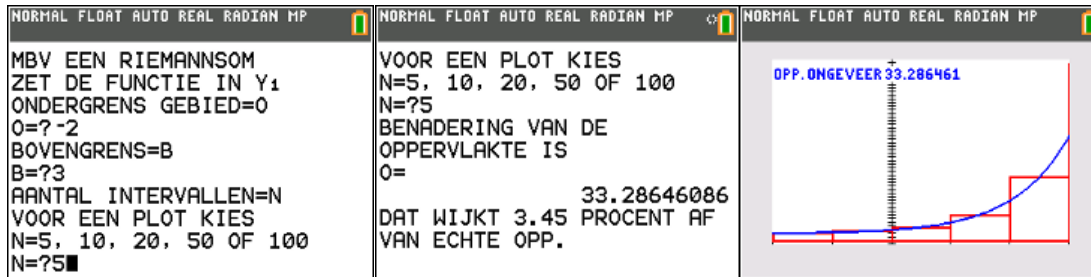
- 1) Uit tests bleek dat bij andere waarden voor H, het histogram op onverklaarbare wijze twee of meer intervallen ging samenvoegen. Waarden staan dan wel juist in L2 en L3, maar in de plot trad een fout op. Om dat te voorkomen is gekozen voor een paar vaste N-waarden.
- 2) In lijst 1 zet je de x-waarden die het midden van iedere staaf gaan vormen. In deze regel zie je staan (Q+S) als bovengrens. Om een histogram te plotten moeten L2 en L3 even lang zijn. Bij het commando seq(X,X,P,Q,S) zou dat niet het geval zijn.
- 3) In lijst 2 zet je de x-waarden die de rechtergrens van een staaf vormen. Dat is nodig om het histogram wat geplot wordt zo te positioneren ten opzichte van de grafiek dat het midden van een staaf ook echt bij de berekende hoogte past. Als je het commando L₁-0.5S niet geeft staat het hele histogram iets verschoven onder de grafiek.
- 4) De TI84 kan geen histogram tekenen als er negatieve waarden in de frequentielijst staan. Om die reden moet je dat signaleren en indien nodig de plot stoppen.
- 5) De breedte van een staaf in het histogram wordt bepaald door de waarden van Xscl in het window. Om de breedte van de staven juist weer te geven moet je dat hier aansturen.

Domein als beperking bij dit programma.

Om het programma te laten werken moet er bij de rechtergrens van het interval worden gewerkt met een bovengrens van $(Q + S)$. In een enkel geval kan het zijn dat die bovengrens buiten het domein van de te onderzoeken functie ligt. De benadering van de oppervlakte wordt wel bepaald, maar de plot lukt dan niet omdat er een probleem op het domein ontstaat. (zie ook VB3)

VB1:

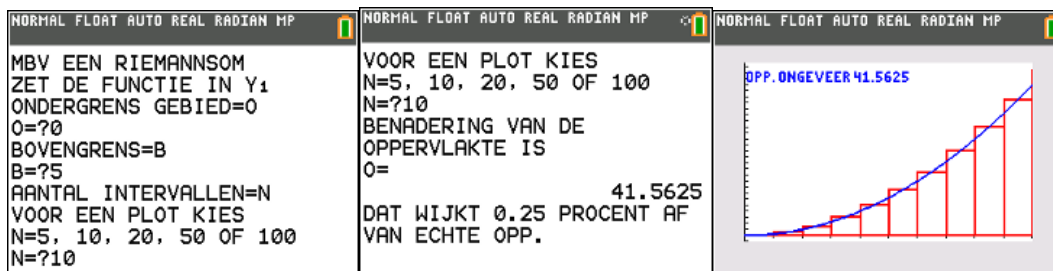
Benader de oppervlakte onder de grafiek van de functie $f(x) = 2 + 3^x$ op het interval $[-2, 3]$. Gebruik 5 intervallen.



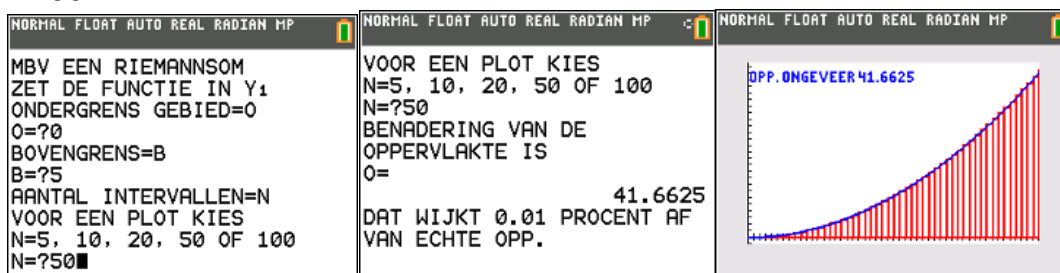
VB2:

Benader de oppervlakte onder de grafiek van de functie $f(x) = x^2$ op het interval $[0, 5]$. Gebruik 10 ; 50 en 100 intervallen.

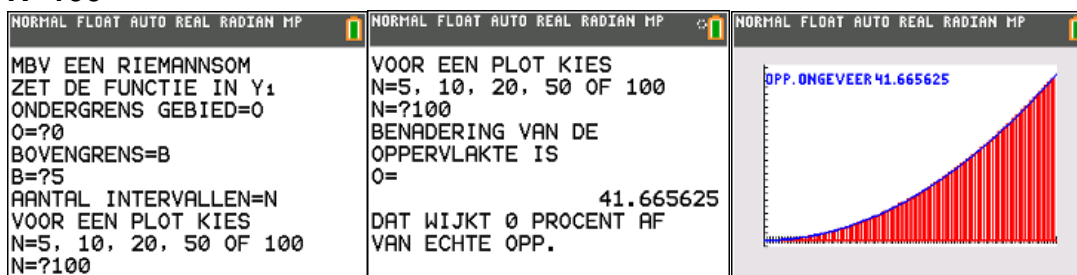
N=10



N=50



N=100

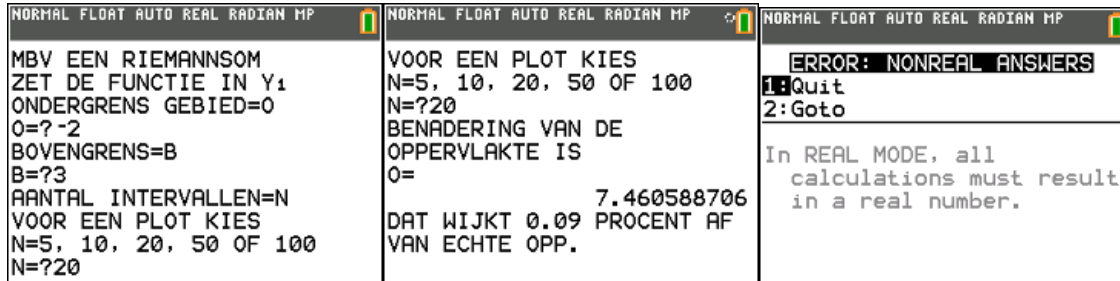


Hier zie je dat de procentuele afwijking terugloopt met de toename van het aantal intervallen.

VB3:

Benader de oppervlakte onder de grafiek van de functie $f(x) = \sqrt{3-x}$ op het interval $[-2, 3]$. Gebruik 20 intervallen.

Merk op dat voor het domein geldt: $\langle \leftarrow, 3 \right]$



Bij dit voorbeeld komt de x-waarde nodig voor de laatste staaf buiten het domein van de functie. Om die reden komt er een foutmelding bij het plotten.