

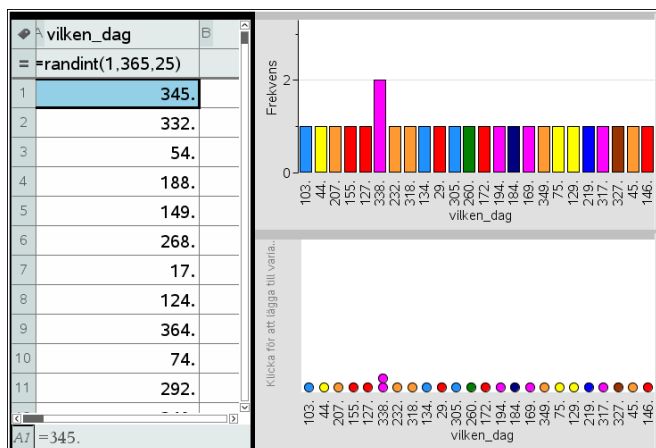
# Födelsedagsparadoxen

Ett av de mest klassiska problemen i sannolikhetsläran som är lätt att demonstrera i en skolklass.

Den här övningen passar bäst att göras i kurs 5 när fakultetsbegreppet är bekant. Man kan dock även göra den tidigare om eleverna har en viss vana att arbeta med kalkylprogram.

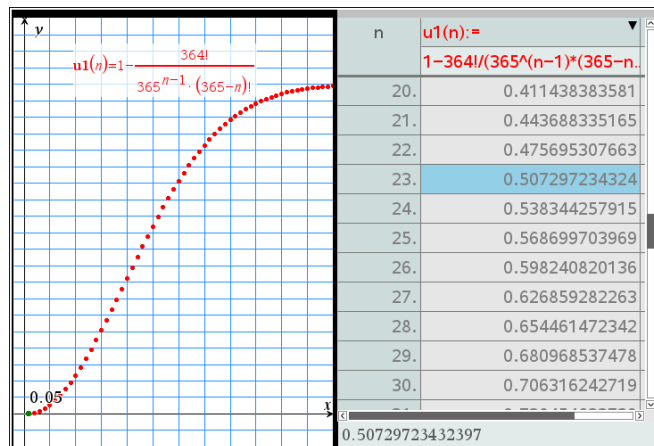
**Sid 2:** Börja med att göra ett antal simuleringar. Om man placerar markören i kalkylarket på någon rad och trycker på Ctrl r får man nya slumpfalsserier. Prova detta ett antal gånger och se resultatet. Vi delar sidan och visa både punktdiagram och stapeldiagram. Tänk på att du måste ha ett namn på listan i kalkylarket för att kunna skapa diagram.

Man upptäcker vid simuleringen att man ibland får dubletter av par som har gemensamma födelsedagar.

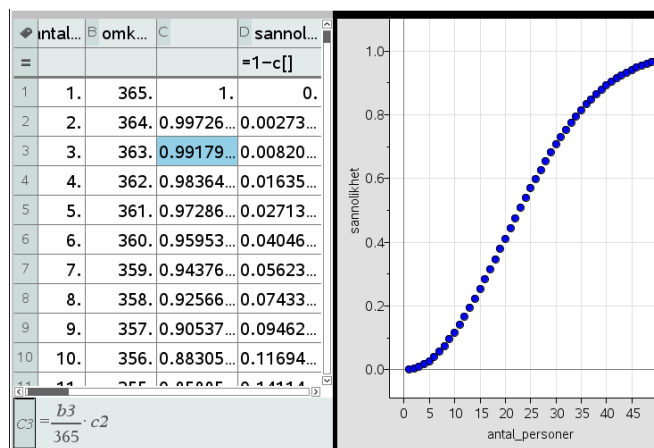


**Sid 3-4:** Här börjar resonemanget omkring beräkningen av sannolikheterna. Vi visar i steg för steg hur vi beräknar sannolikheten med 2, 3 ... personer. Begreppet fakultet införs. Ett alternativ utan detta begrepp är att utföra beräkningen i kalkylark. Vi visar detta på sid 6 och 7.

**Sid 5:** här har vi ritat sannolikhetskurvan som en talföljd eftersom den oberoende variabeln  $n$  bara kan anta heltalsvärden. Du kan alltså använda fakultet i uttrycket. Om du klickar på formeln ser du inställningarna.



**Sid 6-7:** Här utför vi beräkningarna i ett kalkylark istället. Vi ritar ett diagram i Data&Statistik-applikationen. Kräver inte att man använder begreppet fakultet. Vi förklarar på sid 6 hur vi bygger upp kalkylarket.



**Sid 8-9:** Här förklarar vi med ett annat resonemang. Man antar då att händelserna är oberoende.

**Ett annat sätt att beräkna sannolikheten för matchande födelsedagar är att räkna antalet par**

Tänk dig att att fem personer träffas och att alla skakar hand med varandra. Hur många handskakningar blir det? I figuren nedan har vi illustrerat detta genom att dra linjer mellan alla par av personer. Var och en ska ju skaka hand med fyra andra. Det blir  $4 \cdot 5 = 20$  men då blir det en *dubbelräkning*. Att t.ex. person 1 hälsar på person 2 är ju samma sak som att person 2 hälsar på person 1. Svaret blir alltså  $\frac{4 \cdot 5}{2}$  (kan ses genom antalet linjer i figuren.)

Med 23 personer blir det  $\frac{23 \cdot 22}{2} = 253$  olika par.

Sannolikheten att 2 personer (1 par) har olika födelsedagar är  $1 - \frac{1}{365} = \frac{364}{365} \approx 0,997260$

I 364 fall av 365 så blir alltså det ingen matchning. Om vi nu har 253 par så blir sannolikheten (om vi antar att händelserna är oberoende)

$$\left(\frac{364}{365}\right)^{253} \approx 0,4995$$

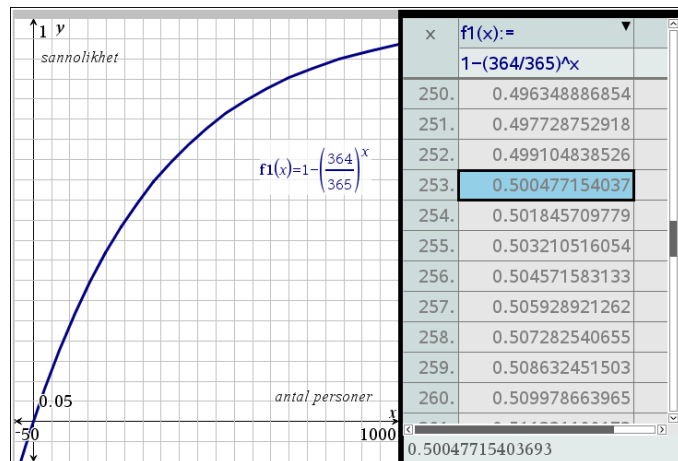
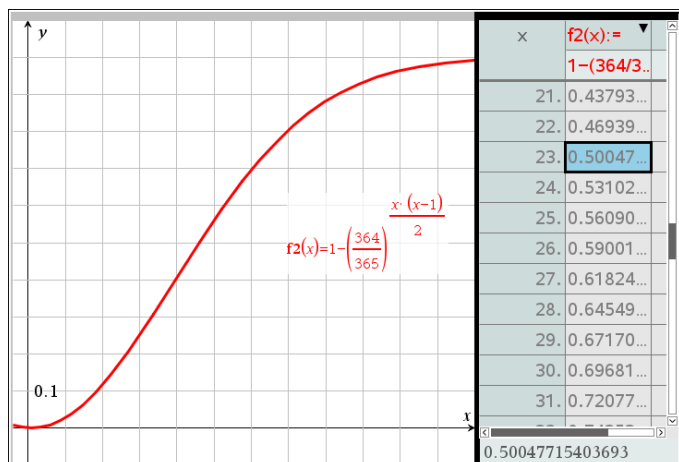
Sannolikheten av vi har en matchning är då  $1 - 49,95\% = 50,05\%$ .

Om vi antalet personer är  $n$  st så får vi formeln (sannolikheter brukar betecknas med  $p$  med förkortning för *probability*)

$$p(n) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}$$

På nästa sida har vi plottat denna funktion.

Vi ritar här sannolikhetskurvan som en vanlig funktion.



Ska du vara 95 % säker på att någon har samma födelsedag som du krävs ca 1100 personer i församlingen.

**Problem 2:**

Här har vi en annan variant av på problemet:

Tänk dig att du befinner dig inför en stor församling med 300 deltagare. Du råkar fylla år just idag och nu undrar du om det är någon eller några fler som också råkar fylla år just idag. Du kan ju naturligtvis ropa ut till församlingen och fråga men först vill du göra en kalkyl hur stor sannolikheten är. Hur ska du tänka? Problemet är hämtat från Professor Allan Guts bok Sant eller sannolikt.

**Sid 2-3**

Om det råkar vara just 365 st i församlingen blir sannolikheten

$$1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{365} \approx 0.632625079337$$

Hur många ska det vara för att sannolikheten ska vara 50 %? Vi får nu ställa upp en ekvation:

$$\text{solve}\left(\left(\frac{364}{365}\right)^x = 0.5, x\right) \approx x=252.65198884$$

Ett intressant uttryck är  $\left(\frac{364}{365}\right)^{365}$  som kan skrivas  $\left(1 - \frac{1}{365}\right)^{365} \approx 0.367374920663$

Det visar sig att om vi väljer allt större tal istället för 365 så kommer uttryckets värde att närma sig  $\frac{1}{e}$ , där  $e$  är basen i det naturliga logaritmsystemet.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \approx 0.367879441171 \quad \frac{1}{e} \approx 0.367879441171$$

På nästa sida har vi en graf över sambandet mellan antal personer och sannolikheten.

Här kommer man in på exponentialfunktioner och basen i det naturliga logaritmsystemet,  $e$ .