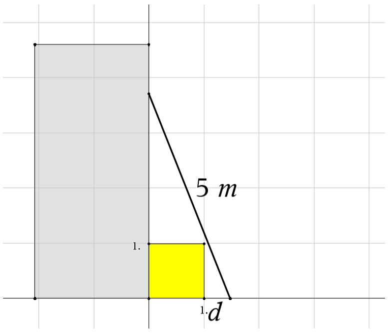
Stegen och lådan

En stege står lutad mot en vägg på ett sådant sätt att den precis nuddar den låda som står mot väggen. Lådan är en kub med sidan 1 meter. Stegens längd är 5 m. Hur högt upp på väggen når stegen?

Metod 1

Det första man gör när man har ett sådant lite klurigare problem är att skaffa sig en första känsla för problemet. Vi ritar upp situationen på ett rutat papper.



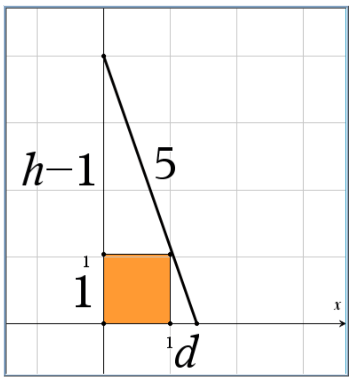
Hör börjar nu beräkningen enligt en metod. Beteckningarna har vi i figuren. Likformighet och Pythagoras sats gör att man kommer fram till en ekvation som man löser numeriskt. Man kan naturligtvis hitta lösningar genom att rita en graf. Det visar vi också senare.

Nu tittar vi närmare på problemet och vi inför beteckningar på olika avstånd i figuren. Stegen når alltså *h* meter upp på väggen. *Likformighet* ger

$\frac{1}{d}=\frac{h-1}{1}$ som ger $d=\frac{1}{h-1}$

Då blir avståndet från väggen till stegens fot

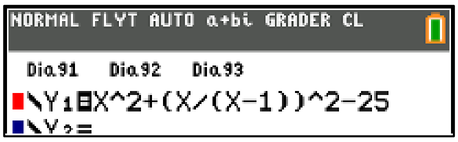
$1+d=1+\frac{1}{h-1}$ som kan skrivas $\frac{h}{h-1}$

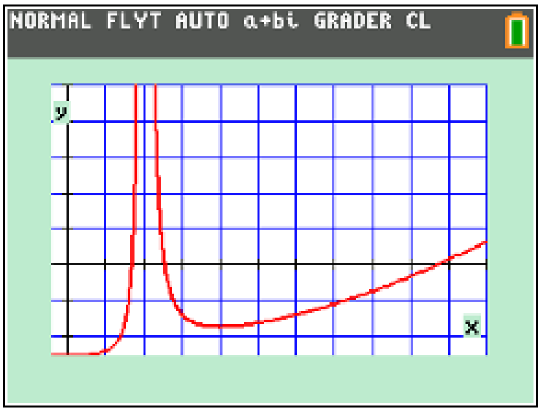


Nu kan vi använda Pythagoras sats triangeln där stegen är hypotenusan. Vi får:

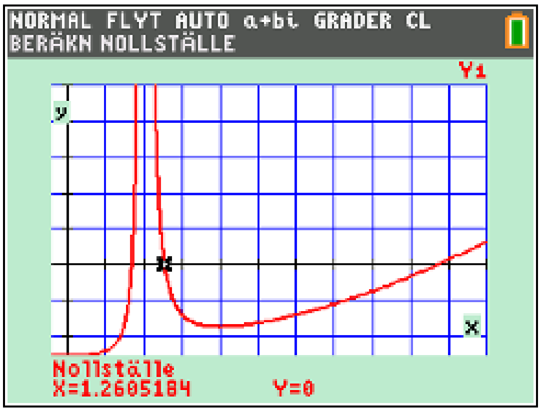
$$h^2+\left(\frac{h}{h-1}\right)^2=5^2$$

Vi matar nu in uttrycket nedan som en funktion, plottar och tittar när vi har nollställen. Det kan ta en stund att hitta ett bra "fönster".





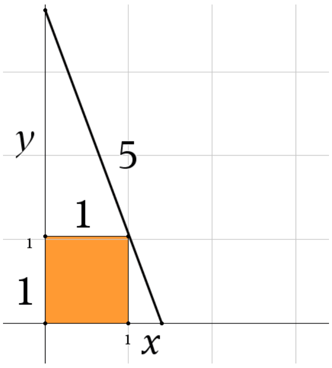
Vi får en graf med tre nollställen. Linjen x=1 är asymptot. Det saknas ju värden för *x*=1 eftersom vi har *x*-1 i nämnaren i uttrycket. Det vänstra nollstället, *x*=0,83 kan vi förkasta eftersom x måste vara större än 1. Du får de två andra nollställena genom att trycka på $\boxed{\text{2nd}}$ [calc] och välja 2:nollställe. Du söker ett nollställe i taget.



Du får nollställena 1,26 och 4,84. Fundera varför det är så?

Metod 2

Här har vi en annan lösning där man löser ett ekvationssystem. Lösningen bygger på likformighet och Pythagoras sats. Vi tittar på figuren igen och inför nya variabler x och y.

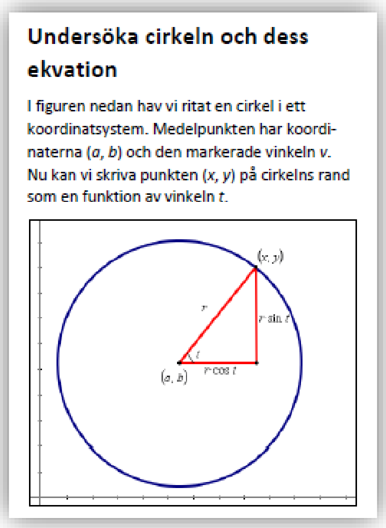


Pythagoras sats ger för den stora triangeln

$$(y+1)^2+(x+1)^2=5^2$$

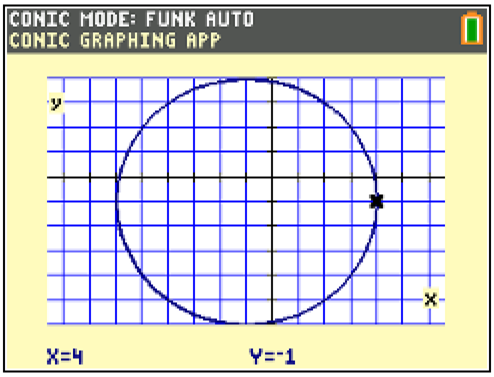
Likformighet ger också $\frac{y}{1}=\frac{1}{x} \Rightarrow y=\frac{1}{x}$

Nu har vi två ekvationer. Att lösa detta analytiskt kan vi inte utan vi gör som förut; vi ska plotta båda uttrycken som funktioner och låter sedan räknaren beräkna skärningspunkterna. Hur ska vi nu plotta det första uttrycket ovan? Funktioner på räknaren skrivs ju som "y= ". Det som står där är faktiskt en ekvation för en cirkel och det är ingen funktion. Nu ingår inte cirkelns ekvation i ämnesplanerna i matematik men vi har i en annan aktivitet - *Undersök cirkeln och dess ekvation* - gått igenom cirkeln analytiskt/geometriskt. Se nedan.

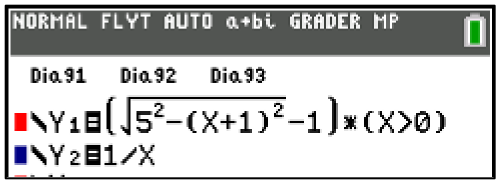

Undersöka cirkeln och dess ekvation

I figuren nedan hav vi ritat en cirkel i ett koordinatsystem. Medelpunkten har koordinaterna (*a*, *b*) och den markerade vinkeln *v*. Nu kan vi skriva punkten (*x*, *y*) på cirkelns rand som en funktion av vinkeln *t*.

Om du trycker på tangenten [apps] så kommer du åt alla appar. Där hittar du appen *Conics*. Där kan du plotta olika typer av s.k. *kägelsnitt*. Andragradskurvan Cirkeln är en av dem.

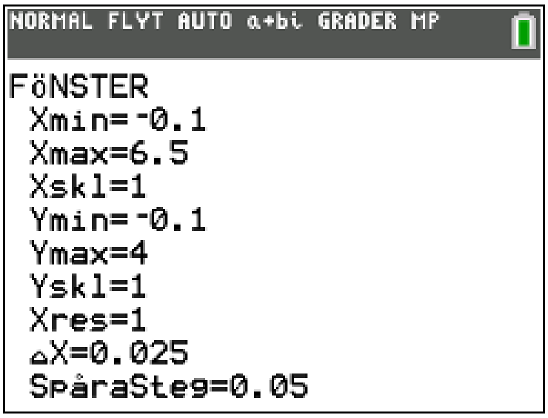


För att plotta den del av andragradskurvan cirkeln vi är intresserade v kan vi mata in våra funktionsuttryck så här:

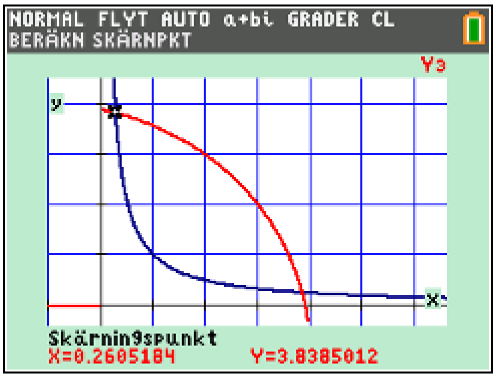


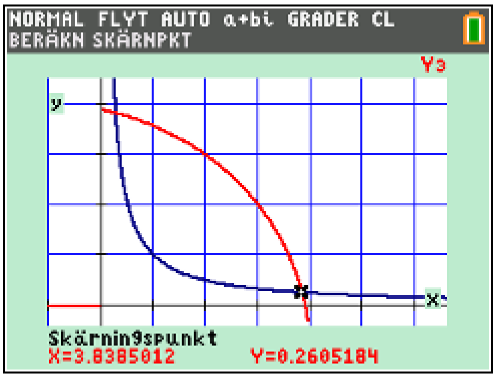
Vi har i funktionsuttrycket lagt till att plottning bara ska ske när x>0.

Nu kan vi plotta. För att plotta på ett bra sätt när man ha en cirkel så vill man ha ett *ortonormerat* koordinatsystem, dvs en enhet på x-axeln är lika långt som en enhet på y-axeln. Då fönstret är rektangulärt så kan en fönsterinställning som den här passa bra

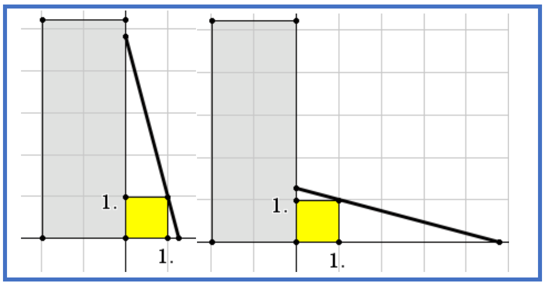


Nu äntligen är det dags att plotta. Tryck på [2nd][calc] och välj **skärning**. Följ instruktionerna på skärmen.



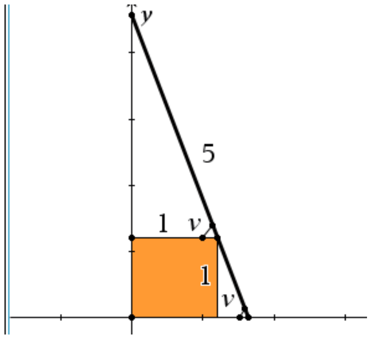


I svaret får vi naturligtvis lägga till 1 meter. Du ser också att man får två lösningar. *x* och *y* byter plats helt enkelt. Se skisserna nedan.



Metod 3

För den sista metoden ska vi använda trigonometri. Titta på figuren nedan.



Visa nu att man kan ställa upp följande ekvation:

$$\frac{1}{\sin(v)}+\frac{1}{\cos(v)}=5$$

Använd sedan denna ekvation för att lösa problemet. Gör som tidigare, dvs utgå från en plottning av en funktion.

<u>**Avslutande problem:**</u>

Det sista problemet är att beräkna den kortaste stegen som nuddar hörnet på 1×1 m-lådan. Använd likformighet och Pythagoras sats. Du får ett uttryck som du söker minimum för.