Kvadratrötter – problem med

Skriv följande på tavlan.

Vad är $\sqrt{25}$?

a) $\sqrt{25} = 5$

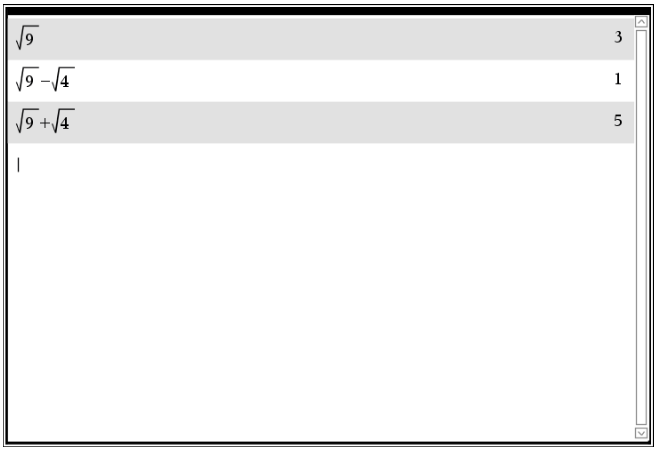
b) $\sqrt{25} = \pm 5$

Vilket tror du är ditt vanligaste svar? Det beror naturligtvis vilka elever du har framför dig. Undersökningar visar att en majoritet av eleverna som studerar matematik i åk 1 på gymnasiet, eller motsvarande, svarar alternativ b), vilket är fel!

Denna missuppfattning om vad rottecknet står för kan innebära stora problem i de fortsatta studierna, t.ex. när man ska lösa olikheter och ekvationer med kvadratrötter.

I denna aktivitet ger vi en del tips om hur man kan använda CAS och grafritande teknologi för att öka förståelsen av kvadratrotsbegreppet.

Fån Wikipedia:
Med ett tals kvadratrot menas den positiva kvadratroten, även kallad ***principalvärdet****, av kvadratroten.*

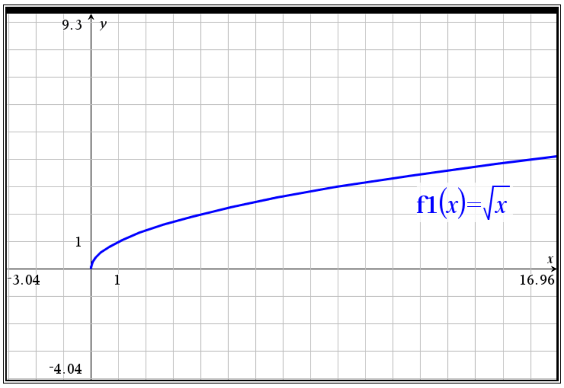


Till ekvationer av typen $y=x^2$ finns även negativa lösningar. Exempelvis gäller att

$$(-3)^2 = 3^2 = 9$$

så ekvationen $9=x^2$ har två rötter, det positiva talet 3 och det negativa talet -3.

Anledningen till att man väljer bara den icke-negativa lösningen är att man vill att $\sqrt{x}$ ska vara en *funktion*, som då enbart får anta maximalt *ett* värde för varje *x*. Se bild.



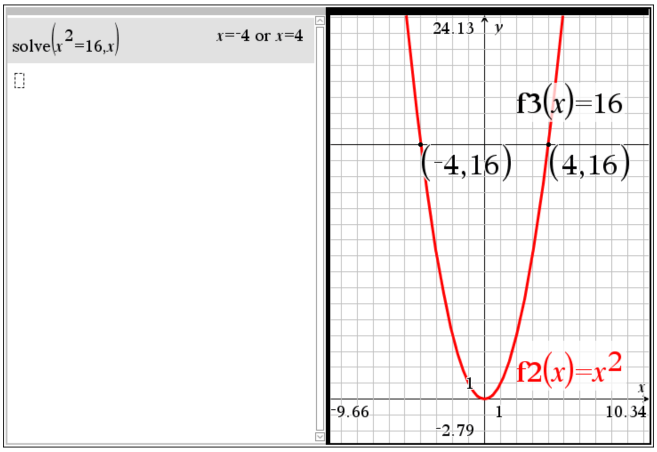
Graf av roten ur x

Det här betyder t.ex. att frågan ” Förenkla $\sqrt{16}$ ” har svaret 4 och att frågan ”hitta alla kvadratrötter till 16” har svaret -4 och 4.

Lösningen på uppgiften ”Beräkna *x* om $x^2 = 16$” brukar hos många elever se ut så här:

$$x^2 = 16$$
$$x = \sqrt{16}$$
$$x = \pm 4$$

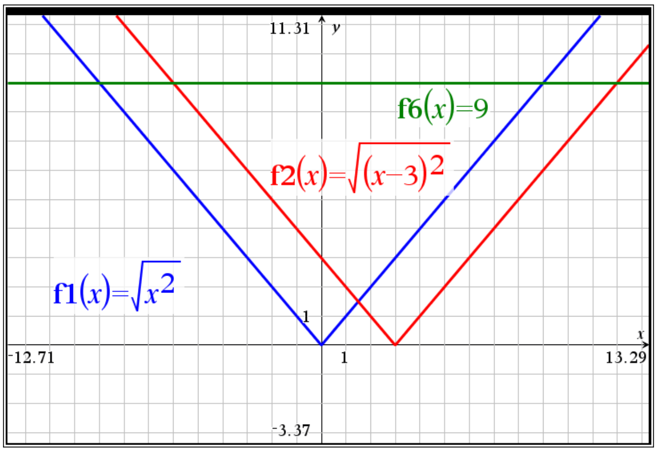
Svaret är rätt men det är den andra raden som är fel. Det ska naturligtvis stå $x = \pm\sqrt{16}$.



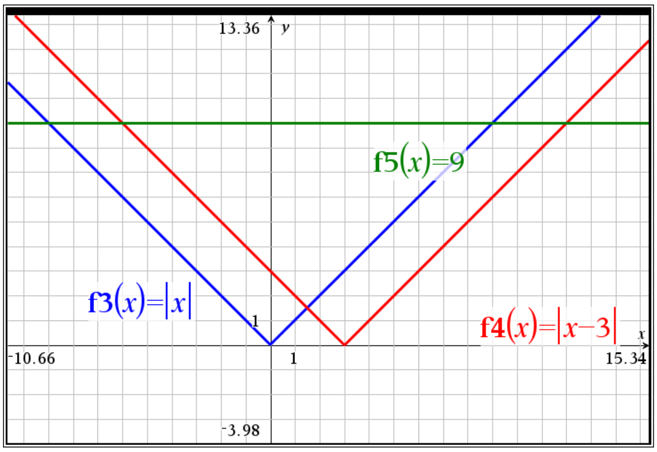
Här kan man nu införa begreppet *absolutbelopp*:

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & \text{om } x \geq 0 \\ -x, & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

Här några problem där vi använder oss av denna funktion. Vi söker lösningar till ekvationen $\sqrt{(x-3)^2} = 9$. Det motsvaras i grafen av skärningarna mellan linjen y=9 och funktionen $y = \sqrt{(x-3)^2}$. Svaret blir *x*=-6 och *x*=12, som vi kan se i graferna på nästa sida.



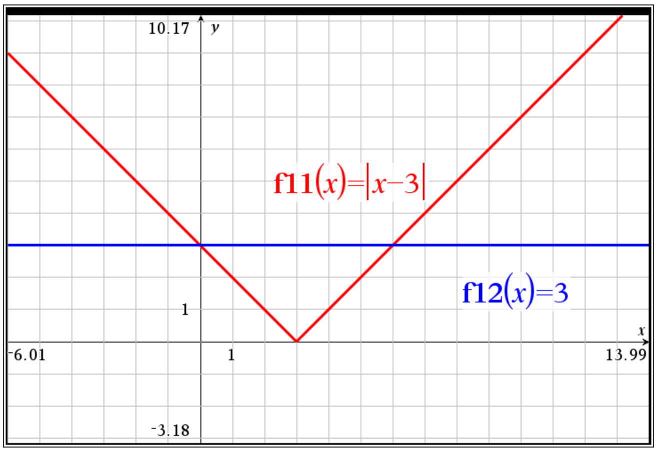
Skriver vi in $\sqrt{(x-3)^2}$ på TI-Nspire i applikationen Räknare får vi en direkt omskrivning på absolut-beloppsformen.



Lösningar med CAS-verktyget:

Nu tar vi ekvationen $(x-3)^2=9$. Vi får först $\sqrt{(x-3)^2}=\sqrt{9}$ som vi kan skriva som $|x-3|=3$. Vi plottar nu båda leden i ekvationen.

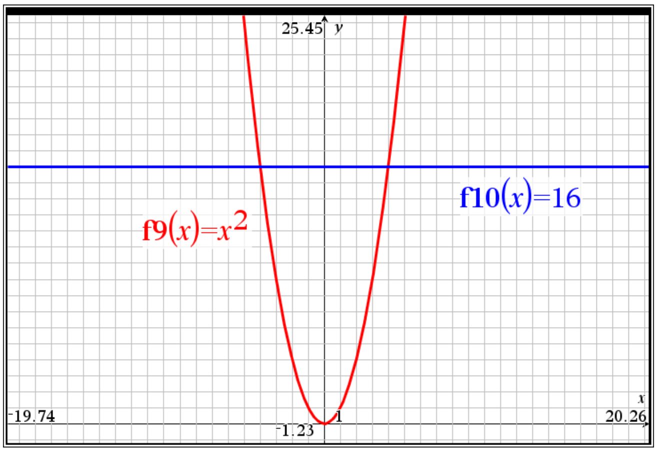
Skärningspunkterna ger lösningarna x=0 och x=6.



Hur gör vi då med uppgiften ”Beräkna alla *x* för vilket det gäller att $x^2>16$”.

$x^2>16$
$x>\pm\sqrt{16}$
$x>\pm 4$ som också kan skrivas x>4 och x>-4

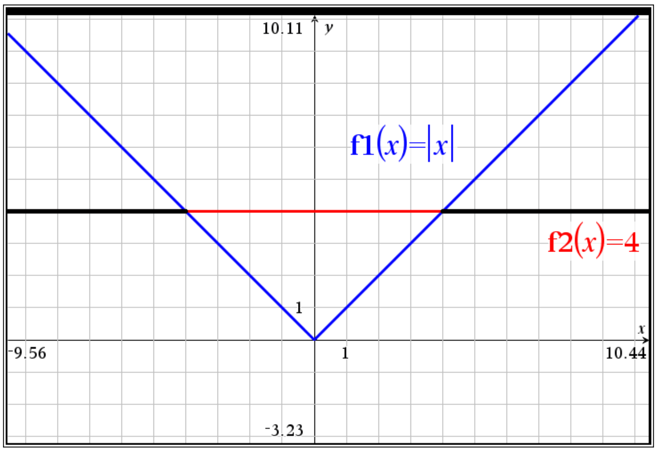
Det här stämmer ju inte. En lösning skulle ju då vara x =1. Det räcker att titta på grafen nedan, där vi plottat uttrycken på båda sidor i olikheten. Vi ser ju direkt att x^2 är större än 16 för x<-4 och x>4.



$x^2>16$ kan ju omskrivas som $\sqrt{x^2}>\sqrt{16}$ som kan skrivas som $\sqrt{x^2}>4$. Nu är ju $\sqrt{x^2}=|x|$ och vi får

$|x|>4$.

Vi ritar absolutbeloppsfunktionen $|x|$ och sedan har vi också plottat linjen *y*=4 också. Vi ser i grafen lösningen på *x*-axeln markerad med tjocka linjer på nästa sida.



Med TI-Nspire får vi naturligtvis lösningen direkt

Om vi kvadrerar ett tal och sedan försöka komma tillbaka till det ursprungliga talet genom att ta kvadratroten ur talet, kan inte vi bestämma det ursprungliga antalet. Om till exempel jag berätta att jag kvadrerat ett tal och resultatet är 9, så vet jag ju inte om mitt ursprungliga tal var 3 eller -3.

Denna gåta tar oss tillbaka till skillnaden mellan upp-gifterna ”Beräkna $\sqrt{9}$” och ”lös ekvationen $x^2 = 9$.” Det är viktigt för eleverna att förstå att kvadrat-rotsfunktionen $\sqrt{}$ och kvadratfunktionen inte är varandras inverser. Det är också viktigt att eleverna förstår anledningen till den matematiska konven-tionen: *Med ett tals kvadratrot menas den positiva kvadratroten, även kallad **principalvärdet**, av kvadratroten.*

Av detta följer sedan att $|x| = \sqrt{x^2}$.