# CAS – Projekt T³ Österreich

---

**Thema: Einführung Integral – unbestimmtes Integral**

Peter Schüller

☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: Integral; unbestimmtes Integral; Richtungsfeld

---

## Kenntnisse über das Differenzieren

- Die Ableitung einer Funktion gibt Auskunft über das Änderungsverhalten der Funktion an jeder Stelle. Arbeiten wir mit geometrischen Darstellungen von Funktionen, so gibt die Ableitung das Änderungsverhalten der Funktionswerte an, was gleichbedeutend ist mit der Steigung der Tangente an dieser Stelle.
- Differenzieren/Ableiten ist eine Operation mit Funktionen, die entweder endlich oft (bei Polynomfunktionen) oder unendlich oft (bei sonstigen Funktionen) durchgeführt werden kann.
- Konstante verschwinden beim Differenzieren. Dies bedeutet, dass parallele Funktionen – die sich ja lediglich durch das konstante Glied unterscheiden – alle ein und dieselbe Ableitungsfunktion haben müssen.

**<u>Aufgabenstellung 1:</u> parallele Funktionen**

Überzeuge dich vom letzten Punkt nochmals, indem Du in dem tns-File „Integral Stammfunktion“ die Arbeitsblätter 1.1 bis 1.3 abarbeitest.

## Einleitende Überlegungen Integral

Haben wir nun eine (beliebige) Funktion vor uns liegen, so muss es auch eine Funktion geben, aus welcher die vorliegende Funktion durch Differentiation hervorgehen würde (oder hervorgegangen ist), von welcher diese Funktion also in gewissem Sinne „abstammt“. Wir nennen diese Funktion in der Mathematik

**„Stammfunktion“** und schreiben **y = F(X)**.

Da es für die Operation des Differenzierens feste und eindeutige Regeln gibt, muss es auch eine Operation bzw. Regeln geben, die diesen Vorgang umkehren. Diese Operation **nennen wir „Integrieren“**, das Ergebnis der Operation **„Integral“**.

Man schreibt allgemein: $\boxed{\int \boldsymbol{f(x)dx = F(x)}}$ und umgekehrt $\boxed{\boldsymbol{f(x) = F'(x)}}$

## Bestimmung der Stammfunktion

Wollen wir nun von einer gegebenen Funktion y = f(x) die Stammfunktion y = F(x) bestimmen, so stoßen wir im Grunde auf zwei Probleme:

<u>Ein operatives Problem:</u> wir benötigen die (Rechen)Regeln für den umgekehrten Vorgang des Differenzierens, also **„Integrationsregeln"**. Wir wollen dies fürs erste den Fähigkeiten der Technologie überlassen und uns damit in einer späteren Unterrichtseinheit auseinandersetzen.

<u>Ein inhaltliches Problem:</u> wir wissen (und das ist fürs erste das weitaus größere Problem), dass (siehe oben) parallele Funktionen – und das sind letztlich unendlich viele – nur eine einzige gemeinsame Ableitung haben. Dies bedeutet: die Operation des Differenzierens ist zwar eindeutig, aber nicht so der umgekehrte Weg des Integrierens. Zu jeder Funktion gibt es letztendlich unendlich viele (parallele) Stammfunktionen…

Auch geometrisch ist dies leicht zu verstehen: die gegebene Funktion y = f(x) ist ja die Ableitungsfunktion der Stammfunktion y = F(x) und gibt somit für jeden beliebigen Argumentwert die (Tangenten)Richtung der Stammfunktion an. Wir wissen somit, wie diese an jeder Stelle verläuft, aber nicht wo sie sich befindet…

**<u>Aufgabenstellung 2:</u> Richtungsfeld**

Zur Verdeutlichung dieses geometrischen Zusammenhanges bearbeite in dem tns-File „Integral Stammfunktion" die Arbeitsblätter 1.4 bis 1.6.

Der Ti-Nspire bietet im Graphikfenster eine Funktion "Differentialgleichung" (Menue => Graph-Eingabe/Bearbeitung => Differentialgleichung), die bei einer eingegebenen Ableitungsfunktion Richtungspfeile von möglichen Stammfunktionen darstellt (Richtungsfeld).

Du kannst den Begriff „Richtungsfeld" sicherlich unvermittelt nachvollziehen…

## Das unbestimmte Integral

Wir lösen diese mathematische Mehrdeutigkeit, indem wir **der integrierten Funktion eine unbestimmte Konstante C** hinzufügen (die beim Ableiten ja wiederum verschwinden würde):

$$\boxed{\int \boldsymbol{f(x)dx = F(x) + C}}\ .$$

Wir sprechen deshalb von einem **unbestimmten integral**.

Der Vorgang des unbestimmten Integrierens ergibt somit als **Lösung unendlich viele** (parallele) **Funktionen**, die sich durch die unbestimmte Konstante C unterscheiden. Suchen wir eine bestimmte Funktion als Lösung, so benötigen wir eine weitere Angabe (Nebenbedingung - in der Regel ein Punkt), mit welchem wir die unbestimmte Konstante C berechnen und somit eine konkrete Stammfunktion bestimmen können.

**<u>Aufgabenstellung 3:</u> konkrete Stammfunktion mit Nebenbedingung**

Führe nun in dem tns-File „Integral Stammfunktion“ die Arbeitsblätter 1.7 und 1.8 aus.

Viel Spaß!

✂-----------------------------------------------------------------------------------------------------------

## Didaktischer Kommentar

Das Ti-Nspire - Dokument „**Einführung Integral – unbestimmtes Integral**“ versucht den SchülerInnen die Begriffe Integrieren, unbestimmtes Integral und unbestimmte Konstante C vor allem mit Rechnerunterstützung und Visualisierung intuitiv zu vermitteln.

Das Dokument ist für einen Unterricht gedacht, bei dem die Lehrperson den Lernprozess begleitet und weniger für ein unbegleitetes Selbststudium.

## Technologiehilfe

Der Rechner als Rechenhilfe und als Werkzeug der Visualisierung.