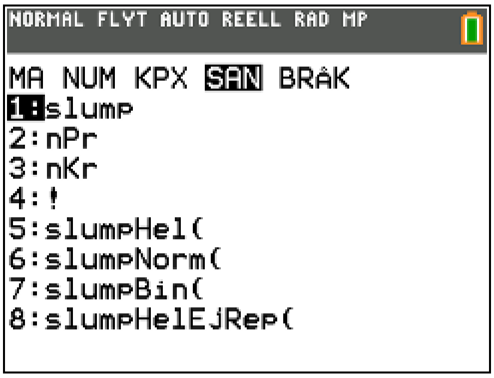
Kombinatorik och lite sannolikhetslära

På räknaren finns ett antal verktyg som har med sannolikhet att göra. Tryck på [math] och flytta sedan markören till **PRB**. Tryck nu på [enter]. Då kommer följande meny fram:



Instruktion **slumpHel** har du redan använt i sannolikhetsläran. Den genererar heltaliga slumptal mellan två gränser.

Vi börjar med instruktionen 4:!. ! benämns i detta sammanhang *fakultet* och 3! är samma sak som $1 \cdot 2 \cdot 3$ och allmänt

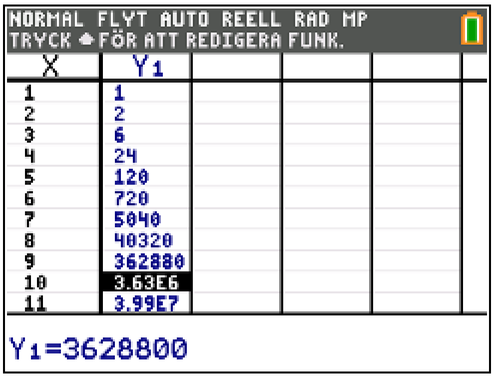
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Ett typexempel på användning av fakultet är följande problem:

På hur många sätt kan 10 böcker i en bokhylla placeras invid varandra?

Den första boken kan placeras på 10 sätt, den andra på nio sätt osv. Totalt blir det (se räknarbilden i nästa spalt) **3 628 800** olika sätt. Vi kan snabbt ta fram en tabell genom att i funktionseditorn skriva in Y1=X! och sedan trycka på [2nd][table] för att få fram en tabell. Du måste kanske först ställa in hur tabelldata ska visas genom att trycka [2nd] [tablset].

Så här blir nu tabellen. Du märker hur snabbt fakulteten ökar.



Permutationer

I en skola ska man utse tre matematiklärare till styrelseledamöter i en förening. Man ska välja ordförande, sekreterare och kassör. Det finns 10 matematiklärare. På hur många sätt kan man utse denna trepersonersgrupp?

Här kan man naturligtvis resonera sig fram till det rätta svaret. Den först utsedde läraren, som ska bli ordförande, kan väljas på 10 sätt, nästa lärare kan väljas på 9 sätt, och den tredje läraren på 8 sätt. Multiplikationsprincipen ger då att det finns sammanlagt

$10 \cdot 9 \cdot 8$ sätt

att utse denna lärargrupp.

Problemet ovan visar en kategori av problem som är vanliga i *kombinatorik*:

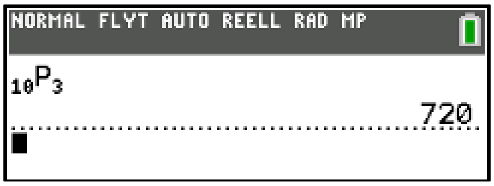
Av *n* olika objekt ska man välja ut en delmängd av *k* objekt och dessa ska uppräknas i en viss ordningsföljd. En sådan här delmängd kallas för en ***permutation*** av *k* element ur *n* givna. Antalet permutationer av *k* olika objekt ur *n* givna är

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Verkar formeln konstig. Vi använder nu formeln på vårt exempel:

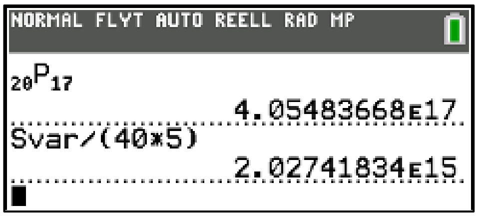
$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 10 \cdot 9 \cdot 8$$

På räknaren finns en inbyggd funktion **nPr** med vilken man kan beräkna antalet permutationer. Problemet ovan kan alltså direkt beräknas om man skriver som skärmbilden visar. Man börjar med att skriva in 10 och väljer sedan [math] och sedan fliken SAN. Där väljer du nu 2:nPr och trycker på [enter]. Dy fyller sedan i 3 och trycker på [enter] igen.



Nu ett annat exempel:

I en klass med 17 elever så placerar de sig vid varje mattelektion helt slumpmässigt på klassrummets stolar. Det finns 20 stolar att välja på. Låt oss säga att du har fem lektioner i veckan under läsårets 40 veckor, hur många år tar de då att gå igenom alla olika placerings-möjligheter?



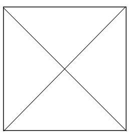
Kommentar: det blir ofta väldigt *stora* tal när man arbetar med kombinatorik. 10^{15} år är ju ca 10 000 gånger mer än universums ålder.

Kombinationer

På en fest ska de fyra gästerna skaka hand med varandra. Hur många handskakningar blir det totalt?

Lösning:

Det blir sex handskakningar. Detta ser man direkt om man ritar upp en figur där varje handskakning visas som ett streck mellan personerna.



Man kan också komma fram till svaret genom att räkna handskakningarna från varje person. Alla fyra skakar ju hand med tre andra så det blir 12 men är det blir ju dubbelräkning eftersom till exempel A skakar hand med B men B skakar ju också hand med A. Svaret blir alltså 12/2 = 6. Vi kan nu skriva formeln för det här som

$$\frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

där *n* är antalet personer.

Två nya gäster kommer till festen. De känner varandra och kommer inte att skaka hand med varandra. Hur många nya handskak-ningar blir det nu totalt om alla skakar hand med varandra?

Vi använder formeln ovan

$$\frac{6\cdot(6-1)}{2}=15$$

Antalet *nya* handskakningar blir nu 15 – 6 – 1 = 8. Vi får ju dra bort de gamla handskakningarna och sedan en till för de två nya gästerna.

Finns det något mer sätt att resonera sig fram till svaret?

Mer formellt blir det nu så här:

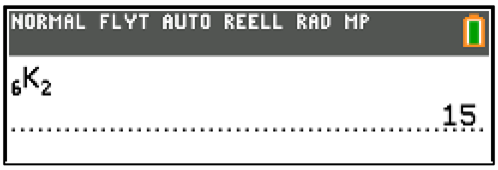
Om man *inte tar hänsyn till ordningen* använder man instruktionen **nKr** på räknaren. Att bland *k* givna välja ut *n* stycken kallar man välja ut en *kombination*.

Antalet kombinationer av *k* olika objekt ur *n* givna är

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Man brukar skriva detta tal som $\binom{n}{k}$, som utläses ”*n* över *k*”.

Vi testar nu för exemplet ovan:



Fem kort på handen

I Poker handlar om att ha en så bra femkortshand som möjligt. Man drar då kort från en vanlig kortlek med 52 kort med tretton valörer (ess, kung, dam, knekt osv) i fyra sviter (spader, hjärter, ruter, klöver). När man spelar poker måste man ha en känsla för vad sannolikheterna är för olika händer.

Vi ska nu titta på sannolikheten för viss pokerhand

Sannolikheten för att fem slumpvis dragna kort ska ge en viss *unik* hand. (där ordningen inte spelar någon roll) kommer vi fram till så här:

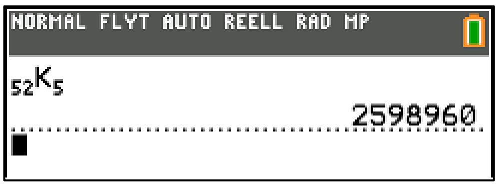
Först är det är **5** chanser på **52** att det första kort man drar ska vara bland de fem önskade korten. Sedan är det **4** chanser på **51** att nästa kort man drar (av 51) ska vara bland de fyra återstående önskade korten. Så fortsätter det med 3 chanser på **50**, **2** chanser på 49 och till sist **1** chans på **48**.

Enligt multiplikationsprincipen är då sannolikheten att alla fem händelserna (de fem dragningarna) ska inträffa

$$\frac{5}{52}\cdot\frac{4}{51}\cdot\frac{3}{50}\cdot\frac{2}{49}\cdot\frac{1}{48}=\frac{1}{2\,598\,960}$$

Det här betyder då att man kan bilda **2 598 960** olika femkortshänder från en vanlig kortlek med 52 kort.

Det här kan vi nu räkna ut direkt med räknaren



Nu till ett exempel:
Vad är sannolikheten att du får en kåk

En **kåk** är en hand där du har tre kort i en valör och 2 kort i en annan. Då handlar det först om att välja ut två valörer. Där den ena ska ge triss och den andra par. Det betyder att vi **13** möjligheter att välja triss och då återstår **12** möjligheter att välja par.

För triss finns det nu $\binom{4}{3}$ möjligheter att välja tre kort av de fyra korten med samma valör.

och för par finns det $\binom{4}{2}$

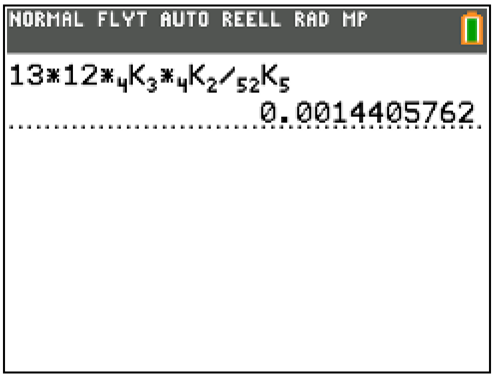
Totalt blir det då enligt multiplikationsprincipen

$13\cdot 12\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{2}=3744$ möjligheter.

Sannolikheten att du ska få en kåk är då

$$\frac{3744}{2\,598\,960}=\frac{6}{4165}\approx 0{,}00144 \text{ dvs } 0{,}144\ \%.$$

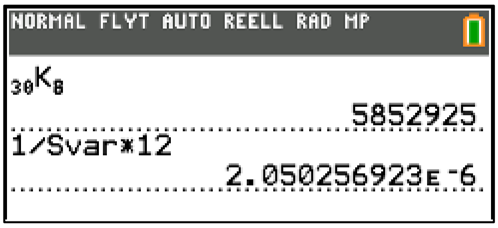
Så här blir beräkningen på räknaren:



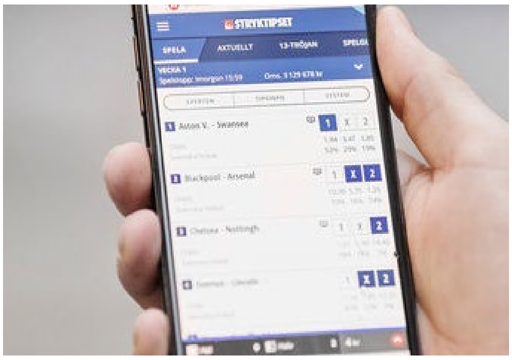
Du kan hitta en utmärkt beskrivning av alla pokerkombinationer på
http://matematik.grebsrof.se/3my04a/arkiv/pokerkombinatorik.pdf

På måltipset gäller det att bland 30 matcher välja ut de 8 målrikaste. Hur stor är sannolikheten att du får 8 rätt om du lämnar in 12 olika rader?

Vi beräknar här först antalet kombinationer. För att få sannolikheten tar vi 1 dividerat med antalet kombinationer och sedan multiplicerar vi med 12 eftersom det lämnades in 12 olika rader. Beräkningarna finns på skärmbilden nedan.



Plötsligt händer det!



Stryktipset är ett av de mest populära spelen i Sverige och har så varit ända sen 1934. Namnet kommer sig av att man på de allra första kupongerna skulle stryka ett streck över det lag man trodde skulle förlora. För pappa och mormor var det "tolvan" som gällde; den trettonde matchen infördes 1969. Stryktipset tilltalar alla hjärtan som klappar för fotboll och är idag det mest populära spelet bland yngre män.

I stryktips finns det ett visst mått av skicklighet. Om vi glömmer det och säger att resultaten på alla matcher är helt *slumpmässiga* och kan sluta hur som helst - hur stor sannolikhet har man då att få tretton rätt på en enkelrad?

- Sannolikheten att pricka rätt på *en* match är 1/3 (det kan ju bli 1:a, X eller 2:a).
- Sannolikheten att pricka rätt på *två* matcher är 1/3 · 1/3 = 1/9.
- Så fortsätter man rad efter rad. Sannolikheten att tippa 13 rätt blir då

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\ \ldots\ \cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{13}=\frac{1}{1\,594\,323}$$

Alltså en chans på 1 594 323 att få 13 rätt.

Låt säga att vi vill räkna ut chansen att få 10 rätt på en enkelrad. Vi börjar med att ställa upp alla fakta vi har:

- Sannolikheten att pricka rätt på en match är 1/3.
- Sannolikheten att tippa fel på en rad är 2/3

Om tio matcher ska prickas in använder vi multiplikationsregeln som ovan:

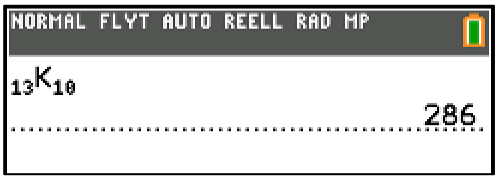
$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\ \ldots\ \cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{10}=\frac{1}{54\,049}$$

- Dessutom ska tre matcher gå *fel* (vi sa ju bara 10 rätt):

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=\frac{8}{27}$$

Till sist: På *hur många* sätt kan man få tio rätt av 13 matcher. Man kan formulera frågan så här:
"*På hur många sätt kan man välja ut 10 av tretton?*"

Det är nu kombinatoriken kommer in. Man kan ju tänka sig att man tar match 1, 2, 3, … 10. Man kan också ta match 3, 4, 5, … ,12. Detta kan vi räkna ut på en gång med räknarens inbyggda instruktion för antalet kombinationer. Se nästa sida.



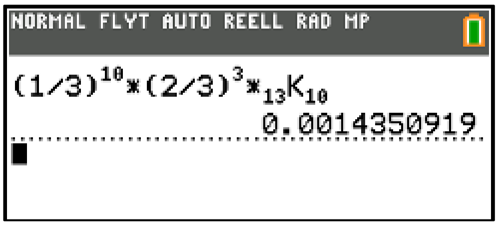
Det finns alltså 286 sådana kombinationer.

Nu multiplicerar vi ihop alla våra resultat från beräkningarna:

$$\frac{1}{59\,049} \cdot \frac{8}{27} \cdot 286 \approx 0{,}001435$$

dvs. 0,14 % chans vilket är **1 chans på 697**.

Vi kan ju också skriva så här på räknaren:



Samtliga sannolikheter på stryktipset ser du i tabellen. Du ser att man har störst chans att få 4 rätt på en enkelrad.

0 rätt:	0,51 %
1 rätt:	3,34 %
2 rätt:	10,02 %
3 rätt:	18,37 %
4 rätt:	22,96 %
5 rätt:	20,67 %
6 rätt:	13,78 %
7 rätt:	6,89 %
8 rätt:	2,58 %
9 rätt:	0,72 %
10 rätt:	0,14 %
11 rätt:	0,020 %
12 rätt:	0,0016 %
13 rätt:	0,0000627 %

Kluring: Hur många rader måste man minst tippa för att vara säker på att få minst 5 rätt?

Vi ska inte närmare gå in på teorin för dessa upprepade försök. Allmänt gäller:

Antag att en händelse i ett slumpmässigt försök har sannolikheten *p*. Om man gör *n* oberoende försök är sannolikheten att händelsen inträffar *exakt k* gånger:

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Dessa sannolikheter kallas *binomialfördelningen*.

$\binom{n}{k}$ skrivs på räknaren **n nKr k**.

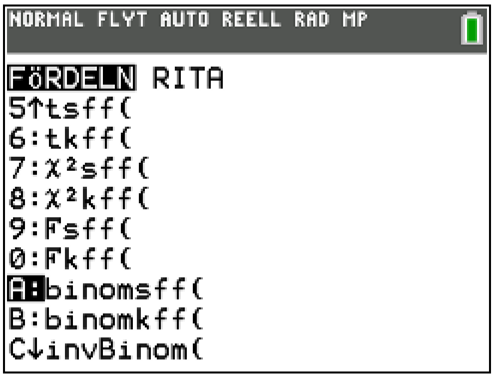
Om du tittar på formeln så är det precis det vi räknade ut i tips-exemplet.

Räknaren har många kraftfulla funktioner och binomilafördelningen som vi nämnde finns som en inbyggd funktion på alla TI-84 Plus-räknare.

Vi ser nu till att vi innan det färdiga uttrycket kommer får en ”guide”, STAT-GUIDER, som gör det lättare att fylla i värden. Man ställer in detta under [mode].

Du hittar funktionen **binompdf** genom att trycka [2nd] [distr]. I den lista som då kommer fram finns ett stort antal funktioner för att beräkna olika sannolikhetsfördelningar.
Ska man ha en lista med sannolikheterna för 0, 1, 2 … 9, 10 lyckade utfall kan man spara den i statistikeditorn. I **L1** har vi lagt listan 0, 1, 2 … 13 för antalet lyckade försök. Med lyckat försök menas här att man tippar rätt.

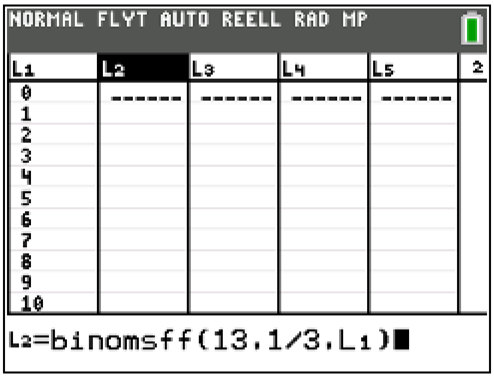
I statistikeditorn så placera du markören i kolumnhuvudet i Lista L2. Tryck på [2nd][distr] och välj nu A: binomsff och tryck på [enter]



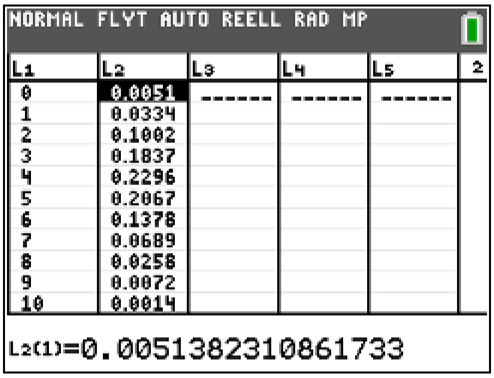
Nu kommer en ny sida upp där du uppmanas att fylla i olika värden. Så¨här fyller du in här:

Masrkera **Klistra in** Tryck nu på [enter]. Då kommer hela instruktionen upp i statstik-editorns inmatningsfält längst ner:

D å kan det se ut så här



Tryck nu på [enter]



Nu får vi en lista med sannolikheterna för att få 0 till 13 rätt. Ur denna lista kan man också lätt beräkna händelser som till exempel ”få *minst* 8 rätt” mm. Om du i kolumnhuvudet i L3 skriver

kumSum(L2)

så beräknas de kumulerade frekvenserna. Instruktionen kumSum når du genom att trycka på [2nd][list]. Där finns många statistiska beräkningsverktyg.

En ny fråga:

Vad är chansen att det finns exakt 5 kvinnor i en slumpmässig grupp på 10 personer? Urvalet sker från en stor population där det finns lika många kvinnor som män.

Det här är ungefär samma problem som förut. Vi upprepar att försök 10 gånger där sannolikheten att lyckas (välja en kvinna) är 1/2.

Först fråga man sig hur många olika kombinationer det finns där det finns 5 kvinnor.?

Ett urval kan ju till exempel vara

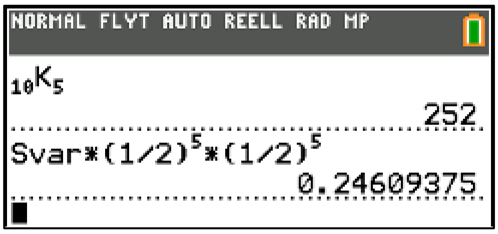
k, k, m, k, m, m, m, k, m, k

Det finns ju

$\binom{10}{5} = 252$ olika kombinationer.

Sedan ska vi ju lyckas 5 gånger med sannolikheten 1/2 och misslyckas 5 gånger med sannolikheten 1/2.

Den totala sannolikheten blir då



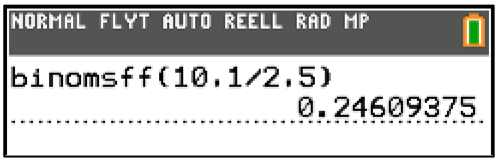
Vii vi ha svaret som ett rationellt tal så blir det $\frac{63}{256}$. Räkna själv ut detta!

Du kan också beräkna med den inbyggda funktionen för binomilafördelningen. Tryck på [2nd][distr] och välj A:binomsff. Fyll sedan i din mall så här

Markera Klistra in och tryck på [enter]. Då kommer hela instruktionen för beräkningen upp i grundfönstret.

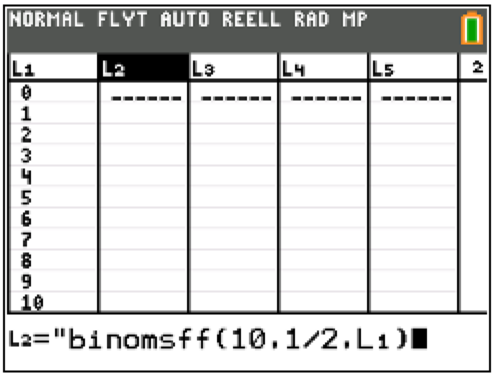
Tryck nu på enter igen:

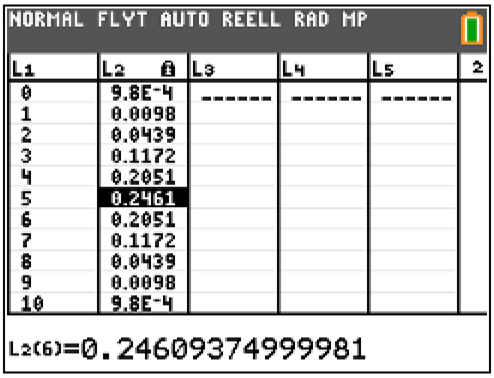
Vi får samma resultat. Betydligt enklare och snabbare.



Knappt 25 % alltså.

Man kan också göra beräkningen i statistik-editorn och då får man sannolikheterna 0 kvinna,1 kvinna, 2 kvinnor … 10 kvinnor för detta försök i lista L2. I lista L2 har vi talen 0 till och med 10. Det är ju antalet lyckade försök.





Ni ser symmetrin i lista L2.