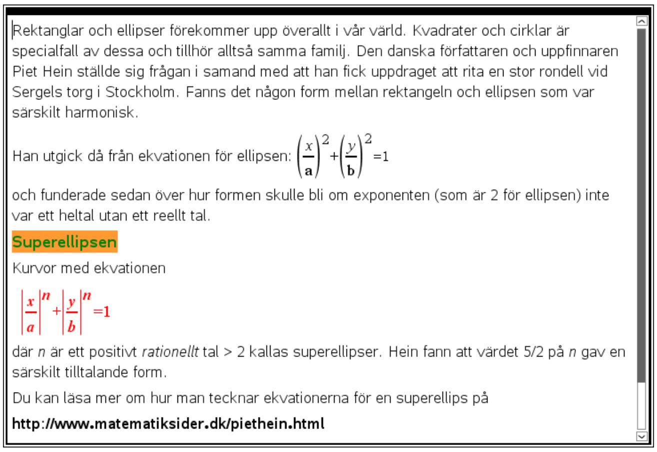
Kurvor i konsten

Denna aktivitet kan användas som breddning i kurs 3 när cirkelns ekvation behandlas. I grafapplikationen kan man mata in och plotta kägelsnittsekvationer, t.ex. cirklar och ellipser.



Rektanglar och ellipser förekommer upp överallt i vår värld. Kvadrater och cirklar är specialfall av dessa och tillhör alltså samma familj. Den danska författaren och uppfinnaren Piet Hein ställde sig frågan i samband med att han fick uppdraget att rita en stor rondell vid Sergels torg i Stockholm. Fanns det någon form mellan rektangeln och ellipsen som var särskilt harmonisk.

Han utgick då från ekvationen för ellipsen: $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$

och funderade sedan över hur formen skulle bli om exponenten (som är 2 för ellipsen) inte var ett heltal utan ett reellt tal.

Superellipsen

Kurvor med ekvationen

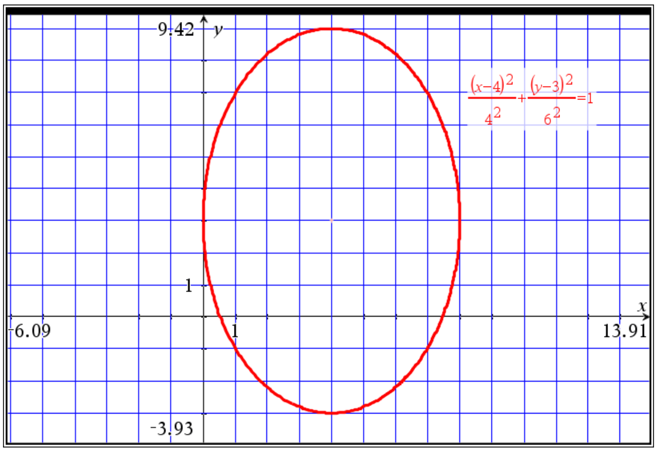
$$\left|\frac{x}{a}\right|^n+\left|\frac{y}{b}\right|^n=1$$

där n är ett positivt *rationellt* tal > 2 kallas superellipser. Hein fann att värdet 5/2 på n gav en särskilt tilltalande form.

Du kan läsa mer om hur man tecknar ekvationerna för en superellips på

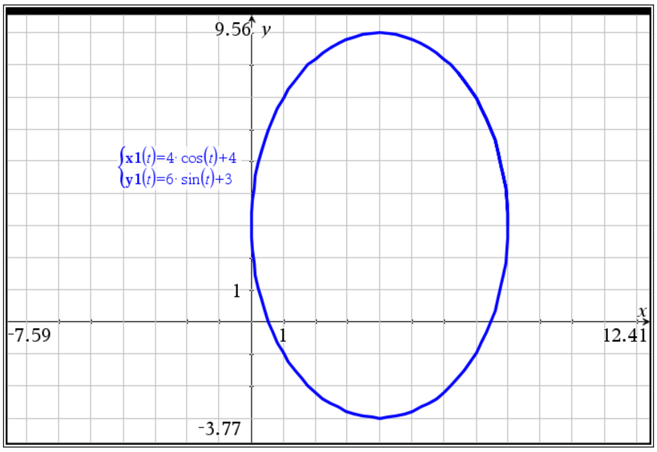
http://www.matematiksider.dk/piethein.html

Nedan har vi plottat en ellips som en ekvation i graf-applikationen. Se till att ni har ett kvadratiskt fönster.



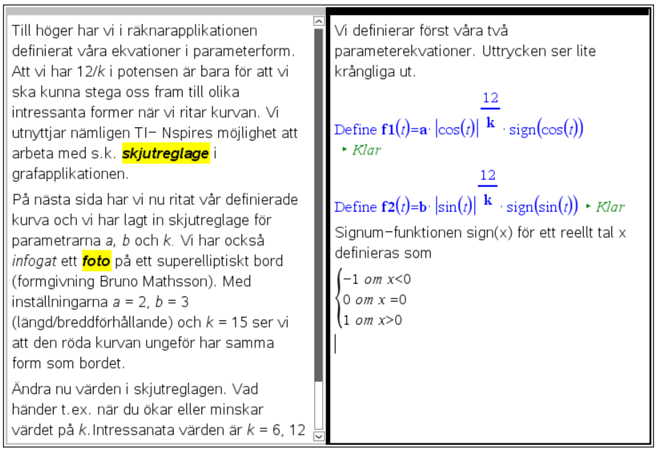
Man har också möjligheten att plotta ellipsen ovan genom att använda sig av ekvationer i *parameterform*.

Det är just ekvationer i parameterform vi utnyttjar här för att plotta andra ellipsliknande former.



Sid 3-4:

På denna sida finns en beskrivning av de ekvationer vi använder för att plotta superellipsen. En utförlig be-skrivning hittar ni på den danska sidan: *http://www.matematiksider.dk/piethein.html*



Till höger har vi i räknarapplikationen definierat våra ekvationer i parameterform. Att vi har 12/*k* i potensen är bara för att vi ska kunna stega oss fram till olika intressanta former när vi ritar kurvan. Vi utnyttjar nämligen TI– Nspires möjlighet att arbeta med s.k. ***skjutreglage*** i grafapplikationen.

På nästa sida har vi nu ritat vår definierade kurva och vi har lagt in skjutreglage för parametrarna *a*, *b* och *k*. Vi har också *infogat* ett **foto** på ett superelliptiskt bord (formgivning Bruno Mathsson). Med inställningarna *a* = 2, *b* = 3 (längd/breddförhållande) och *k* = 15 ser vi att den röda kurvan ungefär har samma form som bordet.

Ändra nu värden i skjutreglagen. Vad händer t.ex. när du ökar eller minskar värdet på *k*. Intressanata värden är *k* = 6, 12

Vi definierar först våra två parameterekvationer. Uttrycken ser lite krångliga ut.

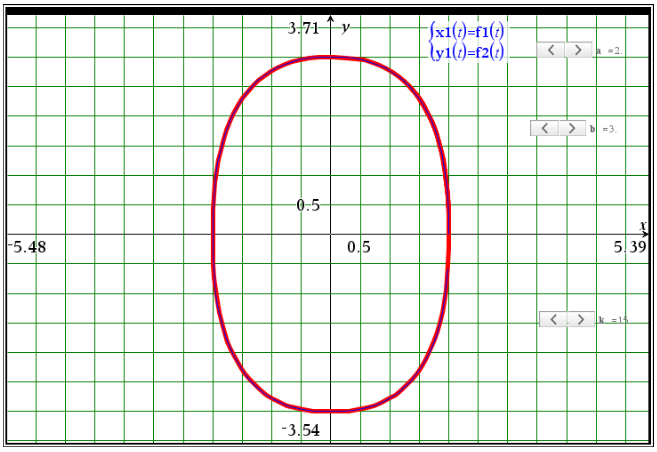
Define $f1(t)=a\cdot|\cos(t)|^{\frac{12}{k}}\cdot \text{sign}(\cos(t))$ ▸ *Klar*

Define $f2(t)=b\cdot|\sin(t)|^{\frac{12}{k}}\cdot \text{sign}(\sin(t))$ ▸ *Klar*

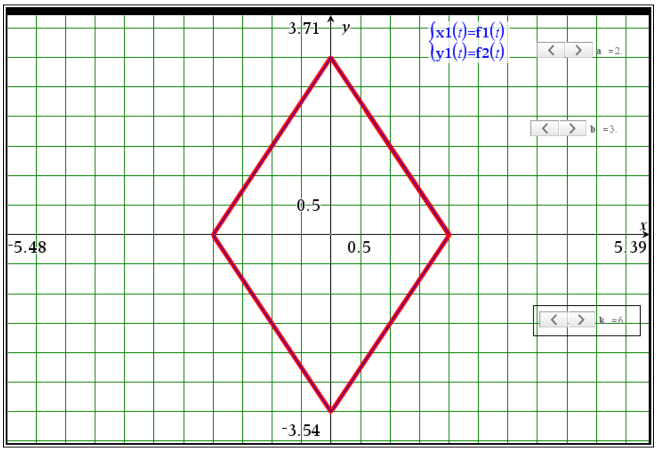
Signum−funktionen sign(x) för ett reellt tal x definieras som

$$\begin{cases}-1 \text{ om } x<0\\0 \text{ om } x=0\\1 \text{ om } x>0\end{cases}$$

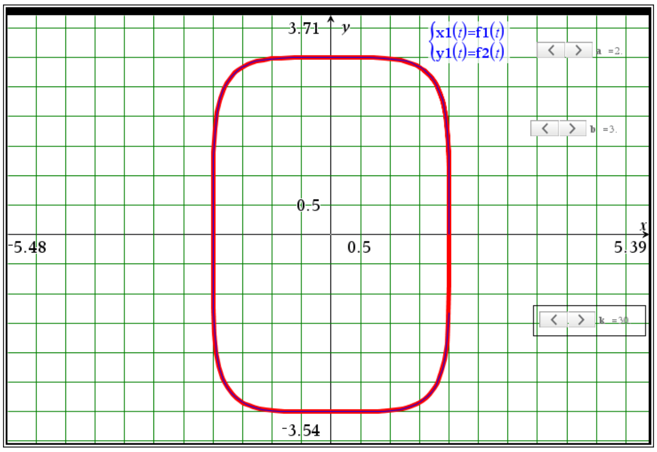
Observera att vi använt tre parametrar a, b och k i ekvationerna. Det gör det enkelt att få andra former.



Här har parametern k värdet 15.



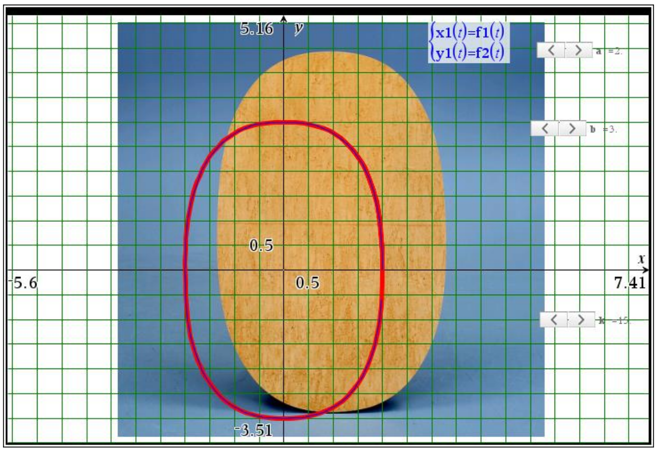
Här har parametern k värdet 6.



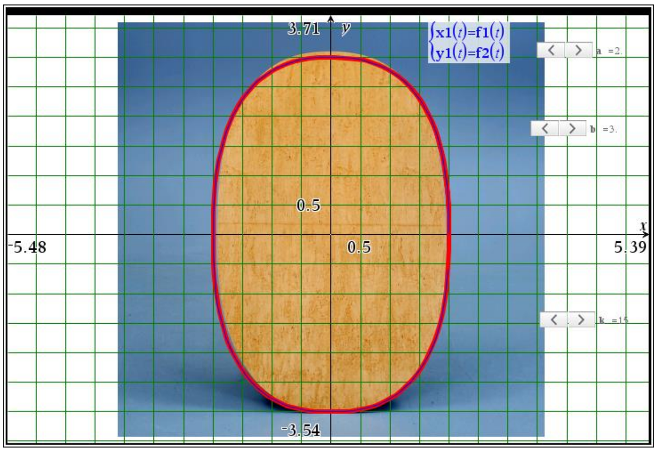
Här har k värdet 30. Vi får en alltmer rektangulär form för stora värden på k.

TI-Nspire har en funktion för att infoga bilder. Den funktionen finns i huvudmenyn under Infoga.
Bilden lägger sig då ovanför graffönstret och man kan sedan flytta koordinatsystemet på skärmen och dra i axlarna så att man får en så bra passning som möjligt.

Så här kan det se ut innan justeringen

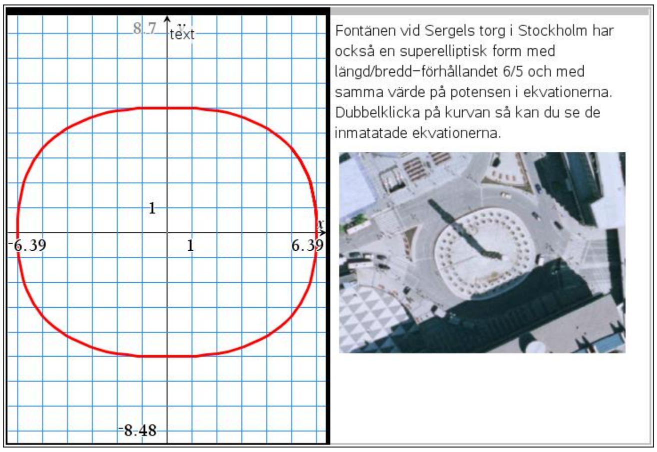


Här har vi en bra passning mellan kurva och bild.



Sid 5:

Här visar vi formen för trafikplatsen vid Sergels torg. Längd/bredd-förhållandet är 6:5.



På https://www.youtube.com/watch?v=GznQgTdEdI4 finns ett trevligt Youtube-klipp om hur Piet Hein kom fram till formen på trafikplatsen vid Sergels torg. Där visas också den s.k. superellipsoiden eller superägget.