Linjära ekvationer fram och tillbaka.

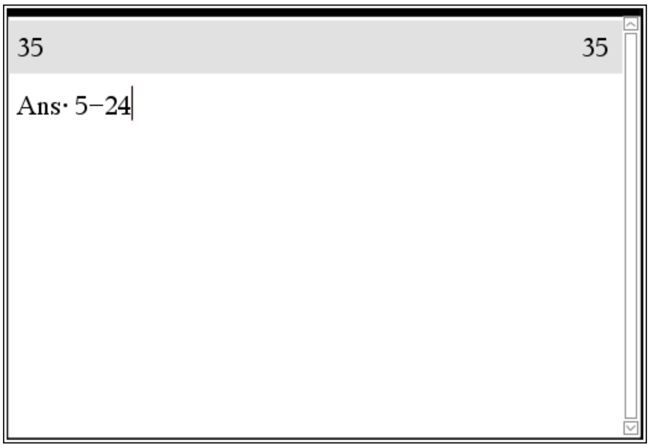
I denna aktivitet utnyttjar vid TI-Nspire´s inbyggda CAS-motor för att bygga och sedan lösa linjära ekvationer i steg. TI-Nspire har ju ett särskilt kommando **solve** för att lösa ekvationer exakt men det är vi primärt inte intresserade av att utnyttja i denna aktivitet.

Att lösa ekvationer *steg för steg* med datoralgebraiskt verktyg blir lite av utprövning eftersom det i Sverige saknas erfarenheter från praktiska försök. Vi har där-för lagt med några referenser på engelska i slutet av detta dokument.

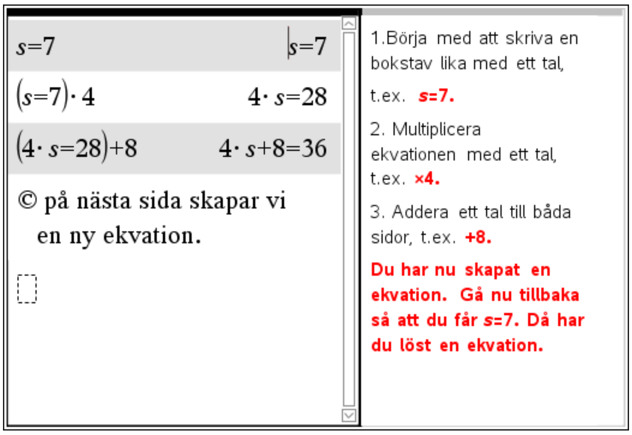
De flesta moderna räknare, grafräknare och andra funktionsräknare, har en särskild funktion *Ans*. Varje gång du utför en beräkning så lagras resultatet i TI-Nspires lokala minne som en *Ans*-variabel. Du kan snabbt komma åt den lagrade variabeln och använda den i fortsatta beräkningar. Vi ska utnyttja denna funktion i denna aktivitet för att stegvis bygga upp och sedan gå baklänges och ekvationer.

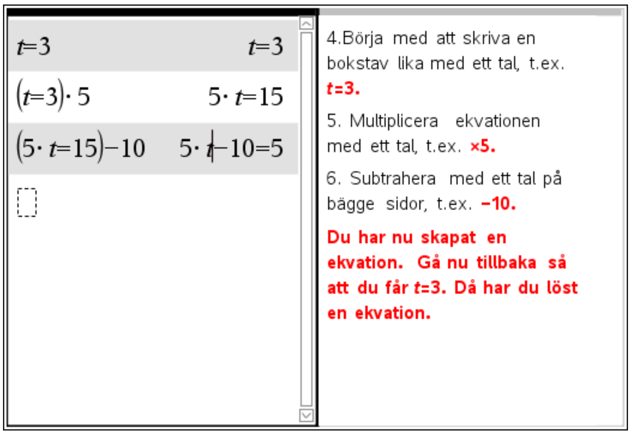
Här har vi först matat in 35 och sedan tryckt på enter. Sedan trycker vi på multiplikationstangenten. Auto-matiskt skrivs då **Ans·**på inmatningsraden och man kan fylla på med fortsatta beräkningar. Variabeln Ans innehåller ju värdet 35 i detta fall.

Du kan också skriva **ans** direkt från tangentbordet. Då plockas resultatet av den sista beräkningen fram.

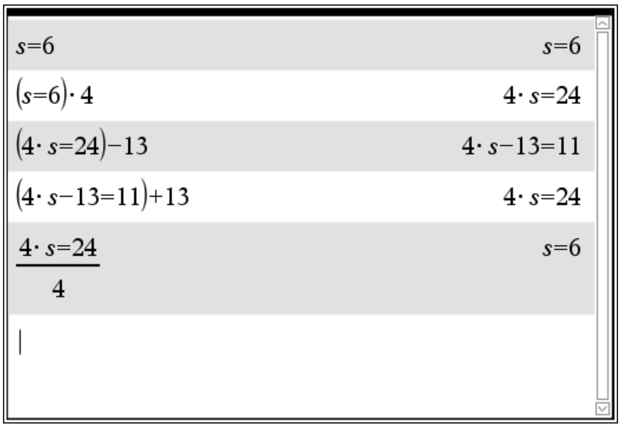


På sidorna 1.2 och 1.3 visar vi nu hur man kan utnyttja denna funktion när man arbetar med ekvationer symboliskt. Tanken är att man först ska skapa ekva-tionen och sedan gå tillbaka till det man hade från början. Då måste man utföra de motsatta, *inversa*, operationerna.

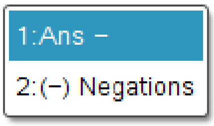




Här arbetar vi med heltal men man kan naturligtvis också arbeta med tal i bråkform t.ex. Börja alltså med att skriva in lösningen till ekvationen.



Ovan har vi arbetet med den enkla ekvationen $4s-13=11$. En sak dyker upp när vi arbetar med subtraktion och vill skriva in subtraktionssymbolen



I detta fall så vill vi utifrån sista beräknade värdet *Ans* fortsätta beräkningarna genom att subtrahera med 13. Då väljer man alternativ 1.

Problem 2

Här fortsätter vi med något mer komplicerade ekvationer.

$m=2$	$m=2$
$(m=2)\cdot 4$	$4\cdot m=8$
$(4\cdot m=8)+3$	$4\cdot m+3=11$
$(4\cdot m+3=11)+5\cdot m$	$9\cdot m+3=5\cdot m+11$

© Gå nu åt motsatta hållet, dvs du ska lösa ekvationen.

Här kommer nu ekvationer där variabeln finns i båda led.

1. Börja med att skriva en bokstav lika med ett tal, t.ex. **$m=2$.**
2. Multiplicera ekvationen med ett tal, t.ex. **×4.**
3. Addera med ett tal t.ex. **+3.**
4. Addera med 5 gånger variabeln m, **$+5m$.**

Motsatta hållet, dvs stegvis lösande av ekvationen $9m+3=5m+11$, blir så här:

$9\cdot m+3=5\cdot m+11$	$9\cdot m+3=5\cdot m+11$
$(9\cdot m+3=5\cdot m+11)-5\cdot m$	$4\cdot m+3=11$
$(4\cdot m+3=11)-3$	$4\cdot m=8$
$\dfrac{4\cdot m=8}{4}$	$m=2$

Sid 2.2-2.3

Sidorna kan se rätt komplicerade ut men såg åt eleverna att främst titta i ”resultatkolumnen” till höger. Vänsterkolumnen handlar om TI-Nspires interna processer. Kan ju se rätt konstigt ut med parenteserna.

$c=5$	$c=5$
$(c=5)+3$	$c+3=8$
$\dfrac{c+3=8}{6}$	$\dfrac{c+3}{6}=\dfrac{4}{3}$
$\left(\dfrac{c+3}{6}=\dfrac{4}{3}\right)-2\cdot c$	$\dfrac{1}{2}-\dfrac{11\cdot c}{6}=\dfrac{4}{3}-2\cdot c$
$\text{solve}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{11\cdot c}{6}=\dfrac{4}{3}-2\cdot c,c\right)$	$c=5$

Starta med ekvationen $c=5$.

1. Lägg till 3.
2. Dividera med 6.
3. Dra ifrån $2c$.

Lös nu ekvationen steg för steg. Gå alltså baklänges och utför de inversa operationerna.

En lösning finns på nästa sida. Titta inte där innan du försökt

Observera att TI-Nspire oftast förkortar rationella tal (bråk) vid beräkningar. 8/6 blir 4/3 och 3/6 blir 1/2 osv.

$\dfrac{1}{2}-\dfrac{11\cdot c}{6}=\dfrac{4}{3}-2\cdot c$	$\dfrac{1}{2}-\dfrac{11\cdot c}{6}=\dfrac{4}{3}-2\cdot c$
$\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{11\cdot c}{6}=\dfrac{4}{3}-2\cdot c\right)+2\cdot c$	$\dfrac{c}{6}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{3}$
$\left(\dfrac{c}{6}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{3}\right)-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{c}{6}=\dfrac{5}{6}$
$\left(\dfrac{c}{6}=\dfrac{5}{6}\right)\cdot 6$	$c=5$

Problem 3

Här kommer nu en ekvation med variabeln i nämnaren. Observera att ekvationen inte kan ha lösningar x=-2, x=0. Därav varningstecknet!

Här utnyttjar vi för första gången kommandot *expand*. Heter *Utveckla* i verktygsmenyn för Algebra. TI-Nspire har ju gjort en faktorisering. Se rad 2 och 3.

$\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{5\cdot x}$	$\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{5\cdot x}$
$\left(\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{5\cdot x}\right)\cdot(x+2)\cdot x\cdot 5$	$10\cdot(x-1)=x+2$
$\text{expand}(10\cdot(x-1)=x+2)$	$10\cdot x-10=x+2$
$(10\cdot x-10=x+2)+10$	$10\cdot x=x+12$
$(10\cdot x=x+12)-x$	$9\cdot x=12$
$\dfrac{9\cdot x=12}{9}$	$x=\dfrac{4}{3}$

Att härifrån arbeta baklänges så att man slutligen erhåller ingångsuttrycket kan vara lite knepigt.

Här har vi en ekvation där man i ett mellanled får andragradstermer som sedan förkortas bort.

$\dfrac{a+1}{a-1}+\dfrac{a-1}{a+2}=2$	$\dfrac{-3}{a+2}+\dfrac{2}{a-1}+2=2$
$\left(\dfrac{-3}{a+2}+\dfrac{2}{a-1}+2=2\right)\cdot(a-1)\cdot(a+2)$	$2\cdot a^2+a+3=2\cdot(a-1)\cdot(a+2)$
$\text{expand}(2\cdot a^2+a+3=2\cdot(a-1)\cdot(a+2))$	$2\cdot a^2+a+3=2\cdot a^2+2\cdot a-4$
$(2\cdot a^2+a+3=2\cdot a^2+2\cdot a-4)-2\cdot a^2$	$a+3=2\cdot a-4$
$(a+3=2\cdot a-4)-a$	$3=a-4$
$(3=a-4)+4$	$7=a$

Här har vi en ekvation med bara symboler. Den går lika bra att lösa. *x* är variabeln som vi ska lösa för.

$\frac{a\cdot x+c}{b}=d$	$\frac{a\cdot x+c}{b}=d$
$\left(\frac{a\cdot x+c}{b}=d\right)\cdot b$	$a\cdot x+c=b\cdot d$
$(a\cdot x+c=b\cdot d)-c$	$a\cdot x=b\cdot d-c$
$\frac{a\cdot x=b\cdot d-c}{a}$	$x=\frac{b\cdot d-c}{a}$

Här kommer en tillämpning. Vi har från början ett uttryck för omvandling av celsiusgrader till grader Fahrenheit. Nu ska vi göra tvärtom, nämligen att ta fram ett uttryck som omvandlar grader Fahrenheit-grader till grader Celsius.

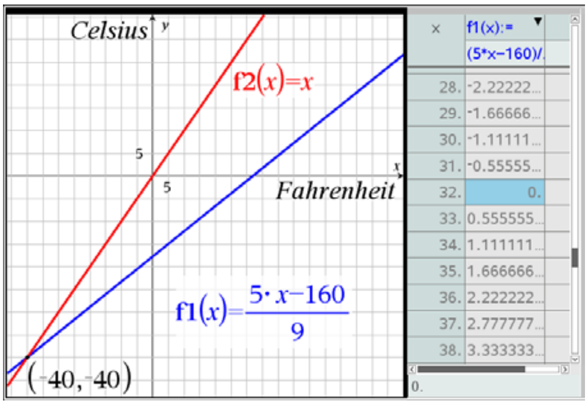
Detta är ju en ekvation med två variabler och den har ju ingen lösning utan ger sambandet mellan variab-lerna – som är en rät linje.

© Omvandla från grader Fahrenheit till grader Celsius	
$f=\frac{c\cdot 9}{5}+32$	$f=\frac{9\cdot c}{5}+32$
$\left(f=\frac{9\cdot c}{5}+32\right)-32$	$f-32=\frac{9\cdot c}{5}$
$\frac{\left(f-32=\frac{9\cdot c}{5}\right)\cdot 5}{9}$	$\frac{5\cdot (f-32)}{9}=c$
$\text{expand}\left(\frac{5\cdot (f-32)}{9}=c\right)$	$\frac{5\cdot f}{9}-\frac{160}{9}=c$
$\text{comDenom}\left(\frac{5\cdot f}{9}-\frac{160}{9}=c\right)$	$\frac{5\cdot f-160}{9}=c$

Med *solve*-kommandot får naturligtvis direkt ett uttryck:

$\text{solve}\left(f=\frac{c\cdot 9}{5}+32,c\right)$	$c=\frac{5\cdot (f-32)}{9}$

Här har vi gjort en plottning av sambandet. Linjen *y=x* och dess skärning med omvandlingslinjen ger den temperatur där gradtalet är detsamma i de två skalorna. Algebraiskt är det lösningen till ekvationen $x=\frac{5x-160}{9}$.



$x=\frac{5\cdot x-160}{9}$	$x=\frac{5\cdot (x-32)}{9}$
$\left(x=\frac{5\cdot (x-32)}{9}\right)\cdot 9$	$9\cdot x=5\cdot (x-32)$
$\text{expand}(9\cdot x=5\cdot (x-32))$	$9\cdot x=5\cdot x-160$
$(9\cdot x=5\cdot x-160)-5\cdot x$	$4\cdot x=-160$
$\frac{4\cdot x=-160}{4}$	$x=-40$
$\text{solve}\left(x=\frac{5\cdot x-160}{9},x\right)$	$x=-40$

Avslutningsvis så har vi en sida med ett rätt avancerat uttryck. Vi ska alltså lösa ut *x* som förekommer både i täljaren och nämnaren.

Här förekommer algebraverktygen Expand (Utveckla) och Factor (Faktorisera).

$r=\frac{x+p}{x-p}$	$r=\frac{x+p}{x-p}$
$\left(r=\frac{x+p}{x-p}\right)\cdot (x-p)$	$r\cdot (x-p)=x+p$
$\text{expand}(r\cdot (x-p)=x+p)$	$r\cdot x-p\cdot r=x+p$
$(r\cdot x-p\cdot r=x+p)+p\cdot r$	$r\cdot x=p\cdot r+x+p$
$(r\cdot x=p\cdot r+x+p)-x$	$r\cdot x-x=p\cdot r+p$
$\text{factor}(r\cdot x-x=p\cdot r+p)$	$(r-1)\cdot x=p\cdot (r+1)$
$\frac{(r-1)\cdot x=p\cdot (r+1)}{r-1}$	$x=\frac{p\cdot (r+1)}{r-1}$
$\text{solve}\left(x=\frac{p\cdot (r+1)}{r-1},r\right)$	$r=\frac{x+p}{x-p}$

Referenser:

Using technology to introduce linear equation solving at year 9: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ717801.pdf

Video från T3-konferens Leuven, Belgien 2016: *https://www.youtube.com/watch?v=UR8BgHfr4D8&feature=youtu.be*