

Hantera andragradskurvor del 3

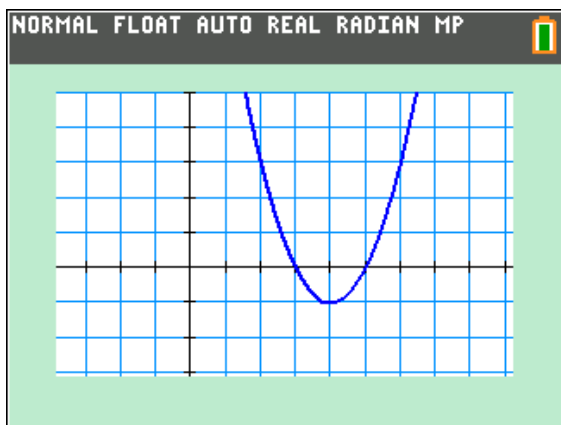
I de två första aktiviteterna om andragradsfunktioner tittade vi på hur utseendet på kurvorna när vi hade olika värden på k , a och b i uttrycket

$$y = k \cdot (x - a)^2 + b.$$

Att skriva funktionen på detta sätt kallas *vertexform*. Ett exempel på detta är funktionen

$$y = (x - 4)^2 - 1.$$

Vi plottar funktionen:



Vi ser att funktionen har sitt minimivärde i punkten med koordinaterna $(4, -1)$. Om vi tittar på funktionsuttrycket ser vi att det minsta värde funktionen kan ha är när $x = 4$ eftersom $(x - 4)^2$ då är noll och en kvadrat aldrig kan ha ett negativt värde.

Vi kan alltså direkt ur funktionsuttrycket se vilka koordinater max- eller minpunkten har.

Nollställena, dvs. var kurvan skär x -axeln, kan vi också beräkna. Om vi sätter $y = 0$ får vi ekvationen

$$0 = (x - 4)^2 - 1$$

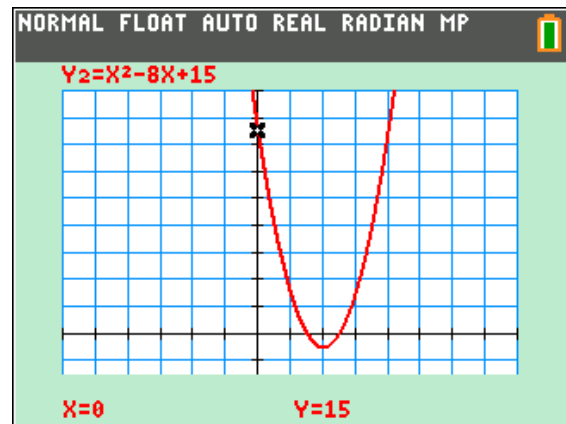
Och vi ser direkt att högerledet i ekvationen är noll när $x = 5$ och när $x = 3$.

Om vi nu *utvecklar* funktionsuttrycket får vi

$$y = (x - 4)^2 - 1 = x^2 - 8x + 16 - 1 = x^2 - 8x + 15$$

Om du plottar $y = x^2 - 8x + 15$ får du samma kurva som ovan. Det finns dock en sak som vi direkt kan se i funktionsuttrycket och som vi inte kunde se när vi skrev funktionen i vertexform:

När $x = 0$ så blir funktionsvärdet 15. Kurvan skär alltså y -axeln vid 15. Vi ställer in ett bra fönster med `window` och plottar. När vi sedan spårar i kurvan se vi koordinaterna.



Vi tittar nu på en annan funktion. Vi tar funktionen $y = x^2 - 10x + 21$. Vi kan direkt se att funktionen skär y -axeln vid $x = 21$. Nu vill vi beräkna max- eller minpunkt och nollställen algebraiskt. Vi försöker nu skriva om uttrycket på vertexform:

Eftersom faktorn framför x -termen är -10 så måste det först bli $(x - 5)^2$. Om vi utvecklar detta uttryck så får vi $x^2 - 10x + 25$.

Nu skulle vi ju ha 21 som konstanterterm så då kan vi alltså skriva funktionen som

$$y = (x - 5)^2 - 4$$

Vi får alltså dra ifrån 4 för att det ska stämma.

Vi har här gjort en s.k. **kvadratkomplettering**

För att beräkna nollställena sätter vi $y = 0$ och då får vi $0 = (x - 5)^2 - 4$ eller om vi flyttar över -4 till vänsterledet

$$4 = (x - 5)^2$$

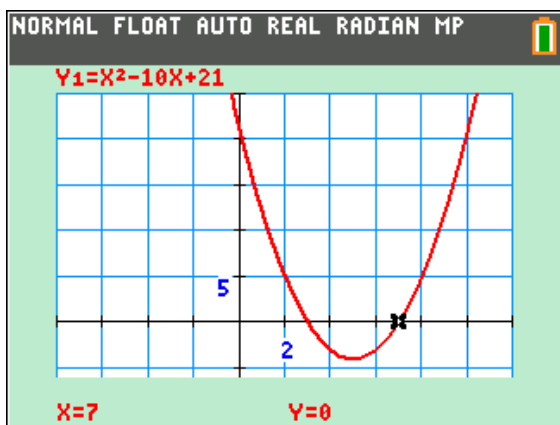
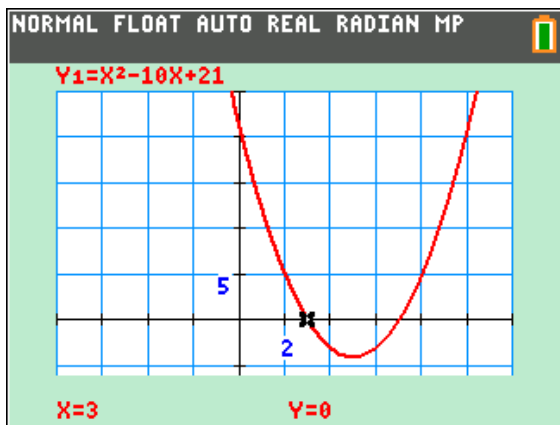
Vi ser direkt att kvadraten blir 4 när det som finns inuti parentesen har värdet 2 eller -2 eftersom det är en kvadrat.

Alltså: $(x - 5) = 2$ med lösningen $x = 7$ och

$(x - 5) = -2$ med lösningen $x = 3$.

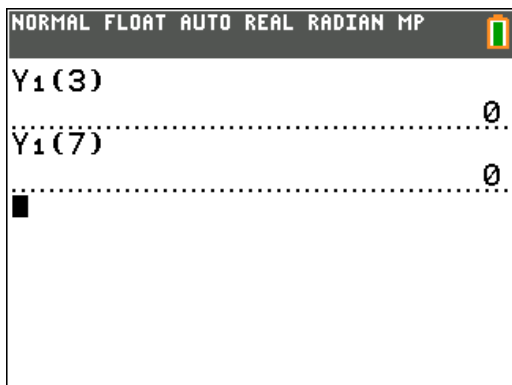
Här har vi nu plottat funktionen och vi ser att nollställena är $x = 3$ och $x = 7$.

För att hitta nollställena trycker på `trace` och skriver in det värde du vill beräkna y -värdet för.

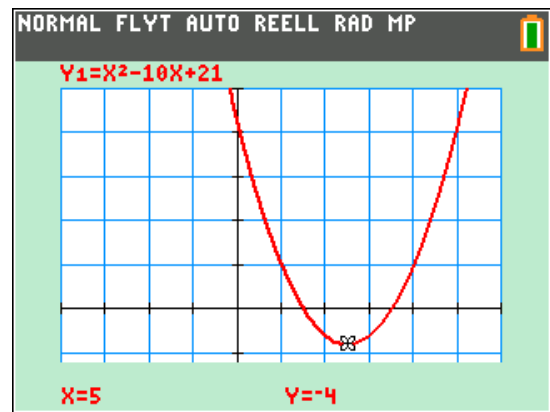


Man kan också göra beräkningen i grundfönstret. Vi har ju matat in vår funktion i Y1.

För att kopiera in Y1 i fönstret trycker man på `vars` väljer [Y-VAR] och sedan alternativ 1:Funktion. Då kommer en lista med alla funktioner upp. Välj då Y1 och skriv sedan som nedan.



Eftersom andragradsfunktioner alltid är symmetriska omkring max- och minpunkten kan vi också enkelt räkna ut att minpunkten finns vid $x = 5$, dvs. mitt emellan nollställena.



Vi ser att funktionen har värdet -4 i minipunkten. Det kunde vi ju också se direkt när vi skrev funktionen i vertexform:

$$y = (x - 5)^2 - 4$$

Vi tar nu ett lite svårare exempel:

Beräkna nollställena och vertex (max- eller minpunkt) för funktionen

$$y = -2x^2 + 12x - 8$$

Vi börjar med att bryta ut faktorn -2 eftersom det står -2 framför x^2 -termen. Vi får då

$$y = -2(x^2 - 6x) - 8$$

Det som står i parenteserna ovan kan vi skriva om som $(x - 3)^2 - 9$ eftersom vi måste dra bort 9.

$$(x - 3)^2 \text{ är ju } x^2 - 6x + 9.$$

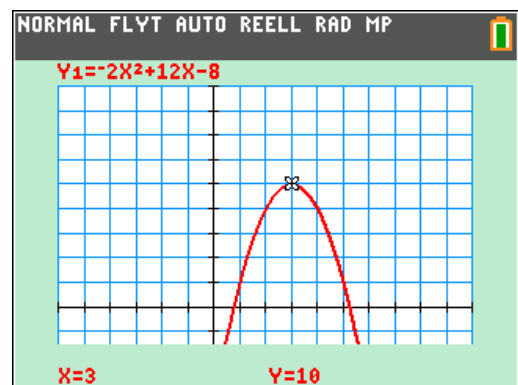
Detta ger

$$y = -2((x - 3)^2 - 9) - 8 \text{ som förenklas till}$$

$$y = -2(x - 3)^2 + 18 - 8 = -2(x - 3)^2 + 10$$

Vi får alltså ett vertex i punkten (3, 10).

Vi plottar funktionen för att se om det verkar stämma.



Kurvan har en *maxpunkt* eftersom vi har en negativ faktor framför x^2 -termen.

Vi sätter nu uttrycket $-2(x-3)^2 + 10$ lika med noll. Då får vi:

$$-2(x-3)^2 = -10$$

Vi dividerar båda led med -2 och får då:

$$(x-3)^2 = 5$$

Nu drar vi roten ur bägge leden:

$$\sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{5} \text{ och får då}$$

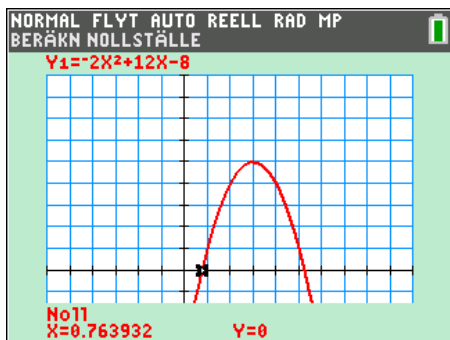
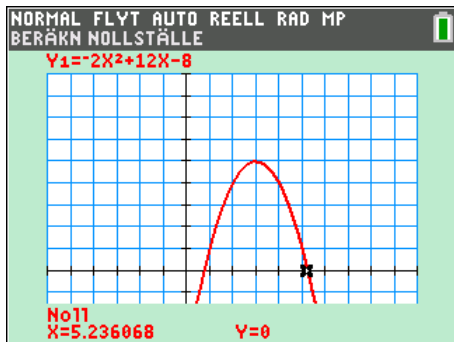
$$\pm(x-3) = \sqrt{5}$$

med lösningarna

$$x_1 = 3 + \sqrt{5} \text{ och } x_2 = 3 - \sqrt{5}$$

Nedan har vi beräknat lösningarna *numeriskt*.

När du har grafen på skärmen trycker du på **[2nd]** **[calc]** och väljer alternativ 2:nollställe. Följ sedan anvisningarna på skärmen. Man ringar då först in nollstället genom att välja en vänster- och högergräns med piltangenterna.



Varför göra allt det här när man har pq -formeln?

Du har säkert lärt dig att använda pq -formeln när du löst andragradsfunktioner. Om man har en andragradsfunktion $x^2 + px + q = 0$

så är lösningarna

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Vi tillämpar nu den på den senaste funktionen vi undersökt, nämligen $y = -2x^2 + 12x - 8$.

Vi får först

$$-2x^2 + 12x - 8 = 0$$

Nu dividerar vi först båda led med -2:

$$\frac{-2x^2}{-2} + \frac{12x}{-2} - \frac{8}{-2} = 0 \text{ och får då}$$

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

Vi använder nu pq -formeln:

$$x = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 4}$$

Vi förenklar

$$x = -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\frac{36}{4} - 4} \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{9 - 4} = 3 \pm \sqrt{5}$$

Vi får naturligtvis samma resultat. Du kommer naturligtvis att använda pq -formeln eftersom du direkt får fram lösningarna men när du gjort denna aktivitet har du lärt dig varför pq -formeln ser ut som den gör. Du får en större säkerhet i att hantera andragradsuttryck.

Vi tar det i steg en gång till och använder det hyfsade uttrycket $x^2 - 6x + 4 = 0$ från sista exemplet där faktorn framför x^2 -termen är 1.

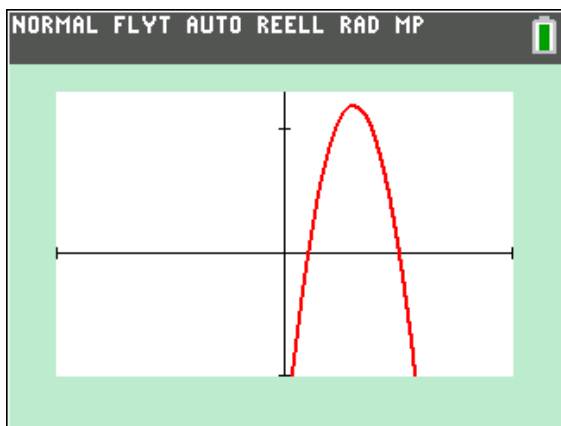
$x^2 - 6x + 4 = 0$	$x^2 + px + q = 0$
$x^2 - 6x = -4$	$x^2 + px = -q$
$x^2 - 6x + 3^2 = 3^2 - 4$	$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$
$(x-3)^2 = 3^2 - 4$	$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$
$\pm(x-3) = \sqrt{5}$	$\pm\left(x + \frac{p}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
$x_1 = 3 + \sqrt{5}$	$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
$x_2 = 3 - \sqrt{5}$	$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Som slutkläm på dessa aktiviteter om andragradare så tar vi en uppgift från en lärobok:

För en funktion $f(x)$ gäller att ekvationen $f(x) = 0$ har lösningarna $x=1$ och $x=5$.

Funktionens största värde är 12. Bestäm funktionen på vertexform och i utvecklad form.

Eftersom symmetrilinjen (den vertikala linjen) ligger mitt emellan nollställena så går den genom punkten $x=3$ och maxpunkten har alltså koordinaterna $(3, 12)$. Det kan vi utnyttja. En skiss av grafen är så här:



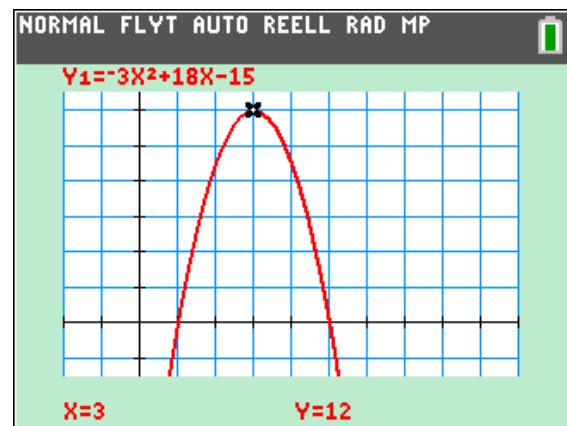
Vi får att $k = -3$ och funktionen är alltså

$$y = -3(x-3)^2 + 12$$

I utvecklad form blir det då

$$\begin{aligned} y &= -3(x-3)^2 + 12 = \\ &= -3(x^2 - 6x + 9) + 12 = \\ &= -3x^2 - 18x - 27 + 12 = \\ &= -3x^2 - 18x - 15 \end{aligned}$$

Nu kan vi plotta funktionen och se att det stämmer.



En funktion på vertexform kan skrivas:

$$y = k(x-a)^2 + b$$

Nu har vi ju lärt oss att a och b är koordinaterna för max/min-punkten och eftersom den lutar nedåt är k -värdet negativt och det största värde som funktionen kan anta är när faktorn $k(x-a)^2$ är noll och då är x -värdet $= a$. y -värdet är då $0 + b = b$.

Funktionen kan skrivas

$$y = k(x-3)^2 + 12$$

Hur ska vi nu bestämma k ?

Vi känner ju till två punkter till på kurvan. Om vi till exempel sätter in värdena för det vänstra nollstället, $(1, 0)$, får vi

$$0 = k(1-3)^2 + 12 \quad \text{som förenklas till}$$

$$0 = k \cdot 4 + 12$$