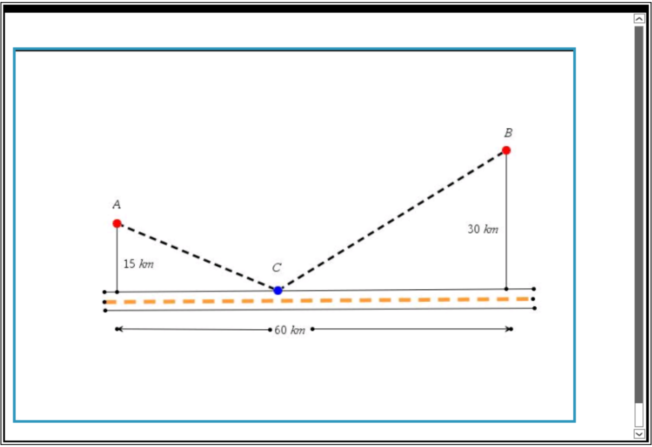
Kortaste vägen mellan två fabriker

Ett företag har två fabriker A och B, belägna enligt skissen nedan. Längs vägen ska man placera ett lager C. Man ska bygga vägar mellan fabrikerna och lagret (markerat med streckade linjer). Var ska detta lager placeras för att det sammanlagda avståndet till lagret från fabrikerna ska vara så litet som möjligt? Vi visar nu tre metoder att lösa problemet!

Övningen passar för kurs 4 eftersom det handlar om att derivera sammansatta funktioner.

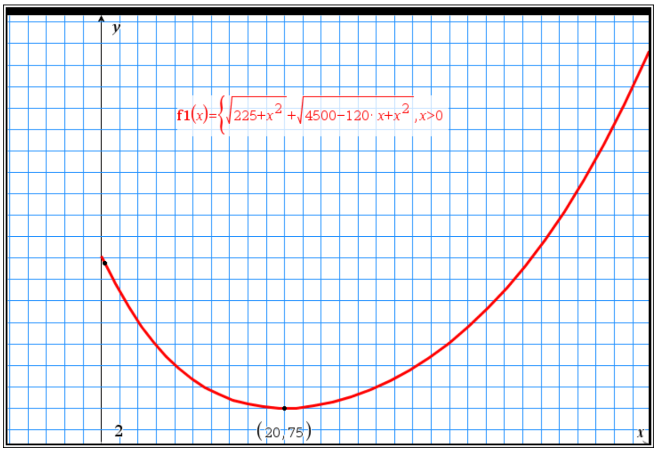


Sid 2: Om vi betecknar avstånden längs vägen med x och 60 -x kan vi med Pythagoras sats räkna ut den sammanlagda sträckningen *ACB* som

$$\sqrt{15^2+x^2}+\sqrt{30^2+(60-x)^2}$$

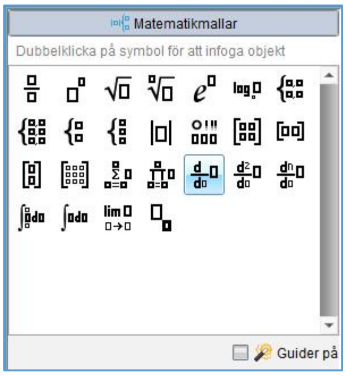
Vi kan nu rita denna funktion och beräknar sedan grafiskt/numeriskt det minsta värdet.

Sid 3: Med analysverktyget har vi här beräknat minsta värdet. Vi har ställt in fönstret så att man ser minimivärdet ordentligt.



Sid 4: Vi definierar förts en funktion $f(x)$. Sedan beräknar vi derivatan och till sist derivatans nollställe.

Mallen för att skriva $\frac{d}{dx}(f(x))$ finns i malluppsättningen i dokumentsverktygslådan.



Define $f(x)=\sqrt{225+x^2}+\sqrt{4500-120\cdot x+x^2}$ — Klar

$\frac{d}{dx}(f(x))$ — $\frac{x-60}{\sqrt{x^2-120\cdot x+4500}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+225}}$

solve$\left(\frac{x-60}{\sqrt{x^2-120\cdot x+4500}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+225}}=0,x\right)$ — $x=20$

$f(20)$ — 75

Här en analytisk algebraisk lösning där vi utnyttjar TI−Nspires CAS−motor. Vi definierar först funktionen och sedan beräknas derivatan. Med kommandsot *solve* har vi beräknat derivatans nollställe. $f(20)$ ger sedan det minsta totala avståndet.

På nästa sida visar vi *steg för steg* den den algebraiska lösningen av ekvationen.

Sid 5: På denna sida så löser vi nu i steg ekvationen som beräknar derivatans nollställe. Vi använder CAS-verktyget för att utveckla uttryck (*expand*) och kommer så småningom fram till en enkelt andragradsuttryck.

Vi ska nu steg för steg lösa ekvationen $\frac{x-60}{\sqrt{x^2-120\cdot x+4500}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+225}}=0$

Vi ser till att vi får samma *nämnare* i vänstra och högra ledet och skriver om ekvationen så här:

$$\frac{(x-60)\cdot\sqrt{x^2+225}}{\sqrt{x^2-120\cdot x+4500}\cdot\sqrt{x^2+225}}=-\frac{x\cdot\sqrt{x^2-120\cdot x+4500}}{\sqrt{x^2-120\cdot x+4500}\cdot\sqrt{x^2+225}}$$

Vi kan nu kvadrera täljarna i båda leden:

V.L. $\left((x-60)\cdot\sqrt{x^2+225}\right)^2 \blacktriangleright (x-60)^2\cdot(x^2+225)$ **H.L.** $\left(x\cdot\sqrt{x^2-120\cdot x+4500}\right)^2 \blacktriangleright x^2\cdot(x^2-120\cdot x+4500)$

Vi utvecklar

expand$\left((x-60)^2\cdot(x^2+225)\right) \blacktriangleright x^4-120\cdot x^3+3825\cdot x^2-27000\cdot x+810000$ **V.L.**

expand$\left(x^2\cdot(x^2-120\cdot x+4500)\right) \blacktriangleright x^4-120\cdot x^3+4500\cdot x^2$ **H.L.**

Vi förenklar

expand$\left(x^4-120\cdot x^3+3825\cdot x^2-27000\cdot x+810000-(x^4-120\cdot x^3+4500\cdot x^2)\right) \blacktriangleright -675\cdot x^2-27000\cdot x+810000$

Division med 675 ger

$\frac{-675\cdot x^2-27000\cdot x+810000}{675} \blacktriangleright -(x^2+40\cdot x-1200)$ solve$(-x^2-40\cdot x+1200=0,x) \blacktriangleright x=-60$ or $x=20$

Sid 7: Vi ska nu lösa problemet geometriskt.

Här vi med geometriapplikationen konstruerat en skalriktig interaktiv ”lösning” på problemet. Genom att dra i punkten *E*, som är positionen för lagret, kan du se det sammanlagda avståndet *BE* + *ED*. När är nu detta avstånd som kortast? Vi konstruerar då en "virtuell" ort *F* som ligger på samma avstånd från vägen som fabriken *B*.

Man inser att den kortaste vägen är när *FD* är en rät linje. Likformiga trianglar ger sedan att punkten *E* ska vara placerad 20 km från *A*. Pythagoras sats ger då att det sammanlagda avståndet från lagret till fabrikerna är 75 km.

Dra i den gröna punkten och se hur avståndet *BE*+*ED* förändras. Försök att ställa in så att vinklarna blir lika stora.