
Thema: Polynomfunktionen/Gleichungen-Lösungsanzahl

Peter Schüller

☒ TI-Nspire™ CAS

Schlagworte: algebraische Gleichungen, Polynomfunktionen, Lösen von Gleichungen

Anzahl der Lösungen von Gleichungen vom Grad n

Definition

Wir definieren eine Gleichung (in einer Unbekannten) vom Grad n als eine Gleichung, in der die Unbekannte x in Potenzen mit natürlichzahligen Exponenten vorkommt und bezeichnen die höchste auftretende Potenz der Unbekannten als den Grad der Gleichung.

Beispiel: $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ definiert eine Gleichung 3. Grades.

Aufgabenstellung:

- 1) Die linke Seite der Gleichung stellt ein Polynom in x dar, also hat die Gleichung die Form $p_n(x)=0$.
Speichere folgende Beispielpolynome, die wir für das spätere Arbeiten verwenden wollen, in den (Funktions)Variablen $p_2(x)$, $p_3(x)$, $p_4(x)$, $p_5(x)$:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x^4 - \frac{3x^3}{2} - 6x^2 + \frac{7x}{2} + 3 = 0$$

$$x^5 - \frac{151x^4}{15} + \frac{389x^3}{15} - \frac{23x^2}{5} - \frac{132x}{5} - \frac{36}{5} = 0$$

- 2) Erstelle nun eine neue Seite und löse vorerst alle vier Beispielgleichungen $p_n(x)=0$ mit dem "solve"-Befehl nach x.

Stelle danach mindesten 5 eigene, freie Versuche mit solchen Polynomgleichungen an und beobachte genau die erhaltenen Ergebnisse.

⇒ Was kannst Du in Hinblick auf die Anzahl der Lösungen erkennen?

⇒ Versuche einen Satz zu formulieren, der eine Beziehung zwischen der Anzahl der Lösungen und dem Grad der Gleichung herstellt.

- 3) Öffne danach für jedes der Polynome (sowohl der Beispielpolynome als auch deiner eigenen) ein eigenes Grafikfenster, definiere dort jeweils $f_n(x)=p_n(x)$,

zeichne den Grafen und bestimme dort mittels des Werkzeuges "Graph analysieren" die jeweiligen Nullstellen. Vergleiche die Ergebnisse mit den Lösungen der entsprechenden Gleichungen.

⇒ Was kannst Du erkennen?

⇒ Versuche, dafür eine Erklärung nieder zu schreiben.



Didaktischer Kommentar

Die Schüler/innen sollen durch experimentelles Lösen mehrerer Gleichungen, insbesondere auch der frei gewählten Beispiele, erkennen, dass der Grad n die Maximalzahl der Lösungen angibt. Sie sollen dabei den SOLVE Befehl benutzen. Der cSOLVE Befehl ist zu diesem Zeitpunkt – aus naheliegenden Gründen – noch ausgeklammert.

Es sollte darauf Wert gelegt werden, dass wirklich jede(r) Schüler/in versucht, eigenständig in Textform einen Satz zu formulieren.

Es kann davon ausgegangen werden, dass der überwiegende Teil der Schülerinnen bei den frei gewählten Aufgaben auf Gleichungen mit einer Anzeige $<n$ an reellen Lösungen stößt. Sollte dies vereinzelt nicht der Fall sein, kann mit dahingehenden Musteraufgaben unterstützend eingegriffen werden.

Im zweiten Aufgaben Teil sollen die Schülerinnen erkennen, dass das Lösen einer algebraischen Gleichung gleichbedeutend mit dem Bestimmen der Nullstellen der zugehörigen Funktion ist.

Erwartung:

Die Schüler/innen sollen sinngemäß folgende Fakten formulieren

- Anzahl der Nullstellen entspricht dem Grad n des Polynoms, kann aber auch geringer sein.
- Aufsuchen der Nullstellen einer Polynomfunktion und Lösen der zugehörigen Gleichung entsprechen einander.

Technologiehilfe

Einsatz des CAS-SOLVE-Befehles