Minsta arean av en förpackning

En läskburk (eller en konservburk) har en volym på 330 cm^3. Vilken radie ska burken ha för att minimera dess area och därigenom mängden material till förpackningen? Hur stor blir då arean?

Innan beräkningarna utförs är det bra om du har kikat lite på förpackningar på hyllorna i någon mataffär.

Hur väl det stämmer med de faktiska måtten.

Uppgift kräver att du har en viss vana att kunna ställa upp uttryck utifrån ett praktiskt problem och att du kan lösa ut variabler. I den senare delen av uppgiften ska du också behärska beräkningar med derivator.

Här gäller det att ställa upp uttryck för volym och area hos burken. Vi kallar radien för ***r*** och höjden på burken för *h*. Vi får nu följande uttryck för volymen:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Och för arean:

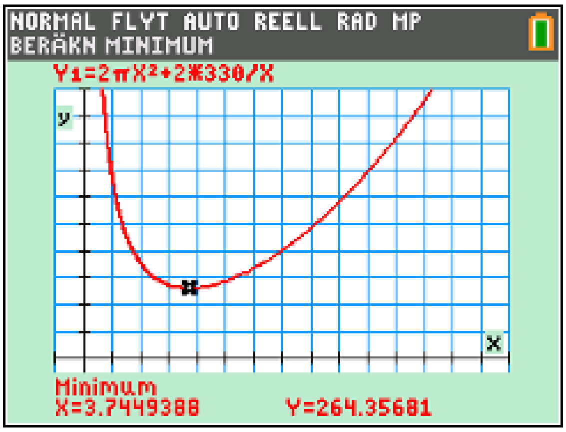
$$A = 2 \cdot \pi r^2 + 2 \cdot \pi r \cdot h$$

För arean gäller att du får slå ihop areorna av 2 cirklar och en den mantelyta du får om du breder ut plåten (om det är en vanlig konservburk)

Vi löser ut *h* i det första uttrycket och sätter in i det andra. Detta ger

$$A = 2 \cdot \pi r^2 + 2 \cdot \pi r \cdot \frac{V}{\pi \cdot r^2} = 2 \cdot \pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

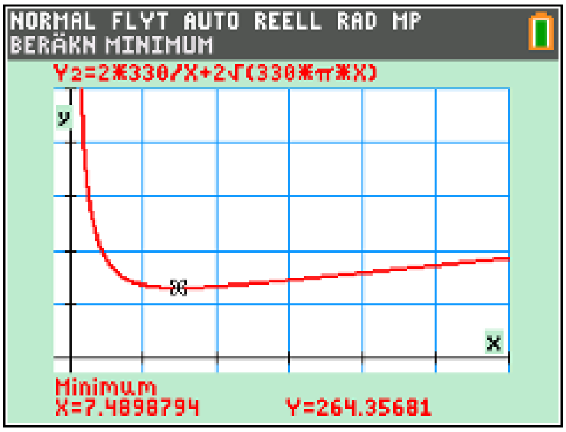
Nu plottar vi uttrycket för arean som funktion av ***r***. Vi sätter in värdet 330 på volymen.



Vi ser att radien blir 3,74 cm och arean 264 cm^3.

Om vi nu löser ut ***r*** i stället får vi ett annat uttryck för arean. Vi plottar nu det uttryck vi får då nedan**.**

Din uppgift är nu att härleda detta uttryck. Du ser uttrycket du ska komma fram till i graf-fönstret här. Det är en bra algebraövning!



Jämför nu de två graferna och deras minimivärden. Vad ser du då?

Minsta arean blir ca 264 cm^2.

För att beräkna ett *exakt* samband mellan radie och höjd måste vi använda oss av derivator.

Vi hade uttrycket

$A = 2 \cdot \pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$ Vi deriverar nu uttrycket och får då:

$$A' = 4\pi r - \frac{2 \cdot V}{r^2}$$

Vi söker nu derivatans nollställe. Se nästa sida.

Vi får då:

$$4\pi r = \frac{2 \cdot V}{r^2} \text{ som ger } r^3 = \frac{V}{2\pi}$$

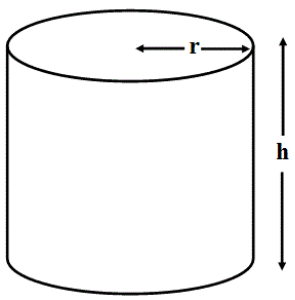
Nu är ju $V = \pi r^2 \cdot h$ och om vi sätter in det uttrycket för V i uttrycket för r^3 får vi

$$r^3 = \frac{\pi r^2 \cdot h}{2\pi}$$

Vi förenklar genom att förkorta bort r^2 och π och får då att

$$r = \frac{h}{2}$$

Den mest förpackningssnåla burken ska alltså ha en diameter som är likas med höjden! Den ser ut så här:



Om du tittar i en mataffär hittar du då många burkar som har den formen?

Om man minimera arean av en ”form” för en given volym så ska man välja ett *klot*. Det skulle dock vara väldigt opraktiskt.

Vilken area skulle ett klot ha om dess volym var 330 cm^3? Utför nu beräkningar på samma sätt som vi gjort tidigare. Om du räknat rätt så kommer du fram till volymen 231 cm^3.

En liten utvikning om klot och cylindrar.

Visste du att Arkimedes redan för ca 2300 år sedan upptäckte att förhållandet mellan voly-merna hos ett klot och en cylinder med samma höjd som klotets diameter var 2/3.

På hans gravsten finns en inskription av π, hans mest berömda upptäckt. Där finns också ett klot med en omskriven cylinder, där förhållandet radie/höjd är 1:2. Han upptäckte att förhållandet mellan klotets volym och cylinderns volym var 2:3. Idag kan vi enkelt härleda detta förhållande:

$$\frac{\text{Klotets volym}}{\text{Cylinderns volym}} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi r^3}{\pi r^2 \cdot 2r} = \frac{2}{3}$$

Vad är förhållandet mellan areorna?

Tillbaka till nutid:

Du ska nu genomföra samma beräkningar före en pappersförpackning där längd/bredd-förhållandet är 2:1. Du kan beteckna längd och bredd som2*a* resp. *a* och höjd som *h*.

Uttrycket för förpackningens volym är

$V = a \cdot 2a \cdot h = 2a^2 \cdot h$

Och för arean:

$A = 2 \cdot 2a \cdot a + 2 \cdot 2a \cdot h + 2 \cdot a \cdot h = 4a^2 + 6ah$

Precis som förut löser vi ut *h* i det första uttrycket:

$h = \dfrac{V}{2a^2}$

Vi sätter in uttrycket för h i det andra uttrycket för arean. Vi får

$A = 4a^2 + 6a \cdot \dfrac{V}{2a^2} = 4a^2 + \dfrac{3V}{a}$

Fortsätt nu beräkningarna och beräkna med grafisk/numerisk metod och exakt metod den minsta arean. Volymen ska fortfarande vara 330 cm^3.

Vilken form tror du är mest optimal om du har en förpackning som ett rätblock?