Thème : probabilité

Croix et pile

TI-Collège Plus Solaire
S. ETIENNE

Résumé : les élèves travaillent sur un problème historique de probabilité de lancer de pièce de monnaie, issue d'une correspondance entre d'Alembert et Diderot, à donner en introduction à la loi faible des grands nombres.

Niveau : à partir de la classe de 4e.

Mots-clés : probabilité ; lancer de pièce ; lien avec les statistiques.

Fiches professeur et élève, compléments : flasher le code 2D ou cliquer dessus

Compétences visées

Chercher : « Tester, essayer plusieurs pistes de résolution. »

Modéliser : « Valider ou invalider un modèle, comparer une situation à un modèle connu (par exemple un modèle aléatoire). »

Représenter : « Représenter des données sous forme d'une série statistique. »

Communiquer : « Vérifier la validité d'une information et distinguer ce qui est objectif et ce qui est subjectif ; lire, interpréter, commenter, produire des tableaux, des graphiques, des diagrammes. »

Situation-problème

Diderot et d'Alembert, deux philosophes du siècle des Lumières, correspondaient à propos d'un jeu : celui de « croix et pile » (comprendre pile et face). Le jeu est le suivant : après une mise, un joueur lance une pièce de monnaie. S'il tombe sur croix, il gagne, sinon, il relance la pièce. S'il tombe sur croix, il gagne, sinon il perd.

Cependant, ils ne sont pas d'accord sur les mises à mettre pour que le jeu soit équitable. On se propose donc de découvrir qui, de Diderot ou de d'Alembert a raison.

Écu d'or au soleil sous Louis XI le Prudent, sur Wikipédia

1. a. D'Alembert affirmait que la mise devait être de 2 contre 1 puisque : « Si croix arrive du premier coup, le jeu est fini. Les combinaisons croix-croix et croix-pile se réduisent donc à une. Il n'y a que trois combinaisons possibles, deux qui font gagner et une qui fait perdre, donc la mise doit être de 2 contre 1 ». Pour d'Alembert, quelles sont les « trois combinaisons » possibles en langage contemporain ?

   b. Diderot, quant à lui, estime que la mise est de 3 contre 1, en effet : « Il y a quatre combinaisons différentes (croix-croix, croix-pile, pile-croix et pile-pile). Les trois premières font gagner, seule la dernière fait perdre. La mise doit être de 3 contre1 ». Pour Diderot, quelles sont les « quatre combinaisons » possibles en langage contemporain ?

2. Comment serait-il possible de modéliser un seul lancer d'une pièce sur la calculatrice TI-collège Plus ?

3. a. En justifiant la réponse, les expressions `randn(0 ;1) + randn(0 ;1)` et $2 \times$ `randn(0 ;1)` sont-elles identiques ?

   b. Quelle est l'expression qui permet de modéliser le problème ?

4. a. Effectuer et noter 25 essais avec l'expression trouvée à la question précédente.

Ce document est mis à disposition sous licence Creative Commons
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/
© Texas Instruments 2024 / Photocopie autorisée

b. Remplir le tableau statistique suivant.

Valeur	0	1	2
Effectif			

c. En regroupant les résultats avec 3 autres camarades, remplir le tableau suivant :

Valeur	0	1	2
Effectif			
Fréquence			

d. De quelles valeurs « remarquables » est-on proche ? Pourquoi cette différence entre l'expérience et la théorie ?

5. a. Compléter le tableau de fréquence d'évènement suivant :

Evènement	Partie gagnée	Partie perdue
Fréquence de l'évènement		

b. Représenter par un diagramme en barres la répartition en fréquence de l'évènement.

6. A l'aide des questions précédentes, est-il possible de savoir qui, de Diderot ou de d'Alembert, a raison ?

Scénario pédagogique

- Cette activité est de type tâche intermédiaire de par ses questions intermédiaires. Il est recommandé de faire travailler les élèves en groupes de 4 par exemple afin de mutualiser les lancers simulés et avoir des données un peu plus probantes.
- La première question permet de rentrer dans la problématique du différend entre d'Alembert et Diderot. Ne pas hésiter à reprendre un temps de classe entière pour s'assurer de la compréhension de tous les élèves.
- La question 3 questionne les élèves pour qui d'emblée ce serait égal, compte tenu que $x + x = 2x$. Il faudra les inciter à faire des essais avec la calculatrice et appuyer les propos avec un arbre ou un tableau. Cette question est optionnelle et peut être posée à posteriori en fonction du niveau d'abstraction des élèves. Si cette question est enlevée, les élèves devront faire des tests en simulant le lancer d'une pièce, puis le cas échéant une deuxième fois, en le faisant 25 fois.
- Le lien entre la dernière question et les précédentes peut engendrer une difficulté d'avoir effectué des tâches un peu mécaniquement sans comprendre les enjeux, et de devoir changer de place pour mettre en perspective les apports précédents pour prendre une décision. Cette dernière question est à l'origine de débats sur l'utilité des statistiques.
- Une courte vidéo est disponible en scannant le code 2D ci-contre d'utilisation de la calculatrice TI-Collège Plus sur le thème du calcul aléatoire.
- **Pour les élèves les plus en difficulté ou tous, suivant le degré de maîtrise :** il est possible de poser des questions en amont, d'utilisation directe de la calculatrice, décrites en fin de fiche.
- **Pour les élèves les plus en avance :** il est possible de leur proposer un ou plusieurs prolongements, décrits en fin de fiche.

Ce document est mis à disposition sous licence Creative Commons
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/
© Texas Instruments 2024 / Photocopie autorisée

Croix et pile

TI-Collège Plus Solaire
S. ETIENNE

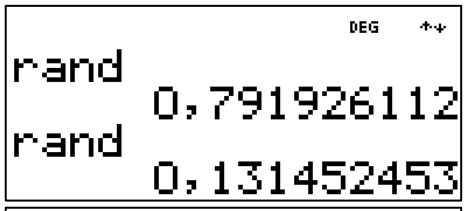
- Voici quelques scénarios possibles pour des jeux de hasard pour aider des élèves qui auraient du mal à rentrer dans cette tâche :
  - loto : on fait une grille de 49 numéros (donc de 1 à 49), l'élève doit donner 6 numéros et un numéro complémentaire. Ensuite, on génère 6 numéros avec la calculatrice en supprimant les doublons éventuels ;
  - jeu du plus grand ou plus petit : se joue à deux, chaque joueur génère de façon secrète un nombre entre 1 et 100. Puis chacun son tour, le joueur essaye de trouver le nombre de son voisin qui lui dit s'il est plus grand ou plus petit ;
  - jeu de dés : un joueur met une mise, puis lance un D6 pour avoir un gain (faible). Il a droit à un autre lancer pour avoir un gain plus important uniquement si l'autre joueur fait un lancer strictement meilleur ;
  - jeu de plateau : on utilise un jeu de plateau, un D4 par exemple, et une série de QCM ou de questions de mathématiques (dans les domaines de l'algèbre, de la géométrie et du numérique) créées auparavant par les élèves. Chaque joueur doit aller au bout. A chaque lancer, on répond à la question. Une bonne réponse fait avancer, tandis qu'une mauvaise réponse fait reculer ou laisse sur place.

Procédure possible

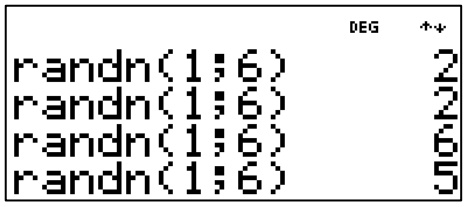
Voici quelques pistes pouvant aider à la résolution.

Pour utiliser les deux fonctions aléatoires de la calculatrice TI-Collège Plus :

- Appuyer sur [maths] ▶ ▶ [entrer] afin de sélectionner la fonction `rand` (sans argument, venant de l'anglais *random*). En appuyant ensuite plusieurs fois sur la touche [entrer], cela génère des nombres aléatoires entre 0 et 1.

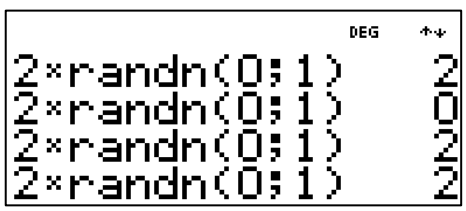


- Appuyer sur [maths] ▶ ▶ ▼ [entrer] afin d'obtenir la fonction `randn(`. Cette fonction permet d'obtenir des nombres entiers compris entre deux valeurs extrêmes et nécessite donc deux arguments : les bornes inférieure et supérieure. Appuyer alors sur [1] [2nde] [,] [6] [)] [entrer] pour simuler un D6. Bien noter l'utilisation du point-virgule pour séparer les valeurs, ne pas hésiter à l'indiquer auprès des élèves.



- Dans la question 3, il est judicieux, pour le plus grand nombre d'élèves, de tester les deux expressions afin de se rendre compte que chaque valeur aléatoire peut valoir 0 ou 1 et ainsi que l'expression `randn(0 ;1)+randn(0 ;1)` a pour issues 0 ; 1 ; 2 alors que $2 \times$ `randn(0 ;1)` a pour issues 0 ; 2 uniquement.

  Par exemple, appuyer sur [2] [×] [maths] ▶ ▶ ▼ [entrer] [0] [2nde] [,] [1] [)] afin d'obtenir cette dernière expression, et en validant plusieurs fois (combien avant de s'assurer que 1 ne sortira jamais ?), les seules valeurs obtenues sont 0 et 2.



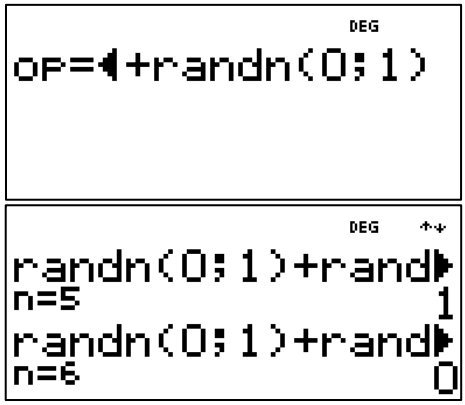
Ce document est mis à disposition sous licence Creative Commons
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/
© Texas Instruments 2024 / Photocopie autorisée

Croix et pile

TI-Collège Plus Solaire
S. ETIENNE

- Afin d'avoir les 25 lancers correctement, sans en oublier, il est possible d'utiliser la touche « opérateur constant » [op]. Il faut commencer par le définir en appuyant sur [2nde][op][maths]►►▼[entrer][0][2nde][,][1][)][+][maths]►►▼[entrer][0][2nde][,][1][)][entrer] ; si nécessaire, appuyer sur [annul] dans la définition de l'opérateur pour supprimer le contenu existant.

  Il suffit alors d'appuyer sur la touche [op] autant de fois que nécessaire afin de noter les résultats. Les touches de direction peuvent permettre de revenir sur un précédent résultat si non noté.



Questions en amont

Voici des exemples de questions à poser pour s'assurer de l'utilisation correcte de la notion de fonction :

1. Taper sur la calculatrice TI-Collège Plus la séquence : [maths]►► et faire le choix `1:rand`. Appuyer sur [entrer] plusieurs fois. Quelle semble être la définition de cette fonction ?
2. a. Taper à présent sur la calculatrice la séquence : [maths]►► et faire le choix `2:randn(`. Taper à la suite la séquence [4][2nde][;][9][)]. Appuyer sur [entrer] plusieurs fois. Quelle semble être la définition de cette fonction ?

   b. Quelles seraient les valeurs extrêmes ?
3. a. L'expression `randn(1;6)` permet de générer un objet très utilisé dans les jeux de société. Quel est-il ?

   b. Quelle expression permet de générer un dé à 4 faces (on note D4) sur la calculatrice TI-Collège Plus ?

   c. Quelle expression permet de générer un D20 qui partirait du nombre −3 sur la calculatrice TI-Collège Plus ?

Prolongements possibles

Voici des pistes pour les élèves les plus rapides ou qui ont envie de prolonger le travail :

- On peut augmenter le nombre d'expérience avec 3 ; 4 ; 10 ou plus lancers et demander quelles seraient les côtes à avoir pour obtenir un jeu équitable.
- On pourra également emmener les élèves explorer l'article originel de l'Encyclopédie de D'Alembert et Diderot sur le site de l'ENCCRE, Articles Croix ou pile, (analyse des hasards.), vol. IV (1754), p. 512b–513b ; GAGEURE, (Analyse des hasards.), vol. VII (1757), p. 420b–421a.
- L'aléatoire est beaucoup utilisé dans les jeux, qu'ils soient de plateau, de rôle ou même dans des loteries. On pourra demander aux élèves d'inventer un jeu très simple utilisant les nombres aléatoirement tirés par la calculatrice qui peut se jouer à deux ou plus.
- On pourra aussi se poser la question « est-ce vraiment du hasard avec la calculatrice ? ».

Ce document est mis à disposition sous licence Creative Commons
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/
© Texas Instruments 2024 / Photocopie autorisée