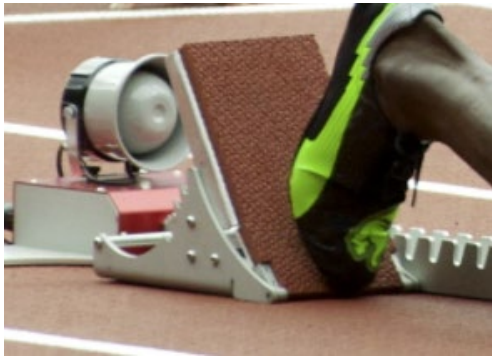


## Modellering av data- världsrekordlopp 100 m



I ämnesplanerna i matematik betonas att eleverna ska få möjlighet att använda digitala verktyg. Följande dokument är exempel på tillämning av derivata och integral och är också exempel på hur man med kraftfulla verktyg kan modellera på riktiga data. Passar utmärkt i slutet av kursen Matematik 3.

Data i statistikeditorn nedan är från den amerikanske löparen Maurice Greens världsrekordlopp i Aten 1999. Han sprang då 100 m på 9,79 s. Vi har hittat data om Greens tid och hastighet vart tionde meter. Enligt uppgift så har man med avancerad utrustning mätt hastigheten "momentant" var tionde meter.

Tyvärr har vi inte hastighetsdata för *Usain Bolt* från hans världsrekordlopp från 2009 (9,58 s) utan bara hans tider. Vi har som jämförelse lagt in Bolts tider från världsrekordloppet 2009 i lista L4. Man ser att Green har bättre splittider fram till ca 60 m, därefter drar Bolt ifrån.

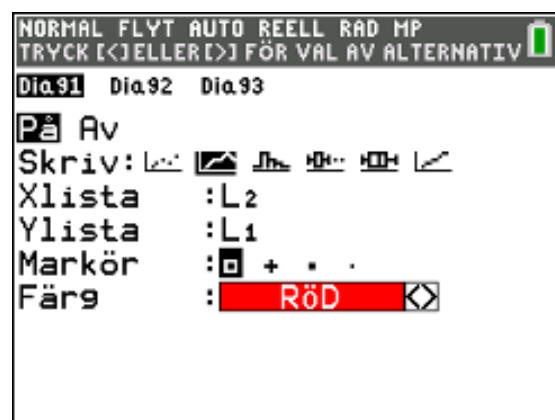
Vi ska nu göra en modellering av hastighetsdata. Vi börjar med att titta på ett  $s-t$ - och ett  $v-t$ -diagram. I L1 har vi sträckan, i L2 tiden och i L3 uppmätt hastighet m/s.

L1	L2	L3	L4	L5	4
0	0	0	0	-----	
10	1.71	8.71	1.89		
20	2.75	10.47	2.88		
30	3.67	11.14	3.78		
40	4.55	11.5	4.64		
50	5.42	11.67	5.47		
60	6.27	11.8	6.29		
70	7.12	11.68	7.1		
80	7.98	11.57	7.92		
90	8.85	11.51	8.75		
100	9.79	11.3	9.58		

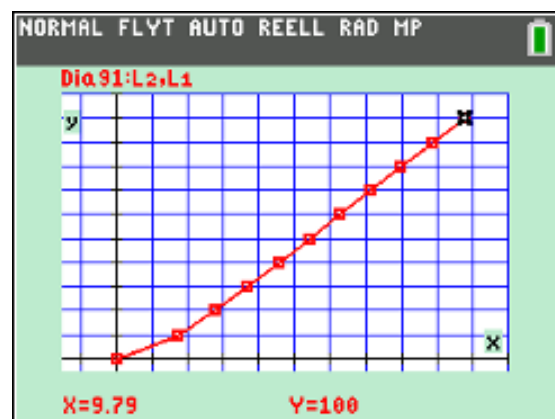
L4(1)=0

Vi kan se att det tog 1,71 sekunder för Green att tillryggalägga de första 10 meterna. Det ger en medelhastighet på 5,85 m/s. Då har vi inte tagit hänsyn till reaktionstiden som är den tid det tar innan löparen reagerar på startskottet. Reaktionstiden brukar ligga på ca 0,150 s för elitlöpare. En reaktionstid under 0,100 s räknas som tjuvstart och löparen blir diskvalificerad.

Vi plottar nu tiden på x-axeln och tillryggalagd sträcka på y-axeln i ett linjediagram. Inställningarna är enligt nedan. Se till att alla funktioner i  $\overline{y=}$  är avmarkerade och tryck sedan på  $\overline{2nd}$ [stat plot].



Om vi sedan plottar data med en bra fönsterinställning ser det ut så här. Utom alldeles i början så ser det ut som han har en ganska konstant hastighet.



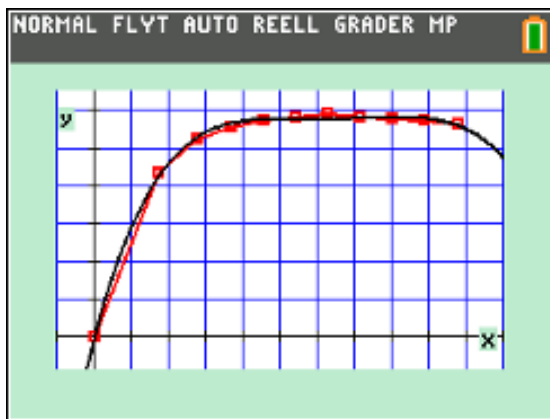
Med formeln

$$s = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

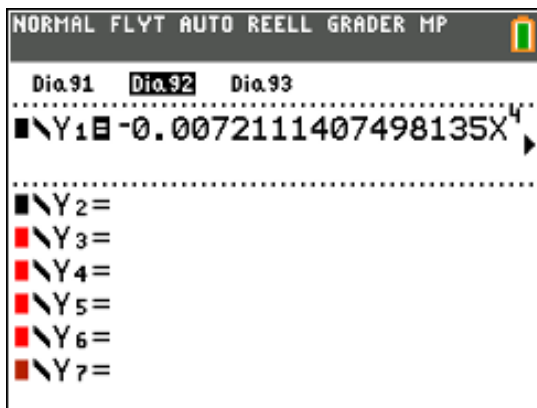
kan vi lösa ut accelerationen  $a$  om det är en *likformigt* accelererad rörelse.  $v_0$  är 0 i detta fall.



Lägg märke till hur väl kurvan är anpassad till datapunkterna.



I Y-editorn är nu funktionen sparad med maximalt antal decimaler.

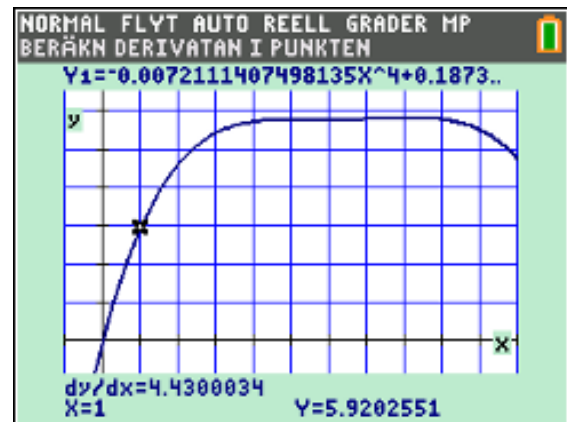


Här kan man utifrån kurvans lutning i olika punkter diskutera hur hastigheten förändras. Speciellt intressant är det i startfasen och slutfasen av loppet. Hur snabbt kan en människa accelerera?

Om vi avmarkerar datapunkterna och trycker på  $2^{nd}$ [calc] får vi tillgång till ett antal numeriska analysverktyg:

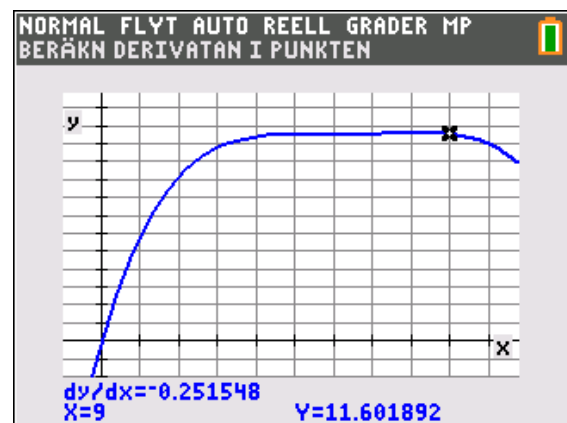


Välj 6:  $dy/dx$  och flytta sedan markören efter kurvan till den punkt där du vill beräkna derivatan. Du kan också skriva in ett värde direkt. Tryck sedan på  $\text{enter}$ .



Vi får den numeriska derivatan beräknad. Efter 1 sekund är accelerationen  $4,43 \text{ m/s}^2$  och hastigheten  $5,92 \text{ m/s}$ .

Ganska lång tid så har Green ganska konstant hastighet, ca  $11,7 \text{ m/s}$ . man har uppmätt Bolts maximala hastighet till ca  $12,2 \text{ m/s}$  men under kortare tid.



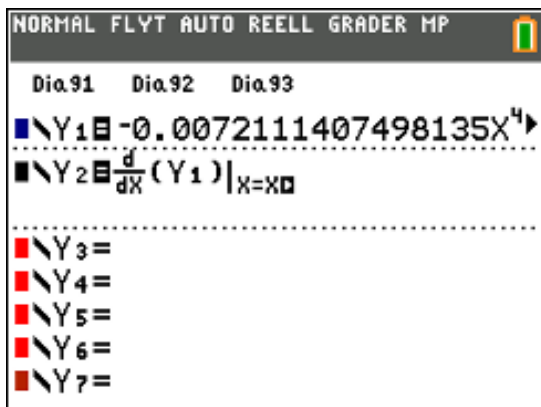
Efter 9 sekunder är accelerationen  $-0,25 \text{ m/s}^2$  och hastigheten  $11,6 \text{ m/s}$ . Hastigheten minskar alltså.

Vad mer kan du avläsa av hastighetsgrafens?

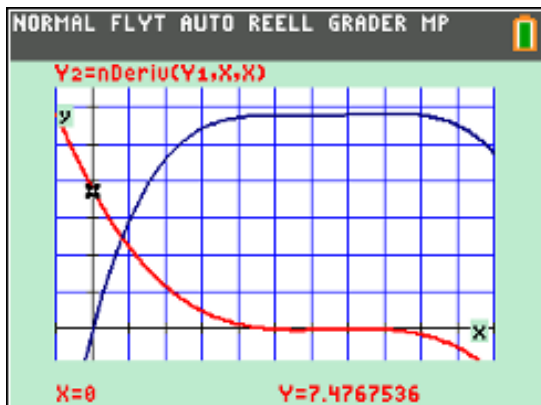
Nu ska vi göra något intressant. Vi låter räknaren numeriskt beräkna accelerationen och plotta accelerationskurvan. Placera markören på plats Y2 i editorn för funktionsinmatning och tryck på  $\text{math}$ . Välj sedan  $nDeriv$ .



Skriv in enligt nedan. Vi har inställningen MATHPRINT (ställs in under `mode`)

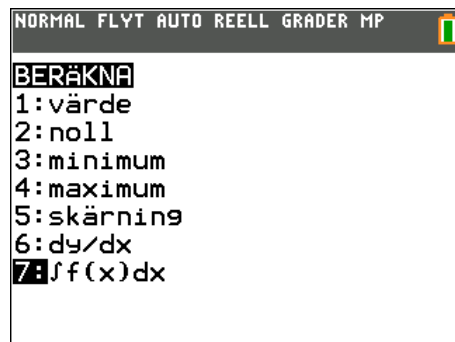


Nu plottar vi:

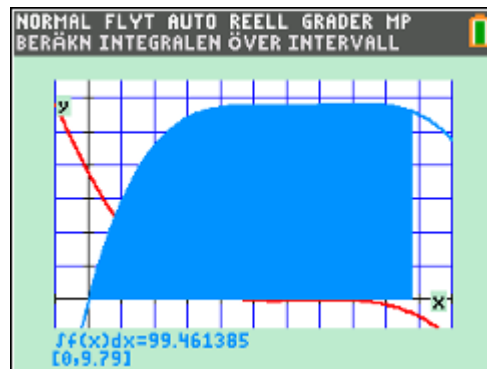


Vi ser att accelerationen (enligt *modellen*) är mer än  $7 \text{ m/s}^2$  vid starten och drygt  $4 \text{ m/s}^2$  efter en sekund. Den är 0 mellan 4 och 8 sekunder och avtar sedan igen och har då ett negativt värde.

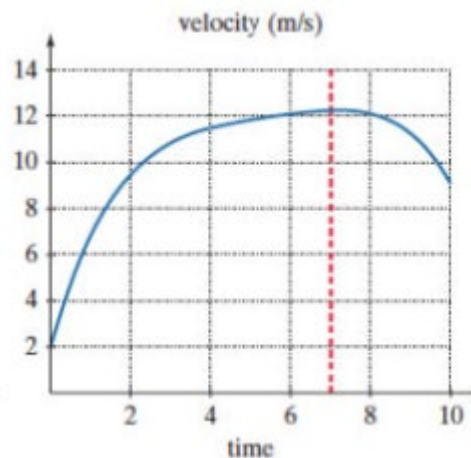
Vi har också gjort en integralberäkning med gränserna 0 och 9,79. När du har grafen på skärmen trycker du på `graph``[calc]` och väljer alternativ 7.



Vi ser att vi får värdet 99,46, vilket stämmer väldigt bra. Det blå området under kurvan motsvarar ju tillryggalagd sträcka.



Nu har vi inte data för de allra första metrarna men fysiker har rapporterat om en acceleration på drygt  $0,9 \text{ g}$  för Usain Bolt.



Grafen ovan visar momentant Usain Bolts hastighetkurva från finalen i OS 2008 (sluttid 9,69 s) enligt en framräknad regressionsmodell. Grafen kommer från en amerikansk kursbok i matematik analys.

Utifrån grafen ska du nu göra en egen regressionsanalys och sedan plotta en accelerationsgraf, precis som vi gjort för här till vänster. Jämför nu också plottningarna för de två löparna.